Автоматика и телемеханика, № 6, 2010

Детерминированные системы

© 2010 г. **А.Г. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРОВ[1]

Предлагается метод синтеза регуляторов линейных объектов при ограниченных кусочно-непрерывных внешних возмущениях.

1. Введение

Проблема синтеза регуляторов – одна из центральных в теории автоматического управления. Первым методом синтеза по прямым показателям точности и качества (установившейся ошибке, времени регулирования, запасам устойчивости) был метод ЛАЧХ [1, 2]. Этот графо-аналитический метод проб и ошибок позволяет синтезировать регуляторы для устойчивых, минимально-фазовых одномерных объектов. Он обеспечивает грубость системы (запасы устойчивости по фазе и модулю). Появление в 1960 г. аналитического конструирования регуляторов (LQ-оптимизации) [3, 4] открыло возможность существенного расширения класса объектов, для которых может быть синтезирован регулятор. В связи с этим начал развиваться аналитический синтез регуляторов [5], в рамках которого были исследованы частотные свойства LQ-оптимальных систем и даны способы выбора структуры и коэффициентов квадратичного функционала, при которых оптимальная система является грубой и обладает требуемыми прямыми показателями при ступенчатых и гармонических типовых воздействиях [6–10].

В [11] рассмотрен более общий случай, когда внешнее возмущение – ограниченная полигармоническая функция с конечным числом неизвестных гармоник. Процедура синтеза использует LQ и H_∞-оптимизацию.

Ниже аналитический синтез регуляторов развивается для случая, когда внешнее возмущение – неизвестная ограниченная кусочно-непрерывная функция.

Заметим, что l_1-оптимальное управление [12, 13] позволяет построить регулятор для дискретного объекта, который обеспечивает наименьшую ошибку регулирования при неизвестном ограниченном возмущении. Однако такой регулятор может не обеспечивать грубость и необходимое быстродействие системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$
\begin{gathered}
y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + d_0 y = k_\gamma u^{(\gamma)} + \ldots + k_0 u + m_\eta f^{(\eta)} + \ldots + m_0 f, \\
\gamma < n, \quad \eta < n, \quad m_0 \neq 0, \quad t \geqslant 0,
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$
g_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + r_0 y, \tag{2.2}
$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-08-01177).

в которых $y(t)$ и $u(t)$ – измеряемые выходы объекта (2.1) и регулятора (2.2), $f(t)$ – внешнее возмущение, коэффициенты этих уравнений – числа.

Внешнее возмущение $f(t)$ – ограниченная полигармоническая функция

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin\left(\omega_i^f t + \phi_i^f\right), \tag{2.3}$$

частоты ω_i^f и фазы ϕ_i^f которой неизвестны, а неизвестные амплитуды f_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leqslant f^*, \tag{2.4}$$

где f^* – известное число.

Заметим, что при выполнении этого условия внешнее возмущение ограничено числом f^*:

$$|f(t)| \leqslant f^*. \tag{2.5}$$

Однако при условии (2.5) неравенство (2.4) может нарушаться.

Частным случаем функции возмущения (2.3) является кусочно-непрерывная функция, разложимая в ряд Фурье.

Наряду с уравнениями (2.1) и (2.2) будем использовать их преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях

$$d(s)y = k(s)u + m(s)f, \tag{2.6}$$

$$g(s)u = r(s)y, \tag{2.7}$$

где $d(s) = s^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} d_i s^i$, $k(s) = \sum\limits_{i=0}^{\gamma} k_i s^i$, $m(s) = \sum\limits_{i=0}^{\eta} m_i s^i$, $g(s) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i s^i$, $r(s) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i s^i$.

Установившейся ошибкой будем называть число

$$y_{ss} = \limsup_{t\to\infty} |y(t)|. \tag{2.8}$$

Время регулирования будем характеризовать числом

$$t_{tr} = \min_{1\leqslant i\leqslant 2n-1} |\mathrm{Re} s_i^s|^{-1}, \tag{2.9}$$

где s_i^s $(i = \overline{1, 2n-1})$ – корни характеристического полинома системы (2.1), (2.2):

$$d^s(s) = d(s)g(s) - k(s)r(s). \tag{2.10}$$

Коэффициенты объекта могут незначительно отличаться от известных значений из-за их разброса в пределах технологических допусков на изготовление узлов объекта, из-за старения объекта и т.п. Чувствительность (грубость) системы к таким параметрическим возмущениям будем характеризовать радиусом запасов устойчивости [14] системы.

