

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. А.Г. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НЕГРУБОСТИ¹

Исследуются системы с малыми запасами устойчивости по фазе и модулю (негрубые системы). Получены условия для корней и коэффициентов характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой негрубой системы. Используя эти условия найдены границы областей размещения полюсов модального управления, обеспечивающего грубость системы.

1. Введение

В исследованиях по анализу устойчивости систем управления при параметрических возмущениях можно выделить два направления.

В первом направлении, которому посвящена эта работа, используются запасы устойчивости по фазе (φ) и модулю (L) [1], которые определяются на основе параметрически невозмущенной системы. Запасы устойчивости, которые могут быть определены экспериментально, как правило, проверяются при проектировании и испытаниях систем управления [2]. Малые их значения по сравнению с допустимыми ($\varphi \geq 45^\circ$, $L \geq 2$) являются признаком того, что система может потерять устойчивость при малых отклонениях параметров объекта от расчетных значений.

Во втором направлении возмущения описываются заданным множеством возможных значений параметров объекта управления, и если система сохраняет устойчивость при всех параметрах из этого множества, то она называется робастно устойчивой. Часто это множество описывается интервалами возможных значений параметров и ищутся оценки границ этих интервалов. Большое число работ и, в частности, монографии [3–4] посвящены этому направлению. Однако ответ на вопрос, является ли система робастно устойчивой, сталкивается с серьезными трудностями.

На качественном уровне связь этих направлений выражается в том, что малые запасы устойчивости по сравнению с допустимыми являются признаком того, что интервалы робастной устойчивости пренебрежимо малы по сравнению с номинальными значениями параметров.

В этой работе рассматриваются системы, запасы устойчивости которых меньше допустимых. Такие системы называются негрубыми. Задача состоит в том, чтобы найти соотношения для корней и коэффициентов характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой негрубой системы. Полученные соотношения названы алгебраическими условиями негрубости. Для них найдены границы областей размещения полюсов модального управления, обеспечивающего грубость системы.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-08-01177 и проект № 05-01-00114).

2. Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему, описываемую уравнениями

$$(1) \quad y^{(n)} + \bar{d}_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \bar{d}_0y = \bar{k}_m u^{(m)} + \dots + \bar{k}_0u, \quad m < n,$$

$$(2) \quad u^{(n_c)} + \bar{g}_{n_c-1}u^{(n_c-1)} + \dots + \bar{g}_0u = \bar{r}_{m_c}y^{(m_c)} + \dots + \bar{r}_0y, \quad m_c \leq n_c,$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (1), $u(t)$ – управление, формируемое регулятором (2), коэффициенты системы имеют вид

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{d}_i &= d_i + \Delta d_i, & \bar{k}_j &= k_j + \Delta k_j, & \bar{g}_p &= g_p + \Delta g_p, \\ \bar{r}_q &= r_q + \Delta r_q, & i &= \overline{0, n-1}, & j &= \overline{0, m}, & p &= \overline{0, n_c}, & q &= \overline{0, m_c}, \end{aligned}$$

где d_i, k_j, g_p, r_q ($i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m}, p = \overline{0, n_c}, q = \overline{0, m_c}$) – известные числа, называемые номинальными (расчетными) значениями коэффициентов системы, $\Delta d_i, \Delta k_j, \Delta g_p, \Delta r_q, i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m}, p = \overline{0, n_c}, q = \overline{0, m_c}$ – неизвестные числа (параметрические возмущения).

Параметрически невозмущенная система записывается как

$$(4) \quad d(s)y = k(s)u,$$

$$(5) \quad g(s)u = r(s)y,$$

где $d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i, k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^i, g(s) = \sum_{i=0}^{n_c} g_i s^i, r(s) = \sum_{i=0}^{m_c} r_i s^i, s$ – символ дифференцирования либо символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях. Ее характеристический полином записывается как

$$(6) \quad \psi(s) = d(s)g(s) - k(s)r(s) = s^{n_s} + \sum_{i=0}^{n_s-1} \psi_i s^i.$$

Характеристический полином разомкнутой системы, являющийся произведением характеристических полиномов объекта (4) и регулятора (5), имеет вид

$$(7) \quad \varphi(s) = d(s)g(s) = s^{n+n_c} + \sum_{i=0}^{n+n_c-1} \varphi_i s^i,$$

а соответствующая передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$(8) \quad w(s) = -\frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)}.$$

Предполагается, что числитель и знаменатель этой функции не имеют общих корней.

