УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

На правах рукописи

**ХЛЕБНИКОВ Михаил Владимирович**

# МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Специальность 05.13.01 — Системный анализ,
управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской Академии Наук
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН)

| | |
|---|---|
| Научный консультант: | доктор технических наук,<br>профессор Б.Т. Поляк |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Л.Б. Рапопорт |
| | доктор физико-математических наук,<br>профессор О.Н. Граничин |
| | доктор физико-математических наук<br>профессор М.М. Коган |
| Ведущая организация: | Институт проблем машиноведения РАН |

Защита состоится «___» ____________ 2010 г. в _____ часов на заседании Диссертационного совета Д 002.226.02 при ИПУ РАН по адресу: 117997, ГСП-7, В-342, Москва, Профсоюзная ул., д. 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН.

Автореферат разослан «___» ____________ 2010 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.226.02
кандидат технических наук В.Н. Лебедев

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления и рассматривается в различных ее разделах. В линейно-квадратичной оптимизации рассматриваются задачи со случайными гауссовскими помехами (т. н. *линейно-квадратичная гауссовская задача, LQG*). Проблема $H_\infty$-*оптимизации* связана либо с гармоническими внешними возмущениями, либо со случайными гауссовскими, либо с возмущениями из класса $L_2$ (т. е. убывающими с течением времени). Однако во многих практических случаях внешние возмущения являются просто ограниченными; какая-либо дополнительная информация о них отсутствует.

Задачей о подавлении неслучайных ограниченных внешних возмущений стали интересоваться еще в середине прошлого века. В 1940-е годы т. н. *проблемой о накоплении возмущений* занимался Б.В. Булгаков. Однако основное внимание тогда уделялось проблеме анализа — каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними возмущениями, что, по сути, являлось задачей программного оптимального управления, поскольку внешние возмущения рассматривались как управления. Лишь значительно позже появляются работы по компенсации ограниченных возмущений, в которых, впрочем, не предлагались методы синтеза оптимальных регуляторов.

Впервые задача об оптимальном подавлении неслучайных ограниченных возмущений в дискретном случае была сформулирована в работе [1]; ее полное решение было построено в работах А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина и, позже, — М. Далеха и Дж. Пирсона. Впоследствии эта теория получила название $l_1$-*оптимизации*. Однако методы $l_1$-оптимизации имеют ряд существенных недостатков: ее применение к задаче синтеза оптимального управления часто приводит к регуляторам очень высокого порядка; отметим и асимптотический характер получающихся оценок. Обобщение приведенных результатов на непрерывный случай ($L_1$-*оптимизация*) вызывает дополнительные сложности.

Наряду с $l_1$-оптимальным управлением хорошо известны также *методы динамического программирования* для подобных задач. Заметим, что ограниченные возмущения также изучаются в работах, посвященных исследованию собственно множеств достижимости; отметим Л.С. Гноенского с соавторами, Д. Бертсекаса и И. Родеса, А.М. Формальского, а также в теории *дифференциальных игр* (Н.Н. Красовский, А.И. Субботин, В.С. Пацко, Т. Башар).

[1] *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1975. №9. С. 73–79.

Специальные методы борьбы с внешними возмущениями предложены в теории систем переменной структуры. Управление на скользящих режимах для решения этой проблемы изучается в работах С.В. Емельянова, С.К. Коровина, В.И. Уткина, В.А. Уткина и других. В целом, подавление неслучайных ограниченных возмущений традиционно считается трудной задачей в теории управления.

Существует иной подход к данной проблематике, основанный на методе *эллипсоидального оценивания*. Эллипсоиды довольно широко используются в различных задачах теории гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Ф. Швеппе, Д. Бертсекаса, А.Б. Куржанского, Ф.Л. Черноусько. Отметим, что во многих случаях эллипсоиды оказываются удобными аппроксимациями для областей достижимости динамических систем; это позволяет широко их использовать в задачах анализа.

В теории систем и автоматического управления также активно применяется *концепция инвариантности*, см. монографию [2]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды из-за их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. Ввиду этого, в рамках эллипсоидального описания в качестве технического средства может быть использован мощный аппарат линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) и полуопределенного программирования (*Semidefinite Programming, SDP*). Первой работой, в которой систематически изложена техника LMI, является книга [3], а первой монографией на русском языке, посвященной этому вопросу, является книга [4].

Необходимо упомянуть, что техника LMI, очень популярная в последнее время, уже использовалась в целях подавления возмущений. Однако отметим, что в большинстве работ не рассматривались задачи подавления $L_\infty$-ограниченных возмущений; так, в монографии Д.В. Баландина и М.М. Когана техника LMI применялась для подавления возмущений, ограниченных в $L_2$-норме. В статье [5] решаются задачи анализа и синтеза при ограниченных внешних возмущениях, но лишь в непрерывном случае; кроме того, в ней не

[2] *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.

[3] *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

[4] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

[5] *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. 1996. Vol. 6. P. 899–927.

используется явно техника LMI.

В диссертации предлагается общий подход к широкому классу задач, связанных с подавлением неслучайных ограниченных внешних возмущений. Он основан на методе инвариантных эллипсоидов и систематическом использовании техники LMI. Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным (или субоптимальным) регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений и в равной мере распространим как на непрерывный, так и на дискретный вариант задачи.

Для решения полученных задач существуют мощные вычислительные методы и соответствующие пакеты программ, среди которых отметим свободно распространяемые программные пакеты YALMIP и SeDuMi для системы MATLAB, а также пакет `cvx`.

**Целью** диссертационной работы является разработка методов подавления ограниченных внешних возмущений в непрерывных и дискретных линейных системах в терминах инвариантных эллипсоидов на основе систематического использования техники LMI и сведения задач к формату SDP. Рассмотрены случаи управления по состоянию, фильтрации, управления по выходу с использованием наблюдателя и их робастные варианты.

**Методы исследования.** В диссертационной работе используются методы теории оптимального управления, оптимизации, линейных матричных неравенств, линейной алгебры, а также компьютерное моделирование.

**Научная новизна.** Полученные в диссертации результаты и доказательства утверждений являются новыми. К основным новым результатам относятся следующие:

1. Разработан метод синтеза оптимального управления с помощью статической линейной обратной связи по состоянию в линейных непрерывных динамических системах с неслучайными ограниченными внешними возмущениями.
2. Предложен метод решения задачи фильтрации (оценки состояния динамической системы по измерениям) в линейных непрерывных стационарных системах с неслучайными ограниченными внешними возмущениями.
3. Разработан простой и универсальный способ подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных непрерывных динамических системах с помощью линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя.

4. Предложен способ построения нехрупкого (т. е. допускающего вариации его параметров) регулятора для подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных непрерывных динамических системах.
5. Аналогичные п.п. 1–4 методы разработаны для линейных дискретных динамических систем с неслучайными ограниченными внешними возмущениями.
6. Разработаны методы решения робастных вариантов задач, рассмотренных в п.п. 1, 2, 4, 5.

**Теоретическая и практическая ценность.** В целом диссертационная работа носит теоретический характер. Разработанные подходы к подавлению внешних возмущений в линейных динамических системах основаны на методе инвариантных эллипсоидов и предполагают систематическое использование техники линейных матричных неравенств и сведение задач к формату полуопределенного программирования. Предложена новая техника доказательств, использующая модифицированный вариант $S$-процедуры.