Радиус запасов устойчивости r определяется выражением

$$r^2 = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} [1 + w(-j\omega)][1 + w(j\omega)], \tag{2.11}$$

где $w(s) = -\dfrac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)}$ – передаточная функция разомкнутой системы (2.1), (2.2).

Геометрически число r – это радиус наибольшего круга с центром в точке $(-1;0)$, в который не заходит годограф Найквиста. Он является обобщением понятий запасов устойчивости по фазе φ_3 и модулю L. Так, если $r = 0{,}75$, то запас по фазе $\varphi_3 \geqslant 45^\circ$, запас по модулю $L \geqslant 1{,}75$. При $r = 1$ выполняются неравенства $\varphi_3 \geqslant 60^\circ$, $L \geqslant 2$.

Будем называть систему (2.1), (2.2) грубой, если $r \geqslant r^*$, где $r^* = 0{,}75$.

Задача 1 (аналитического синтеза регуляторов) *состоит в том, чтобы найти коэффициенты регулятора* (2.2) *такие, чтобы система* (2.1), (2.2) *удовлетворяла требованиям к точности*

$$y_{ss} \leqslant y^*_{ss}, \tag{2.12}$$

времени регулирования

$$t_{tr} \leqslant t^*_{tr} \tag{2.13}$$

и грубости

$$r \geqslant r^*, \tag{2.14}$$

где y^*_{ss} и t^*_{tr} – заданные положительные числа.

3. Существо подхода

Искомый регулятор находится из тождества Безу

$$d(s)g(s) - k(s)r(s) = \delta_0(s), \tag{3.1}$$

в котором гурвицев полином (полином, все корни которого имеют отрицательные вещественные части) $\delta_0(s)$ степени $2n-1$ находится из уравнения

$$\delta_0(-s)\delta_0(s) = k(-s)k(s)[d(-s)d(s) + qp(-s)p(s)], \tag{3.2}$$

где положительное число q и коэффициенты гурвицева полинома $p(s) = s^{n-1} + \sum\limits_{i=0}^{n-2} p_i s^i$ определяются из условий задачи 1. Здесь и далее полагаем, для простоты, что степень полинома $k(s)$:

$$\gamma = n-1. \tag{3.3}$$

Из структуры полинома $\delta_0(s)$, которая следует из уравнения (3.2), заключаем, что корни s_i^k $(i = \overline{1, n-1})$ полинома $k(s)$ должны удовлетворять условию

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n-1} \left|\mathrm{Re} s_i^k\right| \geqslant {t^*_{tr}}^{-1} \tag{3.4}$$

и поэтому далее будем рассматривать объекты, для которых это условие выполняется.

Примечание 1. Полином в правой части уравнения (3.2) является полиномом уравнения для экстремалей функционала

$$I = \int\limits_0^\infty \left[q\left(\tau_0 y^2 + \tau_1 \dot{y}^2 + \ldots + \tau_{n-1} y^{(n-1)2}\right) + \rho_0 u^2 + \rho_1 \dot{u}^2 + \rho_{n-1} u^{(n-1)2}\right] dt, \tag{3.5}$$

чьи коэффициенты являются коэффициентами полиномов

$$(3.6)\qquad \rho(s^2)=\sum_{i=0}^{n-1}\rho_i s^{2i}(-1)^i=k(-s)k(s),\quad \tau(s^2)=\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i s^{2i}(-1)^i=p(-s)p(s).$$

Для исследования точности системы (2.1), (2.2) запишем ее передаточную функцию $T_{yf}(s)$, связывающую выход с внешним возмущением. Эта передаточная функция имеет вид

$$(3.7)\qquad T_{yf}(s)=\frac{g(s)m(s)}{d(s)g(s)-k(s)r(s)}.$$

Ее H_∞ – норма определяется как

$$(3.8)\qquad \|T_{yf}(s)\|=\sup_{0\leqslant\omega<\infty}|T_{yf}(j\omega)|\,.$$

Символ ∞ в обозначении этой нормы здесь и далее опущен.