Запасы по фазе и модулю определяются по передаточной функции (8). Их допустимые значения (в частности, $\varphi = 45^\circ, L = 2$) получены эмпирически на основе многолетнего опыта проектирования и эксплуатации систем автоматического управления. Они являются неким постулатом теории автоматического управления.

Передаточная функция возвратной разности системы

$$(9) \quad v(s) = [1 + w(s)] = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}$$

служит для определения радиуса (r) запасов устойчивости системы:

$$(10) \quad r^2 = \inf_{0 \leq \omega \leq \infty} v(-j\omega)v(j\omega).$$

Радиус запасов устойчивости является обобщением понятий запасов устойчивости по фазе и модулю. Так, если $r = 0,75$, то запас по фазе $\varphi = 42^\circ$, запас по модулю $L = 1,75$. При $r = 1$ $\varphi = 60^\circ$, $L = 2$.

Заметим, что выражение (10) дает также “радиус запасов устойчивости” неустойчивой системы, и поэтому далее при использовании этого выражения подразумеваются только асимптотически устойчивые системы.

Определение 1. Система (1), (2) называется негрубой, если для ее радиуса запасов устойчивости выполняется неравенство

$$(11) \quad r < r^*,$$

где $r^* = 0,75$, и грубой, когда

$$(12) \quad r \geq r^*.$$

Неравенство (11) является частотным условием негрубости, так как для его проверки необходимы частотные характеристики системы.

Условия для корней и коэффициентов полиномов $\psi(s)$ и $\varphi(s)$, при которых выполняются неравенства (11), будем называть алгебраическими условиями негрубости.

Задача состоит в том, чтобы найти такие условия.

3. Условия негрубости системы

Запишем характеристические полиномы (6), (7) как

$$(13) \quad \varphi(s) = \prod_{i=1}^{a_1} (s + s_i) \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} (s^2 + 2\xi_i s_i s + s_i^2), \quad s_i > 0, \quad i = \overline{a_1+1, a_1+a_2},$$

$$a_1 + 2a_2 = n + n_c,$$

$$(14) \quad \psi(s) = \prod_{i=1}^{a_3} (s + p_i) \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} (s^2 + 2\zeta_i p_i s + p_i^2), \quad p_i > 0, \quad i = \overline{a_3+1, a_3+a_4},$$

$$a_3 + 2a_4 = n_s,$$

где ξ_i , $i = \overline{a_1+1, a_1+a_2}$, и ζ_j , $j = \overline{a_3+1, a_3+a_4}$ – декременты затухания, абсолютные значения которых меньше единицы.

Корни этих полиномов, обозначаемые как \tilde{s}_i , $i = \overline{1, n+n_c}$ и \tilde{p}_j , $j = \overline{1, n_s}$, имеют вид

$$(15) \quad \tilde{s}_i = -s_i, \quad i = \overline{1, a_1},$$

$$\tilde{s}_{a_1+2i-1} = \left(-\xi_{a_1+i} - j\sqrt{1 - \xi_{a_1+i}^2} \right) s_{a_1+i}, \quad \tilde{s}_{a_1+2i} =$$

$$= \left(-\xi_{a_1+i} + j\sqrt{1 - \xi_{a_1+i}^2} \right) s_{a_1+i}, \quad i = \overline{1, a_2},$$

$$(16) \quad \tilde{p}_i = -p_i, \quad i = \overline{1, a_3},$$

$$\tilde{p}_{a_3+2i-1} = \left(-\zeta_{a_3+i} - j\sqrt{1 - \zeta_{a_3+i}^2} \right) p_{a_3+i}, \quad \tilde{p}_{a_3+2i} =$$

$$= \left(-\zeta_{a_3+i} + j\sqrt{1 - \zeta_{a_3+i}^2} \right) p_{a_3+i}, \quad i = \overline{1, a_4}.$$