Вместе с тем, полученные результаты представляются значимыми и с практической точки зрения. Разработанные методы могут найти применение в целях подавления внешних возмущений в разнообразных технических системах. Результаты диссертационной работы также могут быть использованы в учебном процессе.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на IX Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" имени Е.С. Пятницкого (Москва, 2006), Конференции по принятию решений и управлению CDC'06 (Сан-Диего, США, 2006), XIV Международной школе-семинаре по динамике и управлению (Звенигород, 2007), Международной конференции, посвященной 150-летию со дня рождения А.М. Ляпунова "LMC2007" (Харьков, Украина, 2007), II школе-семинаре "Управление большими системами" (Воронеж, 2007), III Международной конференции по физике и управлению "PhysCon 2007" (Потсдам, Германия, 2007), XIV Международной конференции по автоматическому управлению "Автоматика–2007" (Севастополь, Украина, 2007), XVII Всемирном конгрессе ИФАК (Сеул, Корея, 2008), IX Крымской международной математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Алушта, Украина, 2008), VIII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Н. Новгород, 2008), XII Международной научно-технической конференции "Моделирование, идентификация и синтез систем управления" (пос. Канака, Украина, 2009), XVI Международной конференции по автоматическому управлению "Автоматика–2009"

(Черновцы, Украина, 2009), а также на научно-исследовательских семинарах ИПУ РАН и СПбГУ.

Исследования по теме диссертации проводились в соответствии с плановой тематикой работ ИПУ РАН (направление 3101 “Разработка методов управления динамическими системами в условиях неопределенности”) и программы Отделения ЭММПУ РАН “Робастные и адаптивные методы управления движением”.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–31], из них 11 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК. Все результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 130 наименований. Объем диссертационной работы 198 страниц; в текст включен 31 рисунок.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен обзор результатов, относящихся к теме работы, обоснована актуальность темы исследования, сформулированы его цели и задачи, дана общая характеристика полученных результатов, определена их научная новизна.

В **первой главе** рассматриваются задачи анализа и синтеза оптимального управления в линейной динамической системе с помощью регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию, который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида выхода) подавляет воздействие внешних возмущений.

В первом разделе рассматривается непрерывная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, измеримое по $t$ и ограниченное в каждый момент времени:[6]

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2}$$

[6]Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы, ${}^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования, tr — след матрицы, $I$ — единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Класс таких возмущений будем называть *допустимым*. Будем полагать, что система (1) устойчива (матрица $A$ гурвицева), пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0,$$

будем называть *инвариантным* (*по состоянию*) для системы (1), (2), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех $t \geqslant 0$ при всех допустимых внешних возмущениях $w(t)$. Отметим, что из условия управляемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду. Инвариантный эллипсоид для линейной системы является также и *притягивающим*: при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ будет $x(t) \to \mathcal{E}_x$, $t \to \infty$ (при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$), т. е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида $\mathcal{E}_x$, стремится к нему с течением времени.

Таким образом, имеем два подхода к изучению воздействия внешних возмущений на поведение системы:

1) если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, то получаем *равномерную* оценку поведения траекторий системы — в любой момент времени траектории системы принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях;

2) если начальные условия произвольны, то получаем *асимптотическую* оценку поведения траекторий системы — траектории системы будет стремиться к этому эллипсоиду с течением времени при любых допустимых внешних возмущениях.

Если в начальном состоянии системы содержится неопределенность

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то для получения равномерной оценки поведения траекторий потребуем, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_x$, т. е.

$$P \succcurlyeq P_0. \tag{3}$$

С другой стороны, в тех же целях, в случае непосредственного задания начального условия $x_0 \neq 0$, потребуем, чтобы $x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0 \leqslant 1$; это условие по лемме Шура представимо в виде LMI

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^{\mathrm{T}} \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \tag{4}$$

При необходимости ограничения (3) или (4) добавляются в качестве дополнительного условия в формулировках последующих результатов.

В упоминавшихся выше работах С. Бойда и Дж. Абедора установлена

**Теорема 1.** *Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ является инвариантным для системы* (1), (2) *тогда и только тогда, когда его матрица $P$ удовлетворяет LMI*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0$$

*при некотором $\alpha > 0$.*

В диссертационной работе получено доказательство этого результата, основанное на принципиально иной технике. В ней существенно используется модифицированный вариант $S$-теоремы — с двумя ограничениями[7]. Основная идея доказательства состоит в построении квадратичной функции Ляпунова, обладающей необходимыми свойствами против всех допустимых внешних возмущений.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В нашем случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи представляют интерес минимальные в некотором смысле эллипсоиды $\mathcal{E}_z$, содержащие выход $z$.

Нетрудно видеть, что если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид с матрицей $P$, то выход $z = Cx$ системы (1) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \Big\{ z \in \mathbb{R}^l : \quad z^{\mathrm{T}}(CPC^{\mathrm{T}})^{-1}z \leqslant 1 \Big\}. \tag{5}$$

В случае одномерного выхода ($l = 1$) этот эллипсоид является полосой

$$\mathcal{E}_z = \Big\{ z \in \mathbb{R} : \quad |z| \leqslant \sqrt{CPC^{\mathrm{T}}} \Big\},$$

в которой будет находиться выход $z$ системы.

Эллипсоид (5) будем называть *ограничивающим* (*по выходу*). В качестве критерия его минимальности выберем линейный критерий следа

$$f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

который соответствует сумме квадратов полуосей эллипсоида $\mathcal{E}_z$. Это позволит свести проблему к стандартной задаче SDP.

Итак, степень влияния $L_\infty$-ограниченных внешних возмущений $w$ на выход системы $z$ сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (5), минимального по критерию (6). В частности, для скалярного выхода оценивается максимальное по модулю значение $z$. Из теоремы 1 вытекает

[7] *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1998. Vol. 99. P. 553–583.

**Следствие 1.** *Минимальный по критерию* (6) *ограничивающий эллипсоид системы* (1), (2) *принадлежит однопараметрическому семейству, порожденному матрицами* $P(\alpha)$, *удовлетворяющими уравнению Ляпунова*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7}$$

*на интервале* $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, *где* $\lambda_i(A)$ — *собственные значения матрицы* $A$. *При этом функция* $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}$ *строго выпукла на указанном интервале.*

Следствие 1 позволяет при поиске минимального ограничивающего эллипсоида ограничиться рассмотрением однопараметрического семейства (7), что сводит задачу к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале.

Обратимся к задаче синтеза. Для компенсации влияния ограниченных внешних возмущений на выход динамической системы введем статический регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию. Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \tag{8}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

Целью является нахождение регулятора $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{9}$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида выхода) подавляет воздействие внешних возмущений $w$. Отметим, что мы ограничиваемся только такими линейными обратными связями и не рассматриваем, например, релейные управления.

Наличие компоненты $B_2 u$ в выходе системы (8) позволяет рассмотреть более общую постановку задачи: одновременно с минимизацией выхода избежать появления больших значений управления. Альтернативой этому подходу является явное введение ограничения на величину управления; этот подход будет освещен ниже.

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче SDP и одномерной минимизации.

**Теорема 2.** *Решение* $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ *задачи минимизации*

$$\mathrm{tr}[CPC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2YC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min \tag{10}$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1Y + (B_1Y)^{\mathrm{T}} & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{11}$$

*где минимизация проводится по матричным переменным* $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *и скалярному параметру* $\alpha$, *определяет матрицу* $C\widehat{P}C^{\mathrm{T}} + C\widehat{Y}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}C^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}B_2^{\mathrm{T}}$ *минимального ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (8), (2) *и статический регулятор по состоянию* $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$, *оптимально подавляющий внешние возмущения.*

Таким образом, исходная задача синтеза статического регулятора по состоянию (9), оптимально (в смысле следа ограничивающего эллипсоида по выходу системы) подавляющего внешние возмущения в системе (8), (2), эквивалентна полученной задаче (10)–(11), т. е. условия теоремы 2 являются необходимыми и достаточными. При фиксированном $\alpha$ данная задача представляет собой задачу SDP, которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации.