Почти очевидно (ниже это показано строго), что для выполнения требования (2.12) к точности достаточно, чтобы

$$(3.9)\qquad \|T_{yf}(s)\|\leqslant\frac{y^*_{ss}}{f^*}.$$

Для анализа грубости этой системы запишем функцию ее возвратной разности

$$(3.10)\qquad v(s)=1+w(s)=\frac{d(s)g(s)-k(s)r(s)}{d(s)g(s)}.$$

Из выражения (2.11) следует, что для выполнения требования к грубости достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(3.11)\qquad \inf_{0\leqslant\omega<\infty}v(-j\omega)v(j\omega)\geqslant {r^*}^2.$$

С учетом уравнения (3.1) запишем выражения (3.9) и (3.11) как

$$(3.12)\qquad \left\|\frac{g(s)m(s)}{\delta_0(s)}\right\|\leqslant\frac{y^*_{ss}}{f^*},\quad \inf_{0\leqslant\omega<\infty}\frac{\delta_0(-j\omega)\delta_0(-j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)g(-j\omega)g(j\omega)}\geqslant {r^*}^2.$$

Таким образом, решение задачи 1 сводится к определению параметра q и коэффициентов полинома $p(s)$ из неравенств (3.12) и условия

$$(3.13)\qquad \min_{1\leqslant i\leqslant 2n-1}\left|\mathrm{Re}s_i^\delta\right|\geqslant {t^*_{tr}}^{-1},$$

в котором s_i^δ, $(i=\overline{1,2n-1})$ – корни полинома $\delta_0(s)$.

Ниже при решении задачи 1 будем рассматривать два вида объектов: минимально-фазовые, у которых $k(s)$ – гурвицев полином, и неминимально-фазовые объекты с полиномом $k(s)$, содержащим корни с неотрицательной вещественной частью. Для неминимально-фазовых объектов решения задачи 1 может не существовать, и тогда необходимо найти минимальные числа y_{ss} и t_{tr}, при которых может быть построен регулятор, решающий эту задачу.

4. Минимально-фазовые объекты

Если полином $k(s)$ объекта (2.6) гурвицев, то решение уравнения (3.1) имеет вид

$$g(s) = k(s), \quad r(s) = d(s) - \delta(s), \tag{4.1}$$

где $\delta(s)$ – гурвицев полином, который находится из тождества

$$\delta(-s)\delta(s) = d(-s)d(s) + qp(-s)p(s). \tag{4.2}$$

Характеристический полином системы (2.6), (2.7) с регулятором (4.1) записывается как

$$d^s(s) = \delta_0(s) = k(s)\delta(s). \tag{4.3}$$

В [15] показано, что всегда существует достаточно большое число q такое, что

$$\delta(s) = (s + \sqrt{q})p(s) + 0_1(s, q), \tag{4.4}$$

где $0_1(s, q)$ – полином, чьи коэффициенты исчезают с ростом числа q.

Выберем коэффициенты гурвицева полинома $p(s)$ так, чтобы его корни s_i^p $(i = \overline{1, n-1})$ и параметр q удовлетворяли условиям

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |\mathrm{Re} s_i^p| \geqslant t_{tr}^{*\ -1}, \quad q^{1/2} \geqslant t_{tr}^{*\ -1}, \tag{4.5}$$

тогда с учетом условия (3.4) требование (2.13) к времени регулирования выполняется.

Условия выполнения требования (2.12) к точности дает следующее

У т в е р ж д е н и е 1. *Регулятор* (2.7) *с полиномами* (4.1) *обеспечивает выполнение требования* (2.12) *к точности системы* (2.6), (2.7) *с минимально-фазовым объектом, если в уравнении* (4.2) *параметр* q *удовлетворяет неравенству*

$$q \geqslant \frac{f^{*2}}{y_{ss}^{*2}} \|w_{mp}(s)\|^2, \tag{4.6}$$

в котором $w_{mp}(s) = \dfrac{m(s)}{p(s)}$.

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Для анализа грубости системы запишем на основе (3.10) и (4.3) выражение

$$v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{k(-j\omega)k(j\omega)\delta(-j\omega)\delta(j\omega)}{k(-j\omega)k(j\omega)d(-j\omega)d(j\omega)} = 1 + \frac{p(-j\omega)p(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)} \geqslant 1, \tag{4.7}$$

из которого следует, что построенная система грубая.