Нетрудно видеть, что

$$(17) \quad \begin{aligned} |\tilde{s}_{a_1+2i-1}| &= |\tilde{s}_{a_1+2i}| = |s_{a_1+i}|, & (i = \overline{1, a_2}), \\ |\tilde{p}_{a_3+2i-1}| &= |\tilde{p}_{a_3+2i}| = |p_{a_3+i}|, & i = \overline{1, a_4}. \end{aligned}$$

Сформируем с учетом выражений (13)–(17) самосопряженную функцию возвратной разности

$$(18) \quad \begin{aligned} v(-j\omega)v(j\omega) &= \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{\varphi(-j\omega)\varphi(j\omega)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{a_3} (\omega^2 + p_i^2) \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} [\omega^4 - 2p_i^2(1 - 2\xi_i^2)\omega^2 + p_i^4]}{\prod_{i=1}^{a_1} (\omega^2 + s_i^2) \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} [\omega^4 - 2s_i^2(1 - 2\xi_i^2)\omega^2 + s_i^4]}. \end{aligned}$$

Рассмотрим системы, у которых степень полинома $\psi(s)$ удовлетворяет неравенству

$$(19) \quad n_s < n + n_c.$$

Такие системы возникают при равенстве коэффициентов при старших степенях полиномов $d(s)g(s)$ и $k(s)r(s)$ выражения для характеристического полинома системы, которые взаимно уничтожаются, что приводит к неравенству (19).

Утверждение 1. Если для степеней характеристических полиномов выполняется неравенство (19), то система (1), (2) является негрубой: $r = 0$.

Доказательство. При условии (19) из выражения (18) следует, что при $\omega = \infty$

$$(20) \quad v(-j\infty)v(j\infty) = 0$$

и поэтому $r = 0$.

Далее будем полагать

$$(21) \quad n_s = n + n_c.$$

Ниже приводятся утверждения 2–5, которые дают достаточные условия негрубости. Это означает, что если ни одно из них не выполняется, то нельзя сделать заключение о грубости или негрубости системы.

*Утверждение 2. Если произведение квадратов модулей корней замкнутой системы в r^{*2} раз меньше аналогичного произведения корней разомкнутой системы:*

$$(22) \quad \prod_{i=1}^{a_3} \tilde{p}_i^2 \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} |\tilde{p}_i|^4 < r^{*2} \prod_{i=1}^{a_1} \tilde{s}_i^2 \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} |\tilde{s}_i|^4,$$

то система (1), (2) является негрубой: $r < r^$.*

Доказательство. При $\omega = 0$ функция (18) принимает значение

$$(23) \quad |v(j0)|^2 = \frac{\prod_{i=1}^{a_3} p_i^2 \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} p_i^4}{\prod_{i=1}^{a_1} s_i^2 \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} s_i^4},$$

которое с учетом равенств (17) доказывает утверждение.

Рассмотрим полиномы с комплексными корнями, входящими в числитель функции (18),

$$(24) \quad q_i(\omega^2) = (\omega^4 - 2p_{a_3+i}^2(1 - 2\zeta_{a_3+i}^2)\omega^2 + p_i^4), \quad i = \overline{1, a_4}.$$

Каждый из этих полиномов достигает минимума на частотах

$$(25) \quad \omega_i = p_{a_3+i}(1 - 2\zeta_{a_3+i}^2)^{1/2}, \quad i = \overline{1, a_4}.$$

В частности, на частоте ω_1

$$(26) \quad |v(j\omega_1)|^2 = \frac{4\zeta_{a_3+1}^2 p_{a_3+1}^4 (1 - \zeta_{a_3+1}^2) \prod_{i=1}^{a_3} (\omega_1^2 + p_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1} (\omega_1^2 + s_i^2)} \frac{\prod_{i=a_3+2}^{a_3+a_4} (\omega_1^4 - 2p_i^2(1 - 2\zeta_i^2)\omega_1^2 + p_i^4)}{\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} (\omega_1^4 - 2s_i^2(1 - 2\zeta_i^2)\omega_1^2 + s_i^4)}.$$

Из этого выражения следует, что всегда существует число $\zeta_{a_3+1}^*$ такое, что $|v(j\omega_1)| < r^*$. Аналогично находим числа $\zeta_{a_3+i}^*$, $i = \overline{2, a_4}$.

Таким образом доказано следующее.