Нетрудно видеть, что

$$\|u_{\max}\| \leqslant \max_{x^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x\leqslant 1} \|\widehat{K}x\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,\widehat{K}\widehat{P}\widehat{K}^{\mathrm{T}}}.$$

В рамках данного подхода к подавлению внешних возмущений естественно потребовать введения ограничений на управление. Пусть

$$\|u(t)\| \leqslant \mu, \quad \mu > 0. \tag{12}$$

Следующая лемма сохраняет свою силу и в дискретном случае.

**Лемма 1.** *Ограничение* (12) *для системы* (8), (2) *гарантируется выполнением LMI*

$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где* $P$ *— матрица инвариантного эллипсоида системы, а* $Y = KP$.

В процессе доказательства теоремы 2 строится функция Ляпунова $V(x)$ для замкнутой системы, такая, что $\dot{V}(x) \leqslant 0$ при $V(x) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$. Естественно задаться целью найти ограниченное внешнее возмущение $\widetilde{w}(t)$, максимизирующее $\dot{V}(x)$ (т. н. *“наихудшее” возмущение*). Ответ дает

**Лемма 2.** *Наихудшее возмущение $\widetilde{w}(t)$ для системы* (8), (2) *задается формулой*
$$\widetilde{w}(t) = \frac{D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t)}{\|D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t)\|}.$$
*В частности, если возмущение одномерно, то* $\widetilde{w}(t) = \operatorname{sign}\bigl(D^{\mathrm{T}} \widehat{P}^{-1} x(t)\bigr)$.

В качестве критерия можно выбрать норму матрицы ограничивающего эллипсоида по выходу замкнутой системы, т. е. минимизировать радиус шара, содержащего этот эллипсоид. Такая постановка задачи также допускает решение в терминах LMI и SDP. Соответствующий аналог теоремы 2 может быть получен добавлением к условиям теоремы LMI
$$CPC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} + B_2 Y C^{\mathrm{T}} + B_2 Z B_2^{\mathrm{T}} \preccurlyeq \lambda I$$
и заменой (10) на минимизацию по скалярной переменной $\lambda$.

Вместо евклидовых ограничений (2) на допустимые возмущения можно наложить *интервальные* ограничения
$$|w_i(t)| \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$
При такой постановке получено субоптимальное решение задачи в терминах LMI и SDP. Соответствующий аналог теоремы 2 получается заменой первого из ограничений (11) на
$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^{\mathrm{T}} & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\operatorname{diag}\{\beta_1 \;\; \ldots \;\; \beta_m\} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$
с добавлением ограничения
$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \leqslant \alpha,$$
где $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — скалярные переменные.

Во втором разделе рассматривается дискретная система
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k \end{aligned} \tag{13}$$
с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению
$$\|w_k\| \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$
Будем полагать, что система (13) устойчива (матрица $A$ шуровская), пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \left\{x_k \in \mathbb{R}^n\colon \quad x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0,$$

будем называть *инвариантным (по состоянию)* для дискретной динамической системы (13), (14), если из условия $x_0 \in \mathcal{E}_x$ следует $x_k \in \mathcal{E}_x$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ при всех допустимых внешних возмущениях $w_k$. Матрицу $P$ будем называть матрицей эллипсоида $\mathcal{E}_x$.

Как и в непрерывном случае, инвариантный эллипсоид также является и притягивающим, т.е. при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ будет $x_k \to \mathcal{E}_x$, $k \to \infty$ (при этом, возможно, $x_k \in \mathcal{E}_x$ при $k \geqslant K$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$).

Дискретным аналогом теоремы 1 является

**Теорема 3.** *Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ является инвариантным для динамической системы* (13), (14) *тогда и только тогда, когда его матрица $P$ удовлетворяет LMI*

$$\frac{1}{\alpha} A P A^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} D D^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0$$

*при некотором $\alpha \in (0, 1)$.*

Как и в непрерывном случае, если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид с матрицей $P$, то выход $z_k = C x_k$ системы (13) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z_k \in \mathbb{R}^m\colon \quad z_k^{\mathrm{T}} (C P C^{\mathrm{T}})^{-1} z_k \leqslant 1\right\},$$

который будем называть *ограничивающим (по выходу).*

Из теоремы 3 вытекает

**Следствие 2.** *Минимальный по критерию* (6) *ограничивающий эллипсоид системы* (13), (14) *принадлежит однопараметрическому семейству, порожденному матрицами $P(\alpha)$, удовлетворяющими дискретному уравнению Ляпунова*

$$\frac{1}{\alpha} A P A^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} D D^{\mathrm{T}} = 0 \tag{15}$$

*на интервале $\rho^2(A) < \alpha < 1$, где $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$ — спектральный радиус матрицы $A$. При этом функция $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} C P(\alpha) C^{\mathrm{T}}$ строго выпукла на указанном интервале.*

Таким образом, как и в непрерывном случае, поиск минимального ограничивающего эллипсоида сводится к задаче одномерной выпуклой минимизации среди однопараметрического семейства, порожденного уравнением (15).

Обратимся к задаче синтеза для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B_1 u_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k + B_2 u_k \end{aligned} \tag{16}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u_k \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (14); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

Требуется найти регулятор $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k, \tag{17}$$

обеспечивающий минимальный по критерию (6) размер ограничивающего эллипсоида.

Дискретным аналогом теоремы 2 для системы (16), (14) является

**Теорема 4.** *Решение $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr}[CPC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2YC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & (AP+B_1Y)^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ и скалярному параметру $\alpha$, определяет матрицу $C\widehat{P}C^{\mathrm{T}} + C\widehat{Y}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}C^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}B_2^{\mathrm{T}}$ минимального ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (16), (14) *и статический регулятор по состоянию $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$, оптимально подавляющий внешние возмущения.*

Как и в непрерывном случае, условия теоремы 4 являются необходимыми и достаточными. При этом $\|u_{k\max}\| \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}\widehat{K}\widehat{P}\widehat{K}^{\mathrm{T}}}$.

В ходе доказательства теоремы 4 строится функция Ляпунова $V(x_k)$ для замкнутой системы, такую, что $V(x_{k+1}) \leqslant 1$ при $V(x_k) \leqslant 1$ и $w_k^{\mathrm{T}}w_k \leqslant 1$. Естественно найти ограниченное внешнее возмущение $\widetilde{w}_k$, максимизирующее $V(x_{k+1})$ (*"наихудшее" возмущение*). Ответ дает следующая лемма, являющаяся дискретным аналогом леммы 2.

**Лемма 3.** *Для линейной дискретной системы* (16), (14) *одномерное наихудшее возмущение $\widetilde{w}_k$ задается формулой*

$$\widetilde{w}_k = \operatorname{sign}\bigl(D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}(A + B_1\widehat{K})x_k\bigr).$$

В третьем разделе рассматриваются примеры. Первый — задача минимизации перерегулирования (или всплеска). Рассмотрим систему ($n = 10$)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w.$$

Если в соответствии с традиционными методами расчета регуляторов выби-

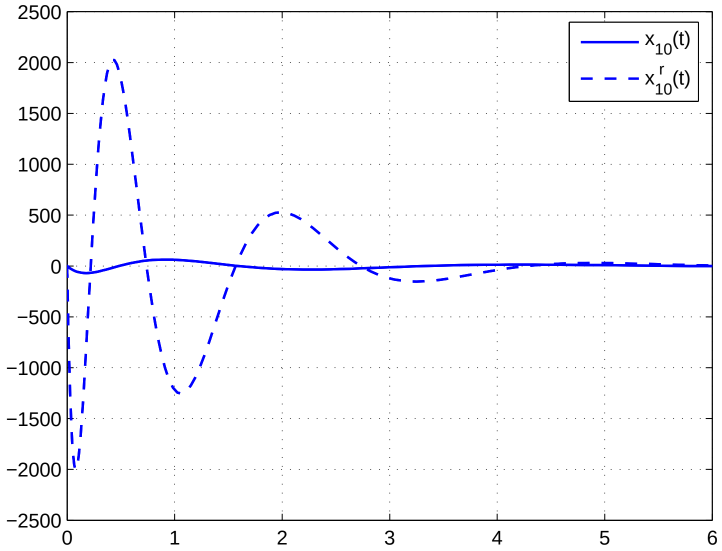


Рис. 1.