Решение задачи 1 носит итерационный характер: вначале, из условия (4.5) определяются коэффициенты полинома $p(s)$, а из неравенств (4.6) и (3.13) – параметр q, затем находятся корни полинома (4.2), и если они не удовлетворяют требованиям (3.13), то число q увеличивается, вновь вычисляются корни этого полинома и так до тех пор, пока не выполнятся неравенства (3.13).

Выделим два частных случая полиномов (4.1) регулятора.

Первый случай возникает, когда полином $m(s)$ объекта гурвицев и его корни s_i^m $(i = \overline{1, \eta})$ удовлетворяют условию

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant \eta} |\mathrm{Re} s_i^m| \geqslant t_{tr}^{*\ -1}. \tag{4.8}$$

В этом случае сформируем полином $p(s)$ уравнения (4.2) как

$$(4.9)\qquad p(s) = m(s)p_1(s),$$

где $p_1(s) = \sum\limits_{i=0}^{n-1-\eta} p_i^{(1)} s^i$ – гурвицев полином. Тогда из выражений (3.7), (4.1) и (4.4) следует, что существует достаточно большое число q, при котором передаточная функция по внешнему возмущению имеет вид

$$(4.10)\qquad T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{\delta(s)} = \frac{m(s)}{(s+\sqrt{q})m(s)p^{(1)}(s) + 0_1(s,q)}.$$

Требование (2.12) к точности выполняется, если при условии (4.4)

$$(4.11)\qquad q \geqslant \frac{f^{*2}}{y_{ss}^{*2}}\|1/p_1(s)\|^2.$$

Кроме того, из выражения (4.10) следует, что при ступенчатом внешнем возмущении перерегулирование всегда может быть сделано малым при соответствующем выборе корней полинома $p_1(s)$.

Второй случай относится к следящей системе, описываемой уравнениями

$$(4.12)\qquad d(s)y = k(s)u, \quad g(s)u = r(s)(y-c), \quad z = y - c,$$

где $c(t)$ – задающее воздействие, $z(t)$ – ошибка слежения.

Если полиномы регулятора в системе (4.12) имеют вид (4.1), то ее передаточная функция, связывающая выход объекта с задающим воздействием, записывается как

$$(4.13)\qquad T_{yc}(s) = -\frac{r(s)}{\delta(s)}.$$

Теперь запишем с учетом (4.4) следующее выражение для полинома $r(s)$:

$$(4.14)\qquad \begin{aligned} r(s) &= d(s) - \delta(s) = \\ &= (d_{n-1} - p_{n-2})\, s^{n-1} + \ldots + (d_1 - p_0)\, s + d_0 - \sqrt{q}p(s) + 0_1(s,q). \end{aligned}$$

Если число $\sqrt{q}$ таково, что $|d_{i-1} - p_{i-2}| \leqslant \sqrt{q}p_{i-1}$ $(i = \overline{1,n})$, $p_{-1} = 0$, то $r(s) = -\sqrt{q}(p(s) + 0_2(s,q))$, где $0_2(s,q)$ – полином, чьи коэффициенты можно сделать (выбором достаточно большого числа q) сколь угодно малыми. Тогда передаточная функция (4.13) принимает вид

$$(4.15)\qquad T_{yc}(s) = \frac{\sqrt{q}(p(s) - 0_2(s,q))}{(s+\sqrt{q})p(s) + 0_1(s,q)}.$$

Пренебрегая полиномами $0_1(s,q)$ и $0_2(s,q)$, получим

$$(4.16)\qquad T_{yc}(s) \simeq \frac{\sqrt{q}}{(s+\sqrt{q})}.$$

Это означает, что время регулирования $t_{tr} \simeq 1/\sqrt{q}$, а ошибка слежения на частотах, меньших $\sqrt{q}$, может быть сделана выбором q сколь угодно малой.

5. Неминимально-фазовые объекты

Пусть полином $k(s)$ объекта (2.6) имеет вид

$$k(s) = \bar{k}(s)(-Ts + 1), \tag{5.1}$$

где $\bar{k}(s) = \sum\limits_{i=0}^{n-2} \bar{k}_i s^i$ – гурвицев полином, T – положительное число, $T < t^*_{tr}$.