Утверждение 3. Если характеристические полиномы системы не имеют общих комплексных корней:

$$(27) \quad \tilde{p}_i \neq \tilde{s}_k, \quad k = \overline{a_1+1, a_1+a_2}, \quad i = \overline{a_3+1, a_3+a_4}$$

и для декрементов затухания замкнутой системы выполняется хотя бы одно из неравенств

$$(28) \quad \zeta_{a_3+i} < \zeta_{a_3+i}^*, \quad i = \overline{1, a_4},$$

то система (1), (2) является негрубой: $r < r^$.*

Пусть характеристический полином разомкнутой системы содержит доминирующий коэффициент, который определяется следующим образом.

Определение 2. Коэффициент φ_f , $f \in \overline{0, n_s}$ называется доминирующим, если

$$(29) \quad \frac{|\varphi_i|}{|\varphi_f|} \leq \eta, \quad \frac{|\psi_j|}{|\varphi_f|} \leq \eta, \quad f \in \overline{0, n_s}, \quad 0 < \eta < 1, \\ i = 0, 1, \dots, f-1, f+1, \dots, n_s, j = 0, \dots, n_s,$$

где φ_i и ψ_i , $i = \overline{1, n_s}$ – коэффициенты полиномов $\varphi(s) = \sum_0^{n_s} \varphi_i s^i$ и $\psi(s) = \sum_0^{n_s} \psi_i s^i$.

Введем понятие степени доминирования.

Для этого запишем самосопряженные характеристические полиномы.

$$(30) \quad a(\omega^2) = \psi(-j\omega)\psi(j\omega) = \sum_{p=0}^{n_s} a_{2p}\omega^{2p}, \quad b(\omega^2) = \varphi(-j\omega)\varphi(j\omega) = \sum_{p=0}^{n_s} b_{2p}\omega^{2p},$$

где

$$(31) \quad a_{2p} = \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p} \psi_i \psi_j, \quad b_{2p} = \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p} \varphi_i \varphi_j, \quad \sigma_p = \{i, j: i+j=2p, i, j \in \overline{0, n_s}\}.$$

Введем числа

$$(32) \quad c_a = \sum_0^{n_s} a_{2p}, \quad c_b = \sum_0^{n_s} b_{2p}.$$

Определение 3. Число

$$(33) \quad \rho_f = \frac{c_a}{c_b}, \quad f \in \overline{0, n_s}$$

называется степенью доминирования коэффициента φ_f , $f \in \overline{0, n_s}$.

Утверждение 4. Если для степени доминирования коэффициента φ_f , $f \in \overline{0, n_s}$ характеристического полинома разомкнутой системы выполняется неравенство

$$(34) \quad \rho_f < r^{*2}, \quad f \in \overline{0, n_s},$$

то система является негрубой: $r < r^*$.

Доказательство. Самосопряженная функция возвратной разности с учетом выражений (30) принимает вид

$$(35) \quad v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{\varphi(-j\omega)\varphi(j\omega)} = \frac{\sum_{p=0}^{n_s} a_{2p}\omega^{2p}}{\sum_{p=0}^{n_s} b_{2p}\omega^{2p}}.$$

При $\omega = 1$ получим равенство

$$(36) \quad v(-1j)v(1j) = \frac{c_a}{c_b}.$$

Из определения 3 и неравенства (34) следует

$$(37) \quad v(-1j)v(1j) = \rho_f < r^{*2}.$$

Поэтому $r^2 < r^{*2}$ и, таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристический полином разомкнутой системы содержит доминирующий корень.

Утверждение 5. Если корни характеристических полиномов вещественные и удовлетворяют условиям

$$(38) \quad |\tilde{p}_i| > |\tilde{s}_i|, \quad i = \overline{1, n_s - 1}, \quad |\tilde{s}_{n_s}| > |\tilde{p}_{n_s}| > \max(|\tilde{p}_1|, \dots, |\tilde{p}_{n_s-1}|)$$

и при этом

$$(39) \quad |\tilde{s}_{n_s}| > \frac{\sqrt{2^{n_s}}|\tilde{p}_{n_s}|}{r^*},$$

то система (1), (2) является негрубой: $r < r^*$.