рать стабилизирующий регулятор $K_{\mathrm{r}}$ таким образом, чтобы у характеристического полинома замкнутой системы все корни были равны всего лишь $-2$, то оказывается, что коэффициенты усиления в цепи обратной связи превышают $1.5 \cdot 10^4$. Более того, при $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ (и единичном внешнем возмущении) компонента $x_{10}(t)$ решения $x(t)$ замкнутой системы достигает значения $\approx 2030$, т. е. начальное значение возрастает более, чем в 2000 раз, прежде, чем начать убывать. С другой стороны, минимизируя выход $z = \begin{pmatrix} u & x_{10} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ системы при ограничении $P \prec 5000I$ на фазовое состояние, с помощью теоремы 2 был построен оптимальный регулятор $\widehat{K}$ с компонентами $|\widehat{K}_i| \leqslant 250$, при котором $\max\limits_t |x_{10}(t)| \leqslant 70$, а $\max\limits_t |u(t)| \leqslant 970$. При этом $\max\limits_i \max\limits_t |x_i(t)| \leqslant 130$. На рис. 1 при начальном состоянии $x_0$ и единичном внешнем возмущении построены две траектории — $x_{10}(t)$, соответствующая регулятору $\widehat{K}$ (сплошной линией), и $x^{\mathrm{r}}_{10}(t)$, соответствующая регулятору $K_{\mathrm{r}}$ (пунктиром).

Второй пример — задача управления двойным осциллятором, т. е. системой из двух твердых тел с массами $m_1$ и $m_2$, соединенных пружиной с коэффициентом упругости $k$, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня. Она часто рассматривается в качестве модельной для различных методов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумные размеры. Управляющее воздействие $u$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние ограниченного внешнего возмущения $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, компоненты которого воздействуют на левое и правое тело. Пусть $x_1, v_1$ — координата и скорость левого тела, а $x_2, v_2$ — правого. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1, \\
\dot{x}_2 &= v_2, \\
\dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{1}{m_1}w_1, \\
\dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w_2.
\end{aligned}
$$

В качестве регулируемого выхода системы возьмем вектор $z = \begin{pmatrix} u & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

При единичных параметрах системы с помощью теоремы 2 построен оптимальный регулятор

$$
\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -2.5439 & 0.7907 & -2.4863 & -1.8051 \end{pmatrix}.
$$

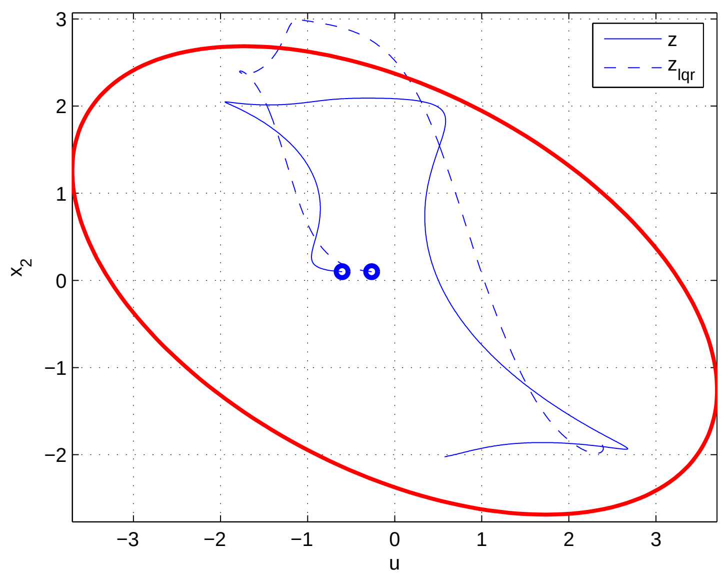


Рис. 2.

На рис. 2 изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс для замкнутой системы с регулятором $\widehat{K}$. На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы $x_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ и наихудшем внешнем возмущении $\widetilde{w}(t)$, определяемым леммой 2, построены две траектории выходной переменной — $z(t)$, соответствующая регулятору $\widehat{K}$ (сплошной линией), и $z_{\mathrm{lqr}}(t)$, соответствующая линейно-квадратичному регулятору $K_{\mathrm{lqr}}$ (с единичными весовыми матрицами), найденному с помощью Control System Toolbox в системе MATLAB (пунктиром). Видно, что траектория замкнутой системы с регулятором $K_{\mathrm{lqr}}$ выходит за пределы ограничивающего эллипсоида, тогда как траектория замкнутой системы с регулятором $\widehat{K}$ в нем остается.

Во **второй главе** рассматривается синтез обратной связи по выходу, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. Поскольку цель диссертации — систематическое использование техники линейных матричных неравенств и сведение задач к формату полуопределенного программирования, то, как и выше, задача синтеза управления по выходу сводится к условиям в виде LMI и задаче SDP. При этом используется оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера.

Первый раздел главы посвящен задаче фильтрации (т. е. оценки состояния динамической системы по измерениям). При случайных возмущениях она допускает исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана, однако, во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным. Часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом случае можно строить гарантированные (а не вероятностные) оценки состояний. В частности, в работах [8] и [9] была развита эллипсоидальная техника фильтрации.

В диссертации рассматривается проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями для линейных стационарных задач, когда все параметры модели не зависят от времени. Более того, ищется оценка состояния такая, что ее ошибка гарантированно заключена в инвариантный эллипсоид для всех моментов времени, т. е. оценка является равномерной. Сам фильтр также ищется в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т. е. удается построить оптимальный фильтр и оценку состояния.

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \tag{18}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, с фазовым состоянием

[8] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
[9] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М., 1988.

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2). Пара $(A, D_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема; чтобы разделить компоненты, порожденные внешними возмущениями в состоянии и выходе системы, потребуем $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние $x$ системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом $y$. Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния $\widehat{x}$, включающим в себя рассогласование выхода $y$ и его прогноза $C\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + L(y - C\widehat{x}).$$

Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица $L$. Эта структура такая же, как в известном *наблюдателе Люенбергера*[10].

Введем в рассмотрение невязку $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, характеризующую точность фильтрации. Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}$, содержащего невязку $e$. Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых уклонениях и равномерная по $t$) точность фильтрации.

Будем искать минимальный инвариантный эллипсоид (существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида следует из условия управляемости) при фиксированном $L$, стабилизирующем систему относительно $e$, а затем минимизируем этот эллипсоид по $L$. По-прежнему удобно считать тот эллипсоид минимальным, у которого минимален след его матрицы. В диссертации установлена следующая

**Теорема 5.** *Решение $\widehat{Q}, \widehat{Y}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr} H \longrightarrow \min \tag{19}$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}Q + QA - YC - (YC)^{\mathrm{T}} + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ (QD_1 - YD_2)^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{20}$$

*где минимизация проводится по матричным переменным $Q = Q^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярному параметру $\alpha$, определяет матрицу $\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}$ минимального инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду оптимальную матрицу фильтра $\widehat{L} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{Y}$ для системы* (18), (2).