Очевидно, что решение уравнения (3.1) имеет вид

$$g(s) = \bar{k}(s)(Ts + g_0), \tag{5.2}$$

где число g_0 и коэффициенты полинома $r(s)$ находятся из тождества Безу:

$$d(s)(Ts + g_0) - (-Ts + 1)r(s) = (Ts + 1)\delta(s). \tag{5.3}$$

Учитывая это выражение, запишем передаточную функцию (3.7) и функцию возвратной разности (3.10) как

$$T_{yf}(s) = \frac{(Ts + g_0)m(s)}{(Ts + 1)\delta(s)}, \quad v(s) = \frac{(Ts + 1)\delta(s)}{(Ts + g_0)d(s)}. \tag{5.4}$$

Из этих соотношений следует, что точность и грубость системы (2.1), (2.2) сложным образом зависит от параметра q и коэффициентов полинома $p(s)$. Это связано с коэффициентом g_0, который находится из тождества (5.3). Для минимально-фазового объекта $g_0 = 1$ и поэтому точность и грубость системы явно зависят от коэффициентов, входящих в полином $\delta(s)$.

Чтобы найти коэффициент g_0, введем число $s_T = 1/T$, подставим в тождество (5.3) $s = s_T$ и после несложных преобразований с учетом $d_n = \delta_n = 1$ получим

$$g_0 = \frac{1 + \sum\limits_{i=1}^{n}(2\delta_{n-i} - d_{n-i})T^i}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} d_{n-i}T^i}. \tag{5.5}$$

Из этого выражения следует, что при заданных числах d_i и δ_i, $i = \overline{0, n-1}$ и любом сколь угодно малом положительном числе ε^*_g существует достаточно малое значение постоянной времени T, такое, что $g_0 = 1 + \varepsilon_g$, где $|\varepsilon_g| \leqslant \varepsilon^*_g$.

Построим конструктивные достаточные условия (являющиеся следствием выражения (5.5)), связывающие коэффициент g_0 с постоянной времени T и корнями $-s_i$, $-s^\delta_i$ полиномов

$$d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s + s_i), \quad \delta(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s + s^\delta_i).$$

При этих условиях задача 1 имеет (утверждение 2) либо не имеет (утверждение 3) решение.

Эти условия получены для объектов, корни полинома $d(s)$ которых вещественны и связаны с величиной $s_T = 1/T$ как

$$s_1^2 \leqslant s_2^2 \leqslant \ldots \leqslant s_n^2 < s_T^2. \tag{5.6}$$

Корни s_i^δ, $i=\overline{1,n}$ полинома $\delta(s)$ также вещественные и выполняются неравенства

$$(s_1^\delta)^2 \leqslant (s_2^\delta)^2 \leqslant \ldots \leqslant (s_n^\delta)^2 < s_T^2, \tag{5.7}$$

которые обеспечиваются выбором вещественных корней полинома $p(s)$ и достаточно большим коэффициентом q.

Переходя к условиям, при которых задача 1 имеет решение, введем числа

$$\varepsilon_1 = |s_n|/s_T, \quad \varepsilon_2 = s_n^\delta/s_T, \quad 0 < \varepsilon_i < 1, \quad i = 1, 2. \tag{5.8}$$

Утверждение 2. *Существуют положительные числа ε_1 и ε_2 такие, что число $g_0 = 1 + \varepsilon_g$, где величина ε_g удовлетворяет неравенству $|\varepsilon_g| \leqslant \varepsilon_g^*$, в котором ε_g^* – заданное сколь угодно малое число.*

Доказательство утверждения носит конструктивный характер, и в Приложении получены формулы, позволяющие определить числа ε_1 и ε_2 по заданному числу ε_g^*.

Из выражений (3.7), (4.7), (5.4) следует, что всегда можно указать достаточно малое число ε_g^* такое, что регулятор (2.7) с полиномами, полученными из уравнений (5.2) и (5.3) (в которых полином $\delta(s)$ удовлетворяет условиям (4.5) и (4.6)), дает решение задачи 1.