Доказательство. Функция (18) записывается для вещественных корней как

$$(40) \quad |v(j\omega)|^2 = \frac{(\omega^2 + p_{n_s}^2) \prod_{i=1}^{n_s-1} (\omega^2 + p_i^2)}{(\omega^2 + s_{n_s}^2) \prod_{i=1}^{n_s-1} (\omega^2 + s_i^2)}.$$

При $\omega = p_{n_s}$ эта функция принимает значение

$$(41) \quad |v(jp_{n_s})|^2 = \frac{2p_{n_s}^2 \prod_{i=1}^{n_s-1} (p_{n_s}^2 + p_i^2)}{(p_{n_s}^2 + s_{n_s}^2) \prod_{i=1}^{n_s-1} (p_{n_s}^2 + s_i^2)}.$$

Из (38) следуют неравенства

$$\prod_{i=1}^{n_s-1} (p_{n_s}^2 + p_i^2) \leq 2^{(n_s-1)} p_{n_s}^{2(n_s-1)},$$

$$\prod_{i=1}^{n_s-1} (p_{n_s}^2 + s_i^2) \geq p_{n_s}^{2(n_s-1)},$$

используя которые, получим соотношения

$$(42) \quad |v(jp_{n_s})|^2 \leq \frac{2^{n_s} p_{n_s}^2}{p_{n_s}^2 + s_{n_s}^2} \leq \frac{2^{n_s} p_{n_s}^2}{s_{n_s}^2},$$

и тогда неравенство (39) утверждения следует из выражения

$$(43) \quad \frac{2^{n_s} p_{n_s}^2}{s_{n_s}^2} < r^{*2}.$$

4. Свойства систем с регуляторами по состоянию

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему с регулятором по состоянию

$$(44) \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad u = kx,$$

где $x(t) \in R^n$ – измеряемый вектор состояния объекта, матрица A и вектора b и k известны.

Эти уравнения нетрудно представить как следующий частный случай системы (4) и (5):

$$(45) \quad d(s)y = u, \quad u = r(s)y,$$

где $y(t)$ – известная линейная функция измеряемого вектора состояний, $d(s) = \det(Is - A)$.

Характеристический полином системы и ее передаточная функция имеют вид

$$(46) \quad \psi(s) = \det(Is - A + bk) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i s^i, \quad w(s) = -k(Is - A)^{-1}b,$$

где I – единичная матрица. Они связаны известным выражением

$$(47) \quad \psi(s) = d(s)(1 + w(s)),$$

которое нетрудно получить, если преобразовать уравнения (44) по Лапласу и найти определитель матрицы полученных уравнений, состоящей из четырех блоков.

Самосопряженная функция возвратной разности имеет в рассматриваемом случае, когда $\varphi(s) = d(s)$ и $n_s = n$, вид

$$(48) \quad v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)}.$$

Определение 4. Если для корней системы и объекта выполняются условия

$$(49) \quad \tilde{p}_i = \tilde{s}_i \alpha, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha > 0,$$

то будем называть управление по состоянию замедляющим, если $\alpha < 1$, и ускоряющим, когда $\alpha > 1$.

Эти названия связаны с тем, что в случае вещественных, некратных корней характеристических полиномов системы и объекта, параметр α является масштабом времени протекающих в них процессов. Так, при $\alpha < 1$ процессы в системе протекают в α раз медленнее, чем в объекте, а при $\alpha > 1$ – в α раз быстрее.

Свойство 1. Управление по состоянию не может замедлить процессы в объекте с параметром

$$(50) \quad \alpha = (r^*)^{\frac{1}{n_s}}$$

без потери грубости.

Доказательство. Оно является простым следствием утверждения 2. Действительно, подставляя выражения (49) в условие (22), получим условие (50) для параметра α

$$(51) \quad \alpha^{2n_s} \leq r^{*2}.$$

Свойство 2. Всегда существует ускоряющее управление по состоянию.