[10] *Luenberger D.G.* An introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 35. P. 596–602.

Исходная задача синтеза оптимальной (в смысле следа инвариантного эллипсоида, содержащего невязку) матрицы фильтра для системы (18), (2), эквивалентна полученной задаче (19)–(20), т. е. полученные условия являются необходимыми и достаточными.

В некоторых случаях имеется априорная информация о начальном состоянии системы:

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \Big\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\Big\}.$$

Тогда, выбирая $\widehat{x}(0) = 0$ можно гарантировать, что $e(0) \in \mathcal{E}_0$. Если потребовать, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, то можно гарантировать, что $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t$. Соответственно, если к системе LMI в теореме 5 добавить ограничение $Q \preccurlyeq P_0^{-1}$, то получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности фильтрации.

Нередко нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния $x$, а лишь некоторых. Пусть имеется регулируемый выход $y_1 = C_1 x$ (например, одна из координат состояния) и надо сделать ошибку его оценки

$$e_1 = y_1 - \widehat{y}_1 = C_1(x - \widehat{x})$$

возможно малой; в этом случае второе LMI в (20) заменится на

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида $\mathcal{E}$. Например, можно минимизировать $L_\infty$-норму невязки, т. е. радиус шара, содержащего эллипсоид $\mathcal{E}$. Для этого потребуем $r \to \max$ при дополнительном ограничении $Q \succcurlyeq rI$.

Аналогичные результаты получены для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k \end{aligned} \tag{21}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, с фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (14); пара $(A, D_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема, $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Построим фильтр, описываемый линейным уравнением с постоянной матрицей $L$ относительно оценки состояния $\widehat{x}_k$:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + L(y_k - C\widehat{x}_k).$$

Введем в рассмотрение невязку $e_k = x_k - \widehat{x}_k$; нашей задачей является нахождение такой матрицы $L$, которая обеспечивает минимальность инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}$, содержащего невязку $e_k$. Дискретным аналогом теоремы 5 для системы (21), (14) является

**Теорема 6.** *Решение $\widehat{Q}, \widehat{Y}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr} H \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA - YC)^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -Q & QD_1 - YD_2 \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где минимизация проводится по матричным переменным $Q = Q^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярному параметру $\alpha$, определяет матрицу $\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}$ минимального инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду оптимальную матрицу фильтра $\widehat{L} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{Y}$ для системы* (21), (14).

Во втором разделе главы рассматривается непосредственно синтез статической линейной обратной связи по выходу. Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + D_1 w, \quad x(0) = x_0, \\ y &= C_1 x + D_2 w, \\ z &= C_2 x + B_2 u, \end{aligned} \tag{22}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, управлением $u \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C_1)$ наблюдаема, $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние $x$ системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом $y$. Задачей является нахождение субоптимального эллипсоида, содержащего выход $z$. По-прежнему будем рассматривать инвариантные эллипсоиды как характеристику влияния внешних возмущений на траектории системы, в данном случае — на вектор выхода $z$; в этой связи будем интересоваться ограничивающими эллипсоидами по выходу $z$.

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, содержащим рассогласование выхода $y$ и его прогноза $C_1\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + B_1 u + L(y - C_1\widehat{x}).$$

При этом обратная связь строится с помощью динамического регулятора

$$u = K\widehat{x}.$$

Условия следующей теоремы являются достаточными, т. е. приводящими к субоптимальным решениям.

**Теорема 7.** *Решение* $\widehat{P}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Z}_1, \widehat{H}$ *задачи минимизации*

$$\operatorname{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^{\mathrm{T}} + B_2Y_1C_2^{\mathrm{T}} + C_2Y_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2Z_1B_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} Z & Y_2C_1 & 0 & Y_2D_2 \\ * & A^{\mathrm{T}}Q_2 + Q_2A + \alpha Q_2 - Y_2C_1 - (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} & Q_2D_1 & -Y_2D_2 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -(AP_1 + P_1A^{\mathrm{T}} + \alpha P_1 + B_1Y_1 + (B_1Y_1)^{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где минимизация проводится по матричным переменным* $P_1 = P_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярном параметре* $\alpha$, *определяет динамический регулятор* $\widehat{K} = \widehat{Y}_1\widehat{P}_1^{-1}$, *матрицу наблюдателя* $\widehat{L} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}_2$ *и матрицу* $C_2(\widehat{P}_1 + \widehat{H})C_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}_1C_2^{\mathrm{T}} + C_2\widehat{Y}_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}_1B_2^{\mathrm{T}}$ *соответствующего ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы* (22), (2).

Аналогичные результаты получены для линейной дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + D_1w_k, \\ y_k &= C_1x_k + D_2w_k, \\ z_k &= C_2x_k + B_2u_k \end{aligned} \tag{23}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, с фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (14); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C_1)$ наблюдаема, $D_1D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние $x_k$ системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом $y_k$. Задача заключается в нахождении субоптимального эллипсоида, содержащего выход $z_k$. В диссертации установлен дискретный аналог теоремы 7; ее условия также являются достаточными.

**Теорема 8.** *Решение* $\widehat{P}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Z}_1, \widehat{H}$ *задачи минимизации*

$$\mathrm{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^{\mathrm{T}} + B_2Y_1C_2^{\mathrm{T}} + C_2Y_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2Z_1B_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} Z & Y_2C_1 & Y_2D_2 & 0 \\ * & \Lambda_1 & \Lambda_2 & (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} \\ * & * & \Lambda_3 & (Y_2D_2)^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -Q_2 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -\frac{1}{\alpha}(AP_1A^{\mathrm{T}} + B_1Y_1A^{\mathrm{T}} + AY_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + B_1Z_1B_1^{\mathrm{T}}) + P_1 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где*

$$\Lambda_1 = A^{\mathrm{T}}Q_2A - A^{\mathrm{T}}Y_2C_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}A - \alpha Q_2,$$
$$\Lambda_2 = A^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - A^{\mathrm{T}}Y_2D_2,$$
$$\Lambda_3 = D_1^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - D_1^{\mathrm{T}}Y_2D_2 - (1-\alpha)I,$$

*а минимизация проводится по матричным переменным* $P_1 = P_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярном параметре* $\alpha$, *определяет динамический регулятор* $\widehat{K} = \widehat{Y}_1\widehat{P}_1^{-1}$, *матрицу наблюдателя* $\widehat{L} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}_2$ *и матрицу* $C_2(\widehat{P}_1 + \widehat{H})C_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}_1C_2^{\mathrm{T}} + C_2\widehat{Y}_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}_1B_2^{\mathrm{T}}$ *соответствующего ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы* (23), (14).