Рассмотрим теперь случай, когда последнее из неравенств (5.7) не выполняется и корни полинома $\delta(s)$ удовлетворяют условиям

$$s_T^2 < (s_1^\delta)^2 \leqslant (s_2^\delta)^2 \leqslant \ldots \leqslant (s_n^\delta)^2. \tag{5.9}$$

Утверждение 3. *Существуют положительные числа ε_1 и $\varepsilon_3 = s_T/s_1^\delta$ такие, что радиус запасов устойчивости системы* (2.6) *и* (2.7) *с полиномами регулятора, полученными из уравнений* (5.2) *и* (5.3), *сколь угодно мал*:

$$r^2 \leqslant (2\varepsilon_3^2)^{n-1} 0{,}5(1+\varepsilon_3). \tag{5.10}$$

Оценим норму передаточной функции системы, имеющей запас устойчивости (5.10). Заметим, что из выражений (3.7) и (3.10) следует

$$T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{d(s)v(s)}. \tag{5.11}$$

При $\omega = s_1^\delta$ получим оценку

$$T_{yf}(-js_1^\delta)T_{yf}(js_1^\delta) \geqslant \frac{m(-js_1^\delta)m(js_1^\delta)}{d(-js_1^\delta)d(js_1^\delta)(2\varepsilon_3^2)^{n-1}0{,}5(1+\varepsilon_3)}, \tag{5.12}$$

из которой следует, что установившаяся ошибка системы может быть сколь угодно велика при малых значениях ε_3.

Из неравенств (5.10) и (5.12) можно найти значение постоянной времени T, при котором задача 1 не имеет решения.

6. Многомерные объекты

6.1. Регулятор состояния

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B(u+\rho), \quad z = Cx, \tag{6.1}$$
$$u = Kx, \tag{6.2}$$

где $x(t) \in R^n$ – измеряемый вектор состояния полностью управляемого объекта (6.1), $u(t) \in R^m$ – управление (выход регулятора (6.2)), $z(t) \in R^m$ – регулируемые переменные, $\rho(t) \in R^m$ – внешнее возмущение, компоненты которого связаны с функцией $f(t)$, описываемой выражением (2.3), соотношениями

$$(6.3) \qquad \rho_i(t) = æ_i f(t) \quad (i = \overline{1, m}),$$

где $æ_i$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные числа, характеризующие интенсивность возмущения $f(t)$, приложенных в местах приложения управлений.

Установившиеся ошибки по регулируемым переменным определяются как

$$(6.4) \qquad z_{ss,i} = \limsup_{t \to \infty} |z_i(t)| \quad (i = \overline{1, m}).$$

Время регулирования системы характеризуется выражением (2.9), в котором s_i^s $(i = \overline{1, n})$ – корни полинома $\det(Es - A - BK)$, а ее радиус запасов устойчивости, определяемый как наибольшее число r, при котором

$$(6.5) \qquad [E_m + W(-j\omega)]\,[E_m + W(j\omega)] \geqslant E_m r^2, \quad 0 \leqslant \omega < \infty,$$

где $W(s) = -K(Es - A)^{-1}B$, удовлетворяет условию $r \geqslant r^*$.

Найдем матрицу K регулятора (6.2) такую, чтобы выполнялись требования

$$(6.6) \qquad z_{ss,i} \leqslant z^*_{ss,i} \quad (i = \overline{1, m})$$

(где $z^*_{ss,i}$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные числа) к точности, а также требования ко времени регулирования (2.13) и грубости (6.5).

Будем искать эту матрицу как

$$(6.7) \qquad K = -B^{\mathrm{T}} P,$$

где P – симметричная неотрицательно определенная матрица ($P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$), удовлетворяющая уравнению Риккати

$$(6.8) \qquad A^{\mathrm{T}} P + PA - PBB^{\mathrm{T}} P = -\eta C^{\mathrm{T}} Q C,$$

в котором элементы q_{ii} $(i = \overline{1, m})$ диагональной матрицы Q и параметр η удовлетворяют условиям

$$(6.9) \qquad q_{ii} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{m} æ_i^{*2} \right) \frac{f^{*2}}{z^{*2}_{ss,i}} \quad (i = \overline{1, m}), \quad \eta = 1.$$

Утверждение 4. Установившиеся ошибки системы (6.1), (6.2), *матрица K которой определяется соотношениями* (6.7)–(6.9), *удовлетворяют требованиям* (6.6).