Доказательство. Будем искать вектор k такой, чтобы выполнялось тождество

$$(52) \quad \psi(s) = \mu(s),$$

где $\mu(s)$ – полином степени n с заданными отрицательными корнями:

$$(53) \quad \mu(s) = \prod_{i=1}^n (s + m_i), \quad m_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$$

такими, что

$$(54) \quad m_i > |\tilde{s}_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выражение (48) принимает при условии (52) вид

$$(55) \quad |v(j\omega)|^2 = \frac{\prod_{i=1}^n (\omega^2 + m_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1} (\omega^2 + s_i^2) \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} (\omega^4 - 2s_i(1 - 2\zeta_i^2)\omega^2 + s_i^4)}.$$

Так как $(\omega^4 - 2s_i(1 - 2\zeta_i^2)\omega^2 + s_i^4) \leq (\omega^4 + s_i^4)$, то для всех ω

$$(56) \quad |v(j\omega)|^2 \geq \frac{\prod_{i=1}^n (\omega^2 + m_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1} (\omega^2 + s_i^2) \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} (\omega^4 + s_i^4)} \geq 1.$$

Свойство 2 было получено в [6] для случая, когда число комплексных полюсов полинома $\mu(s)$ равно числу комплексных корней характеристического полинома объекта.

Свойство 3. Управление по состоянию не может обеспечить динамику системы, сколь угодно близкую к колебательной границе устойчивости, без потери ее грубости.

Доказательство. Оно следует из утверждения 3.

5. Модальное управление

5.1. Управление по состоянию. Области негрубого модального управления

Рассмотрим систему (44), вектор k которой найден из тождества (52), где $\mu(s) = \sum_{i=1}^n \mu_i s^i$ – модальный полином с заданными вещественными отрицательными корнями (полюсами, модами) $\tilde{m}_i = -m_i$, $i = \overline{1, n}$.

Из доказательства свойства 2 следует

Утверждение 6. Для того чтобы система (44) с модальным управлением была грубой, достаточно выбрать полюса модального полинома из условий

$$(57) \quad |\tilde{m}_i| > |\tilde{s}_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следствием утверждений 2 и 4 является следующее.

Утверждение 7. Если корни \tilde{m}_i , $i = \overline{1, n}$ модального полинома $\mu(s)$ таковы, что выполняется неравенство

$$(58) \quad \prod_{i=1}^{a_3} \tilde{m}_i^2 \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} |\tilde{m}_i|^4 < r^{*2} \prod_{i=1}^{a_1} \tilde{s}_i^2 \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} |\tilde{s}_i|^4, \\ a_1 + 2a_2 = a_3 + 2a_4 = n,$$

либо степень доминирования любого из коэффициентов модального полинома

$$(59) \quad \rho_f < r^{*2},$$

где

$$(60) \quad \rho_f = \frac{c_a}{c_b}, \quad f \in \overline{0, n}, \quad c_a = \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p} \mu_i \mu_j, \quad c_b = \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p} d_i d_j, \\ \sigma_p = \{i, j : i + j = 2p, i, j = \overline{0, n_s}\},$$

то система (1), (2) является негрубой: $r < r^$.*

Неравенства (58) и (60) выделяют области коэффициентов модального полинома, при которых модальное управление приводит к негрубой системе.

5.2. Управление по выходу

Рассмотрим систему (4), (5)

$$(61) \quad d(s)y = k(s)u, \quad g(s)u = r(s)y,$$

регулятор которой находится с помощью тождества Безу:

$$(62) \quad d(s)g(s) - k(s)r(s) = e(s)\mu(s),$$

где полином $e(s) = \prod_{i=1}^n (e_i \eta s + 1)$ служит для обеспечения условия ($m_c \leq n_c$) реализуемости регулятора, e_i , $i = \overline{1, n-1}$ – заданные положительные числа, η – достаточно малое положительное число, такое, что $(e_i \eta)^{-1} > \max(m_1, \dots, m_n)$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим частный случай структуры полинома $k(s)$ объекта, когда $m = 0$.

Утверждение 8. Если полином объекта $k(s) = k_0$, а корни полинома $\mu(s)$ удовлетворяют неравенствам (54), в котором \tilde{s}_i – корни полинома $d(s)$, то существует достаточно малое положительное число η такое, что система (61) является грубой: $r > r^$.*

Доказательство. Самосопряженная функция возвратной разности имеет вид

$$(63) \quad v(-s)v(s) = \frac{e(-s)e(s)\mu(-s)\mu(s)}{g(-s)g(s)d(-s)d(s)}.$$

В Приложении доказано следующее свойство тождества Безу: если полином объекта $k(s) = k_0$, а число η достаточно мало, то полином регулятора равен

$$(64) \quad g(s) = e(s) + 0(\eta, s),$$

где $0(\eta, s)$ – полином с коэффициентами, исчезающими вместе с η .