Предложенный подход продемонстрирован на примере задачи управления двойным осциллятором. В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем $y = \begin{pmatrix} x_1 + w_3 & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, содержащий возмущение $w_3$, а в качестве регулируемого — вектор $z = \begin{pmatrix} u & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Вектор возмущений $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ предполагается удовлетворяющим ограничению (2). С помощью теоремы 7 был найден регулятор

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -1.6072 & 0.2759 & -1.9126 & -1.3343 \end{pmatrix}$$

и фильтр

$$\widehat{L} \approx \begin{pmatrix} 1.2681 & 0.1369 \\ 0.2667 & 1.1859 \\ 0.6422 & 0.3744 \\ 0.2206 & 0.8480 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, построив динамический $H_\infty$-регулятор с помощью Robust Control Toolbox в системе MATLAB, имеем: $\max\limits_i \mathrm{Re}\,\lambda_i(A_c) \approx -0.0114$,

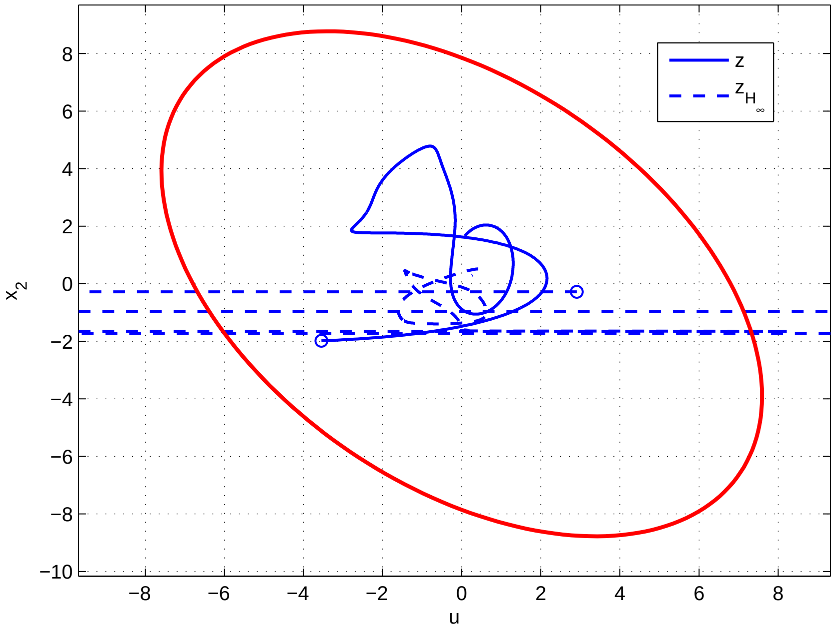


Рис. 3.

где $A_c$ — замкнутая матрица системы с $H_\infty$-регулятором, т. е. замкнутая система получилась слабо устойчивой.

На рис. 3 изображен найденный ограничивающий эллипс для замкнутой системы с регулятором $\widehat{K}$. На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и некотором внешнем возмущении построены две траектории выходной переменной — $z(t)$, соответствующая регулятору $\widehat{K}$ (сплошной линией) и $z_{H_\infty}$, соответствующая $H_\infty$-регулятору (пунктиром). Видно, что траектория замкнутой системы с $H_\infty$-регулятором выходит за пределы ограничивающего эллипсоида — происходит выброс далеко за его пределы (например, при $t = 0.02$ имеем $z_1(t) = u(t) \approx -3118$), тогда как траектория замкнутой системы с регулятором $\widehat{K}$ в нем остается.

**Третья глава** посвящена робастным вариантам рассмотренных задач. В ее первом разделе рассматриваются различные обобщения и модификации т. н. *леммы Питерсена*[11] о робастной матричной знакоопределенности, которая часто привлекается при решении задач квадратичной устойчивости, построении робастно квадратично стабилизирующих регуляторов, в робастной LQR-задаче и др. Полученные обобщения леммы используются при доказательстве утверждений данной главы. Условия, получающиеся при их использовании, являются *достаточными*, т. е. приводящими к *субоптимальным* решениям. Одно важных обобщений леммы Питерсена представляет

[11] *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain systems // Systems and Control Letters. 1987. Vol. 8. P. 351–357.

**Лемма 4.** *Пусть* $G = G^{\mathrm{T}}$, $M_1, \dots, M_r$ *и* $N_1, \dots, N_r$ *— матрицы соответствующих размерностей,* $\gamma_1, \dots, \gamma_r > 0$. *Тогда если*

$$\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r > 0\colon \quad G + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \bigl(\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i\bigr) \preccurlyeq 0,$$

*то* $\forall \Delta_i\colon \|\Delta_i\| \leqslant \gamma_i$ *или* $\|\Delta_i\|_F \leqslant \gamma_i$, $i = 1, \dots, m$, *выполняется*

$$G + \sum_{i=1}^{r} \bigl(M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}}\bigr) \preccurlyeq 0.$$

Во втором разделе исследуется робастный вариант задачи синтеза оптимального управления с помощью статической линейной обратной связи по состоянию. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \bigl(A + \Delta A(t)\bigr)x + \bigl(D + \Delta D(t)\bigr)w, \quad x(0) = x_0, \\ &z = Cx, \end{aligned} \tag{24}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системные неопределенности $\Delta A(t), \Delta D(t)$ имеют структуру

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta D(t) = F_D \Delta_D(t) H_D,$$

где $F_A, F_D, H_A, H_D$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_A(t), \Delta_D(t)$ удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta(t)\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta(t)\|_F \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{25}$$

Будем полагать, что матрица $A$ устойчива, пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Условия (25) являются достаточно естественной формой задания неопределенностей системы; неопределенности такой структуры часто возникают в разнообразных технических системах. Заметим, что при $\Delta_A(t) = \Delta_D(t) = 0$ система (24) обращается в систему без неопределенностей (1). Робастным аналогом теоремы 1 является

**Теорема 9.** *Эллипсоид* $\mathcal{E}_x$ *является инвариантным для динамической системы* (24), (2), (25), *если его матрица* $P$ *удовлетворяет LMI*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 F_D F_D^{\mathrm{T}} & D & PH_A^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & H_D^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \tag{26}$$

*при некоторых* $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений $w$ и матричных неопределенностей $\Delta_A(t), \Delta_D(t)$ на выход системы $z$. В этой связи будем искать минимальный в смысле критерия (6) ограничивающий эллипсоид $\mathcal{E}_z$, содержащий выход системы $z$. Соответственно, минимизируя $\operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}$ при ограничении (26) по матричной переменной $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, скалярным переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и скалярному параметру $\alpha$, можно описать общий вид семейства инвариантных эллипсоидов и минимизировать след ограничивающего эллипсоида по выходу $z$ системы (24).

Аналогичные результаты получены для линейной дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A_k)x_k + (D + \Delta D_k)w_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{27}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (14), системные неопределенности $\Delta A_k, \Delta D_k$ имеют структуру

$$\Delta A_k = F_A \Delta_{Ak} H_A, \quad \Delta D_k = F_D \Delta_{Dk} H_D,$$

где $F_A, F_D, H_A, H_D$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_{Ak}, \Delta_{Dk}$ удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta_k\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta_k\|_F \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{28}$$

Будем полагать, что матрица $A$ устойчива, пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Заметим, что при $\Delta_A(t) = \Delta_D(t) = 0$ система (27) обращается в систему без неопределенностей (13). Робастным аналогом теоремы 3 и дискретным аналогом теоремы 9 является

**Теорема 10.** *Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ является инвариантным для динамической системы* (27), (14), (28), *если его матрица $P$ удовлетворяет LMI*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^{\mathrm{T}} & 0 & PH_A^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -P + \varepsilon_1 F_A F_A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 F_D F_D^{\mathrm{T}} & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & H_D^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \tag{29}$$

*при некоторых $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.*

Задача по-прежнему состоит в оценке степени влияния внешних возмущений $w_k$ и матричных неопределенностей $\Delta_{Ak}, \Delta_{Dk}$ на вектор выхода $z_k$. В этой связи нас будут интересовать нахождение минимального в смысле критерия (6) ограничивающего эллипсоида $\mathcal{E}_z$, содержащего выход системы $z_k$. Как и в непрерывном случае, минимизируя $\operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}$ при ограничении (29) по матричной переменной $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, скалярным переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и скалярному параметру $\alpha$, можно описать общий вид семейства инвариантных эллипсоидов и минимизировать след ограничивающего эллипсоида по выходу $z_k$ системы (27).