В связи с требованием (2.13) к времени регулирования рассмотрим передаточную матрицу объекта (6.1)

$$W_0(s) = C\,(Es - A)^{-1}\,B,$$

определитель которой имеет вид [15]:

$$(6.10) \qquad \det\,[W_0(s)] = \alpha \frac{\prod\limits_{i=1}^{\beta} (s - \nu_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (s - s_i)}, \quad \alpha \neq 0.$$

Если для корней ν_i $(i = \overline{1, \beta})$ выполняется условие, аналогичное (3.4),

$$(6.11) \qquad \min_{1 \leqslant i \leqslant \beta} |\mathrm{Re}\, \nu_i| \geqslant (t^*_{tr})^{-1},$$

то в соответствии с [15], всегда найдется достаточно большое значение параметра $\eta > 1$, при котором система (6.1), (6.2), (6.7), (6.9) удовлетворяет требованию (2.13) к времени регулирования. Эта система удовлетворяет также требованию (2.14) к грубости с $r^* = 1$. Это следует из условия [16] оптимальности в частотной форме.

$$(6.12) \qquad \begin{aligned} &[E_m + W(-j\omega)]\,[E_m + W(j\omega)] = \\ &= E_m + B^{\mathrm{T}}\,(-Ejw - A)^{-1T}\, C^{\mathrm{T}} Q C\, (Ejw - A)^{-1}\, B, \quad 0 \leqslant \omega < \infty. \end{aligned}$$

6.2. Динамический регулятор для минимально-фазового объекта

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$(6.13) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + \psi f, \quad y = Cx, \quad z = y,$$

где $y(t) \in R^m$ – измеряемые переменные, ψ – заданный вектор, который может не совпадать с вектором Bæ уравнения (6.1).

Объект (6.13) в форме "вход-выход" имеет вид

$$(6.14) \qquad T_1(s)y = T_2(s)u + l(s)f,$$

где $T_1(s)$ и $T_2(s)$ – полиномиальные квадратные матрицы, $l(s)$ – вектор полиномов.

Будем полагать, что объект (6.14) – минимально-фазовый ($\mathrm{Re}\tilde{s_i} < 0$ $(i = \overline{1, \gamma})$, где $\tilde{s_i}$ $(i = \overline{1, \gamma})$ – корни полинома $\det T_2(s)$). Пусть корни полинома $\det T_2(s)$ удовлетворяют неравенству $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant \gamma} |\mathrm{Re}\tilde{s_i}| \geqslant {t^*_{tr}}^{-1}$, а вектор ψ таков, что вектор полиномов $l(s)$ является вектором чисел l_0 $(l(s) = l_0)$. Без ограничения общности будем полагать также, что степени $n_i = \deg t_{1ii}(s)$ $(i = \overline{1, m})$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n\right)$ диагональных полиномов матрицы $T_1(s)$ не превышают степени полиномов i-го столбца этой матрицы:

$$(6.15) \qquad \deg t_{1ii}(s) > \deg t_{1ij}(s), \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Регулятор в форме "вход-выход" имеет вид

$$(6.16) \qquad G(s)u = R(s)y,$$

где $G(s)$ и $R(s)$ – полиномиальные квадратные матрицы.

Грубость системы (6.14), (6.16) будем характеризовать следующим неравенством, введенным в [6]:

$$(6.17) \qquad \det\,[E_m + W(-j\omega)]\,\det\,[E_m + W(j\omega)] \geqslant r^{*2},$$

где

$$(6.18) \qquad W(s) = -G^{-1}(s)R(s)T_1^{-1}(s)T_2(s).$$

Матрицы регулятора (6.16) находятся следующим образом.

Введем векторы

$$(6.19) \qquad \bar{u} = T_2(s)u, \quad \rho = æ f, \quad æ = l_0.$$

Тогда уравнение (6.14) примет вид

$$(6.20) \qquad T_1(s)y = \bar{u} + \rho.$$

Повторяя преобразования из [6], используем переменные $\hat{x}_1 = y, \hat{x}_2 = \dot{y}, \ldots, \hat{x}_{n_1} = y^{n_1-1}$, $\hat{x}_{n_1+1} = y_2, \ldots$ и запишем уравнение (6.20) как

$$(6.21) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}(\bar{u} + \rho), \quad y = \hat{C}\hat{x},$$