Подставляя это выражение в (63), заключаем на основе свойства 2 о грубости системы.

6. Ограничения полинома, формирующего все множество стабилизирующих регуляторов

Множество всех регуляторов, стабилизирующих объект (1), описывается [3] передаточной функцией

$$(65) \quad w_c(s) = \frac{r^0(s) - d(s)q(s)}{g^0(s) - k(s)q(s)},$$

в которой полиномы $r^0(s)$ и $g^0(s)$ находятся как решение тождества Безу

$$(66) \quad d(s)g^0(s) - k(s)r^0(s) = \mu(s),$$

где $\mu(s) = \sum_{i=0}^{n_\mu} \mu_i s^i$ – полином, чьи корни имеют отрицательные вещественные части,

а $q(s) = \sum_{i=0}^{n_q} q_i s^i$ – произвольный полином.

Для этих регуляторов функция возвратной разности имеет вид

$$(67) \quad v(s) = \frac{\mu(s)}{d(s)[g^0(s) - k(s)q(s)]}.$$

Пусть полином $\mu(s)$ задан. Требование грубости системы накладывает следующие ограничения на выбор коэффициентов полинома $q(s)$.

Из утверждения 1 следует ограничение на степень n_q полинома $q(s)$:

$$(68) \quad n_q \leq n_\mu - n - m.$$

Утверждение 2 ограничивает величину свободного коэффициента этого полинома:

$$(69) \quad (g_0^0 - k_0 q_0)^2 \leq \frac{\mu_0}{r^{*2} d_0^2}.$$

В соответствии с утверждением 5 коэффициенты полинома $q(s)$ не должны быть доминирующими. Для обеспечения этого требования достаточно проверить неравенство $\rho_f > r^{*2}$, в котором степень доминирования ρ_f вычисляется на основе полиномов $\psi(s) = \mu(s)$, а коэффициенты полинома $\varphi(s)$ находятся как коэффициенты знаменателя выражения (67):

$$(70) \quad \begin{aligned} \varphi_r &= \sum_{\sigma_1} d_i \left[g_j^0 - \sum_{\sigma_2} k_i q_s \right], \quad r = \overline{0, n_\mu}, \\ \sigma_1 &= \{i, j : i + j = r, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n_\mu - n}\}, \\ \sigma_2 &= \{i, s : i + s = j, i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n_q}\}. \end{aligned}$$

7. Примеры

Рассмотрим два примера негрубого модального управления по состоянию.

Эти примеры показывают, что если выполнено одно из достаточных условий негрубости утверждения 7, то система может терять асимптотическую устойчивость при недопустимо малых относительных изменениях параметров объекта управления (один процент в первом примере и половина процента во втором).

Пример 1. Рассмотрим объект управления

$$(71) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u,$$

где $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$. Корни его характеристического полинома: $\tilde{s}_1 = -1$, $\tilde{s}_2 = 2$.

Модальный полином с параметрами

$$(72) \quad m_1 = 0,1, \quad m_2 = 0,2$$

имеет вид

$$(73) \quad \mu(s) = (s + m_1)(s + m_2) = s^2 + 0,3s + 0,02.$$

Нетрудно видеть, что выполняются неравенства (58).

Модальное управление имеет вид

$$(74) \quad u = -2,02x_1 - 1,3x_2.$$

(Запас устойчивости системы (71), (74): $r = 0,0101$.)

Запишем эту систему как

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 = -1,3\dot{x}_1 - 2,02x_1.$$

Из этого выражения следует, что при параметрических возмущениях объекта, когда его коэффициент a_{21} отличается от расчетного (номинального) значения на 1%: $\bar{a}_{21} = a_{21} + 0,02$, система теряет асимптотическую устойчивость.

Пример 2. Пусть коэффициенты объекта (71) равны:

$$(75) \quad a_{21} = 0,01, \quad a_{22} = 50.$$

Характеристический полином объекта $\varphi(s) = s^2 + 50s + 0,01$.

Модальный полином имеет вид (73).

Нетрудно видеть, что коэффициент $\varphi_1 = 50$ является доминирующим, а степень его доминирования, определяемая по формулам (60), $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-4}$.