Обратимся к задаче синтеза оптимального управления. Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \big(A + \Delta A(t)\big)x + \big(B_1 + \Delta B_1(t)\big)u + \big(D + \Delta D(t)\big)w, \quad x(0) = x_0,\\ &z = Cx + B_2 u, \end{aligned} \tag{30}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системные неопределенности $\Delta A(t), \Delta B_1(t), \Delta D(t)$ имеют структуру

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta B_1(t) = F_{B_1}\Delta_{B_1}(t) H_{B_1}, \quad \Delta D(t) = F_D \Delta_D(t) H_D,$$

где $F_A, F_{B_1}, F_D, H_A, H_{B_1}, H_D$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_A(t), \Delta_{B_1}(t), \Delta_D(t)$ удовлетворяют ограничению (28); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

Целью является нахождение регулятора $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию (9), который стабилизирует замкнутую систему и, в смысле минимальности следа инвариантного эллипсоида выхода, подавляет воздействие внешних возмущений $w$. Робастным аналогом теоремы 2 для системы (30), (2), (28) является

**Теорема 11.** *Решение $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr}[CPC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2YC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^{\mathrm{T}} & (H_{B_1}Y)^{\mathrm{T}} & 0\\ * & -\alpha I & 0 & 0 & H_D^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

*где*

$$\Omega = AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1Y + (B_1Y)^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 F_A F_A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 F_{B_1}F_{B_1}^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 F_D F_D^{\mathrm{T}},$$

*а минимизация проводится по матричным переменным* $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *скалярным переменным* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *и скалярному параметру* $\alpha$, *определяет матрицу* $C\widehat{P}C^{\mathrm{T}} + C\widehat{Y}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}C^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}B_2^{\mathrm{T}}$ *ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (30), (2), (28) *и статический регулятор по состоянию* $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$.

В рамках данного подхода к робастному подавлению внешних возмущений можно также потребовать введения ограничений на управление, при этом лемма 1 сохраняет свою силу; установлен робастный аналог леммы 2.

Аналогичные результаты получены для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A_k)x_k + (B_1 + \Delta B_{1k})u_k + (D + \Delta D_k)w_k,\\ z_k &= Cx_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u_k \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (14), системные неопределенности $\Delta A_k, \Delta B_{1k}, \Delta D_k$ имеют структуру

$$\Delta A_k = F_A \Delta_{Ak} H_A, \quad \Delta B_{1k} = F_{B_1}\Delta_{B_1 k} H_{B_1}, \quad \Delta D_k = F_D \Delta_{Dk} H_D,$$

где $F_A, F_{B_1}, F_D, H_A, H_{B_1}, H_D$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_{Ak}, \Delta_{B_1 k}, \Delta_{Dk}$ удовлетворяют ограничению (28); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

Требуется найти регулятор $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию (17), который стабилизирует замкнутую систему и, в смысле минимальности следа инвариантного эллипсоида выхода, подавляет воздействие внешних возмущений $w_k$. В диссертации установлен дискретный аналог теоремы 11 (и, соответственно, робастный аналог теоремы 4), а также робастный аналог леммы 3.

В третьем разделе главы исследуется робастный вариант задачи фильтрации. Установлен робастный аналог теоремы 5 для непрерывной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big(A + \Delta A(t)\big)x + \big(D_1 + \Delta D_1(t)\big)w,\\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — наблюдаемый выход, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), а системные неопределенности $\Delta A(t), \Delta D_1(t)$ имеют структуру

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta D_1(t) = F_{D_1}\Delta_{D_1}(t) H_{D_1},$$

где $F_A, F_{D_1}, H_A, H_{D_1}$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, матричные неопределенности $\Delta_A(t), \Delta_{D_1}(t)$ удовлетворяют ограничению (28); пара $(A, D_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема, $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

В том же объеме рассмотрен случай дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A_k)x_k + (D_1 + \Delta D_{1k})w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным состоянием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние, $y_k \in \mathbb{R}^l$ — наблюдаемый выход, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (14), системные неопределенности $\Delta A_k, \Delta D_{1k}$ имеют структуру

$$\Delta A_k = F_A \Delta_{Ak} H_A, \quad \Delta D_{1k} = F_{D_1} \Delta_{D_1 k} H_{D_1},$$

где $F_A$, $F_{D_1}$, $H_A$, $H_{D_1}$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_{Ak}, \Delta_{D_1 k}$ удовлетворяют ограничению (28); пара $(A, D_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема, $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

В четвертом разделе главы рассматривается проблема построения нехрупкого регулятора. Впервые проблема хрупкости стабилизирующего регулятора для управляемых систем была поднята С. Бхаттачарией и Л. Килем в работе [12]. На разнообразных примерах было показано, что даже при малом изменении параметров регулятора оптимальная система может стать неустойчивой (такие регуляторы были названы “хрупкими”).

Рассмотрим линейную непрерывную систему (8), (2). *Нехрупкий регулятор* $K$ ищется в форме статической линейной обратной связи по состоянию (9) таким образом, чтобы возмущенный регулятор $K + \Delta_K(t)$ при всех $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K$ стабилизировал замкнутую систему и, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу, подавлял воздействие внешних возмущений. Величина $\gamma_K$ определяет размер *области нехрупкости* регулятора $K$. Точнее, ищется $K$, такое чтобы для любых возмущений параметров регулятора $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K$ при любых допустимых внешних возмущениях $w$ гарантировать малость выхода $z$ в смысле критерия (6). В диссертации установлена следующая

**Теорема 12.** *Решение* $\widehat{R}, \widehat{P}, \widehat{Y}$ *задачи* $\operatorname{tr} R \longrightarrow \min$ *при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^{\mathrm{T}} + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

[12] *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, fragile, or optimal? // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. Vol. 42. P. 1098–1105.

$$\begin{pmatrix} -R+\gamma_K^2\varepsilon_2 B_2 B_2^{\mathrm{T}} & -CP-B_2Y & 0 \\ * & -P & P \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

*где минимизация проводится по матричным переменным* $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *скалярным переменным* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *и скалярному параметру* $\alpha$, *определяет матрицу* $\widehat{R}$ *ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (8), (2) *и статический регулятор по состоянию* $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$, *стабилизирующий систему с запасом нехрупкости* $\gamma_K$.

В приведенной постановке задачи число $\gamma_K$ задано; если оно слишком велико, может оказаться, что система неравенств неразрешима — нельзя стабилизировать систему с таким запасом нехрупкости.

Дискретным аналогом теоремы 12 для системы (16), (14) является

**Теорема 13.** *Решение* $\widehat{R}, \widehat{P}, \widehat{Y}$ *задачи* $\operatorname{tr} R \longrightarrow \min$ *при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & (AP+B_1Y)^{\mathrm{T}} & 0 & P \\ * & -P+\gamma_K^2\varepsilon_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} -R+\gamma_K^2\varepsilon_2 B_2 B_2^{\mathrm{T}} & -CP-B_2Y & 0 \\ * & -P & P \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

*где минимизация проводится по матричным переменным* $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *скалярным переменным* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *и скалярному параметру* $\alpha$, *определяет матрицу* $\widehat{R}$ *ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (16), (14) *и статический регулятор по состоянию* $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$, *стабилизирующий систему с запасом нехрупкости* $\gamma_K$.