Модальное управление:

$$(76) \quad u = -0,01x_1 + 49,7x_2.$$

(Запас устойчивости системы (71), (75), (76): $r = 0,0062$.)

Запишем эту систему как

$$\ddot{x}_1 + 50\dot{x}_1 + 0,012x_1 = 49,7\dot{x}_1 - 0,01x_1.$$

Из этого выражения следует, что при параметрических возмущениях объекта, когда его коэффициент a_{22} отличается от расчетного (номинального) значения на 0,5%: $\bar{a}_{22} = a_{22} + 0,35$, система теряет асимптотическую устойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойство решений тождества Безу

Введем полином

$$(П.1) \quad \nu(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (e_i \eta s + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i s^i = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\nu}_i \eta^i s^i,$$

в котором коэффициенты $\tilde{\nu}_i$, $i = \overline{1, n-1}$ определяются заданными числами e_i , $i = \overline{1, n-1}$.

При $m = 0$ тождество (62) принимает вид

$$(П.2) \quad \left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i \right) \sum_{i=0}^{n-1} g_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i s^i \right) \left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i s^i \right).$$

Сравнивая в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях s , получим систему уравнений

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n d_i g_{n+j-i} &= \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{n+j-i}, \quad j = \overline{0, n-1}, \\ r_p &= \sum_{i=0}^n d_i g_{p-i} - \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{n+j-i}, \quad p = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую подсистему. Нетрудно видеть, что

$$\text{при } j = n-1: \sum_{i=0}^n d_i g_{2n-1-i} = \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{2n-1-i} \text{ и, следовательно, } g_{n-1} = \nu_{n-1};$$

$$\text{при } j = n-2: g_{n-2} = \nu_{n-2} - \sum_{i=0}^n d_i g_{2n-2-i} - \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{2n-2-i} = \nu_{n-2} - d_{n-2} \nu_{n-1} + \mu_{n-1} \nu_{n-1} \text{ и т.д.}$$

Учитывая, что $\nu_i = \tilde{\nu}_i \eta^i$, $i = \overline{0, n-1}$, получим

$$(П.4) \quad g_0 = 1 + 0_{g_0}(\eta), \quad g_j = \tilde{\nu}_j \eta^j + 0_{g_j}(\eta), \quad j = \overline{1, n-1},$$

где $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{0_{gj}(\eta)}{\eta^j} = 0$, $j = \overline{0, n-1}$.

Аналогично запишем выражения второй подсистемы.

$$\text{При } p = n - 1: r_{n-1} = \sum_{i=0}^n d_i g_{n-1-i} - \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{n-1-i} = d_{n-1} g_0 - \mu_{n-1} \nu_0 + d_{n-2} g_1 - \\ - \mu_{n-2} \nu_1 + d_{n-3} g_2 - \mu_{n-3} \nu_2 + \dots + d_0 g_{n-1} - \mu_0 \nu_{n-1};$$

$$\text{при } p = n - 2: r_{n-2} = \sum_{i=0}^n d_i g_{n-2-i} - \sum_{i=0}^n \mu_i \nu_{n-2-i} = d_{n-2} g_0 - \mu_{n-2} \nu_0 + d_{n-3} g_1 - \\ - \mu_{n-3} \nu_1 + \dots + d_0 g_{n-2} - \mu_0 \nu_{n-2}, \text{ и т.д.}$$

$$\text{при } p = 0: r_0 = d_0 g_0 - \mu_0 \nu_0.$$

Из этих выражений следует, что

$$(П.5) \quad r_i = \widehat{r}_i + 0_{ri}(\eta), \quad i = \overline{0, n-1},$$

где $\lim_{\eta \rightarrow 0} 0_{ri}(\eta) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$, и поэтому равенство (64) справедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машгиз, 1954.
2. *Ольденбургер Р.* Изображение частотных характеристик, стандарты и расчетные критерии / Частотные методы в автоматике. М.: ИЛ, 1957.
3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
4. *Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.* Robust Control. The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.
5. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // АиТ. 2007. № 8. С. 4–20.
6. *Честнов В.Н.* Модальное управление одномерными объектами с учетом заданного радиуса запасов устойчивости // Тр. междунар. науч. конф. “Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения” Саратов: СГТУ, 2000. С. 159–164.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 26.01.2009