Аналогичные результаты получены для непрерывной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big(A+\Delta A(t)\big)x + B_1 u + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системная неопределенность $\Delta A(t)$ имеет структуру

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A,$$

где $F_A, H_A$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричная неопределенность $\Delta_A(t)$ удовлетворяет соотношению $\|\Delta_A(t)\| \leqslant \gamma_A$; пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

В том же объеме в диссертации рассмотрен случай дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A_k)x_k + B_1 u_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием $x_0$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u_k \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (14), системная неопределенность $\Delta A_k$ имеет структуру $\Delta A_k = F_A \Delta_{Ak} H_A$, где $F_A, H_A$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричная неопределенность $\Delta_{Ak}$ удовлетворяет ограничению $\|\Delta_{Ak}\| \leqslant \gamma_A$; пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема.

В **заключении** диссертации подведены итоги проведенных исследований и изложены основные выводы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработан метод синтеза оптимального управления с помощью статической линейной обратной связи по состоянию для непрерывных и дискретных линейных динамических систем, подверженных воздействию ограниченных внешних возмущений. Исходные задачи сведены к эквивалентным условиям в виде линейных матричных неравенств и задаче полуопределенного программирования.

2. Предложен метод решения задачи фильтрации (оценки состояния динамической системы по измерениям) для непрерывных и дискретных динамических систем с ограниченными внешними возмущениями. Построен оптимальный фильтр и найдена равномерная оценка состояния.

3. Разработан способ подавления ограниченных внешних возмущений для непрерывных и дискретных линейных динамических систем с помощью линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя. При этом используется оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера.

4. Предложен способ построения нехрупкого (т. е. допускающего вариации параметров) регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию для подавления ограниченных внешних возмущений в непрерывных и дискретных линейных динамических системах на основе метода инвариантных эллипсоидов и техники линейных матричных неравенств.

5. Разработаны методы решения робастных вариантов задач синтеза оптимального управления с помощью линейной обратной связи по состоянию, задачи фильтрации, а также задачи построения нехрупкого регулятора для непрерывных и дискретных линейных динамических систем, подверженных воздействию ограниченных внешних возмущений.

6. Введено понятие "наихудшего" внешнего возмущения и матричной неопределенности и получены соотношения для их определения в непрерывном и дискретном случае.

7. Доказательства полученных утверждений основываются на новой технике, использующей модифицированный вариант $S$-процедуры — с двумя ограничениями.

8. Предложенные подходы опробованы на разнообразных тестовых задачах.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


1. Хлебников М.В. Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. 2010. №4. С. 106–119.

2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Подавление неслучайных ограниченных возмущений в линейных управляемых системах: управление по выходу // XVI Международная конференция по автоматическому управлению "Автоматика–2009". Черновцы, Украина, 22–25 сентября 2009 г. Тезисы докладов. Черновцы: Книги–XXI, 2009. С. 44–45.

3. Хлебников М.В. Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // Сборник тезисов XII Международной научно-технической конференции "Моделирование, идентификация и синтез систем управления". Канака, Украина, 16–23 сентября 2009 г. Донецк: ИПММ, 2009. С. 51–52.

4. Хлебников М.В. Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2009. №1. С. 147–161.

5. Поляк Б.Т., Топунов[13] М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. №5. С. 72–90.


[13]Топунов — прежняя фамилия М.В. Хлебникова.

6. Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Extensions of Petersen's lemma on matrix uncertainty // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 11385–11390.

7. Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 15349–15352.

8. Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Invariant ellipsoids approach to robust rejection of persistent disturbances // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3976–3981.

9. Polyak B.T., Nazin S.A., Khlebnikov M.V. The invariant ellipsoids technique for analysis and design of linear control systems // Advances in Mechanics: Dynamics and Control / Eds. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow: Nauka, 2008. P. 239–246.

10. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Robust rejection of exogenous disturbances via invariant ellipsoids technique // Advances in Mechanics: Dynamics and Control / Eds. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow: Nauka, 2008. P. 247–254.

11. Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Ramifications of Petersen's lemma of uncertain matrices // Advances in Mechanics: Dynamics and Control / Eds. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow: Nauka, 2008. P. 296–302.

12. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 418. №6. С. 749–753.

13. Хлебников М.В., Щербаков П.С. Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 125–139.

14. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Линейная задача управления с ограниченными внешними возмущениями: новый подход // Труды VIII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем". Н. Новгород, 22–26 сентября 2008 г. Н. Новгород: Нижегородский госуд. ун-т, 2008. С. 273–278.

15. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов: управление по выходу // IX Крымская международная математическая школа "Метод

функций Ляпунова и его приложения”. Алушта, Украина, 15–20 сентября 2008 г. Тезисы докладов. Симферополь: Таврический нац. ун-т, 2008. С. 140–141.

16. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. №3. С. 106–125.

17. Топунов М.В. Обобщения леммы Питерсена о матричной знакоопределенности // Материалы XIV Международной конференции по автоматическому управлению “Автоматика–2007”. Севастополь, Украина, 10–14 сентября 2007 г. Севастополь: СНУЯЭиП, 2007. С. 64–65.

18. Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Optimal control of a mechanical two-mass-spring system using invariant ellipsoids technique // The 3rd International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2007). Potsdam, Germany, September 3–7, 2007. Abstract collection. Universitätsverlag Potsdam, 2007. P. 179.

19. Топунов М.В. Новые методы в линейной задаче управления с ограниченными внешними возмущениями // II школа-семинар “Управление большими системами”. Воронеж, 9–12 июля 2007 г. Воронеж: Научная книга, 2007. С. 58–63.

20. Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Optimal stabilization of uncertain system via invariant ellipsoids approach // Lyapunov Memorial Conference (LMC2007). Kharkiv, Ukraine, June 24–30, 2007. P. 149–150.

21. Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Ramification of Petersen’s lemma on uncertain matrices // The 14th International Workshop on Dynamics and Control. Zvenigorod, May 28 – June 2, 2007. Abstracts. P. 66.

22. Polyak B.T., Nazin S.A., Topunov M.V. The invariant ellipsoids technique for analysis and design of linear control systems // The 14th International Workshop on Dynamics and Control. Zvenigorod, May 28 – June 2, 2007. Abstracts. P. 58.

23. Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V. Robust rejection of exogenous disturbances via invariant ellipsoids technique // The 14th International Workshop on Dynamics and Control. Zvenigorod, May 28 – June 2, 2007. Abstracts. P. 59.

24. Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных

внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3. / Под ред. О.Н. Граничина. СПб: С.-Петерб. госуд. ун-т, 2007. С. 51–84.

25. Топунов М.В. О классе $\mu$-коммутативных билинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2006. №6. С. 113–125.

26. Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A. Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'06). San Diego, USA, December 13–15, 2006. P. 1429–1434.

27. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений на примере задачи о двойном маятнике // IX Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" им. Е.С. Пятницкого. Москва, 31 мая – 2 июня 2006 г. Тезисы докладов. М.: ИПУ РАН, 2006. С. 213–214.

28. Топунов М.В. Достаточное условие вложенности множеств достижимости двух гладких управляемых систем постоянного ранга, линейных по фазовым переменным // Автоматика и телемеханика. 2005. №12. С. 114–124.

29. Топунов М.В. О выпуклости множества достижимости гладкой управляемой системы, линейной по фазовым переменным // Автоматика и телемеханика. 2004. №11. С. 79–85.

30. Топунов М.В. О выпуклости множества достижимости квазикоммутативной билинейной системы // Автоматика и телемеханика. 2003. №8. С. 44–53.

31. Топунов М.В. О выпуклости множества достижимости билинейной управляемой системы // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 752–758.

В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора состоит в следующем: в [2, 5, 7, 12, 14, 15, 27] автору принадлежат доказательства теорем и численные расчеты; в [6, 11, 13, 20, 21] автору принадлежит постановка задачи; в [8, 10, 18, 23, 24] автору принадлежат доказательства теорем; в [9, 16, 22, 26] автору принадлежат формулировки теорем на языке линейных матричных неравенств.