где $\hat{x}$ – n-мерный вектор, составленный из компонент вектора y и его производных: $\hat{x} = \gamma(s)y$. Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (6.1). Тогда в соответствии с утверждением 4 найдем регулятор

$$(6.22) \qquad \bar{u} = K\hat{x},$$

обеспечивающий выполнение требования (6.6) к точности. Отсюда с учетом принятых обозначений получим матрицы регулятора (6.16)

$$(6.23) \qquad G(s) = T_2(s), \quad R(s) = K\gamma(s).$$

Таким образом, следствием утверждения 4 является следующее

Утверждение 5. *Если матрица K регулятора* (6.16), (6.23) *получена на основе выражений* (6.7), (6.8), *где $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$, а матрица Q удовлетворяет неравенствам* (6.9), *то установившиеся ошибки системы* (6.14), (6.16), (6.23) *удовлетворяют требованиям к точности* (6.6), *грубости* (6.17) *и времени регулирования.*

Для доказательства сравним свойства системы (6.13), (6.16), (6.23) и системы (6.21), (6.22), которая по построению удовлетворяет требованиям к точности, времени регулирования и грубости.

Система (6.21), (6.22) эквивалентна системе с объектом (6.20) и регулятором

$$(6.24) \qquad \bar{u} = R(s)y,$$

и поэтому заключаем, что

$$(6.25) \qquad \hat{T}_{yf}(s) = [T_1(s) - R(s)]^{-1}, \quad \hat{W}(s) = -R(s)T_1^{-1}(s),$$

где $\hat{T}_{yf}(s)$ – передаточная матрица системы (6.21), (6.22), связывающая ее выход с внешним возмущением. Она получается из уравнения

$$(6.26) \qquad (T_1(s) - R(s))y = \rho,$$

которое следует из системы (6.20), (6.24).

Из уравнения (6.26) получим характеристический полином системы

$$(6.27) \qquad \hat{d}^s(s) = \det(T_1(s) - R(s)).$$

Теперь рассмотрим систему (6.13), (6.16), (6.23), эквивалентную системе (6.14), (6.16), (6.23). Нетрудно видеть, что ее передаточные матрицы равны

$$(6.28) \qquad T_{yf}(s) = \hat{T}_{yf}(s), \quad W(s) = -T_2(s)^{-1}\hat{W}(s)T_2(s).$$

Используя правило построения четырехблочной матрицы, получим ее характеристический полином

$$d^s(s) = \det T_2(s) \det[R(s) - G(s) T_2^{-1}(s) T_1(s)] = \det T_2(s) \hat{d}^s(s). \tag{6.29}$$

Первое из выражений (6.28) означает, что система (6.14), (6.16), (6.23) удовлетворяет требованиям к точности, а второе означает, что $\det[E_m + W(s)] = \det[E_m + \hat{W}(s)]$ и, следовательно, условие грубости (6.17) выполняется при $r^* = 1$. Из равенств (6.29) следует выполнение требования к времени регулирования при соответствующем выборе параметра η в уравнении (6.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. При полигармоническом возмущении (2.3) выход системы (2.1), (2.2) в установившемся режиме $t \to \infty$ описывается выражением

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a\left(\omega_k^f\right) \sin\left(\omega_k^f t + \varphi_k^f\right), \tag{П.1}$$

в котором

$$a\left(\omega_k^f\right) = \left|T_{yf}(j\omega_k^f)\right| f_k. \tag{П.2}$$

Учитывая это выражение и условие (2.4), запишем

$$|y(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|a(\omega_k^f)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|T_{yf}(j\omega_k^f)\right| |f_k| \leqslant \|T_{yf}(s)\| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \leqslant \|T_{yf}(s)\| f^*. \tag{П.3}$$

Для выполнения требования (2.12) к точности достаточно, чтобы

$$|y(t)| \leqslant \|T_{yf}(s)\| f^* \leqslant y_{ss}^*, \tag{П.4}$$

и, следовательно, справедливо неравенство

$$\|T_{yf}(s)\| \leqslant \frac{y_{ss}^*}{f^*}. \tag{П.5}$$

Учитывая, что при условии (4.1) передаточная функция (3.7) принимает вид

$$T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{\delta(s)}, \tag{П.6}$$

запишем

$$\begin{aligned} T_{yf}(-j\omega) T_{yf}(j\omega) &= \frac{m(-j\omega) m(j\omega)}{d(-j\omega) d(j\omega) + q p(-j\omega) p(j\omega)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{q} \frac{m(-j\omega) m(j\omega)}{p(-j\omega) p(j\omega)} \leqslant \frac{1}{q} \|w_{mp}(s)\|^2. \end{aligned} \tag{П.7}$$

Отсюда с учетом неравенства (П.5) получим выражение

$$\frac{1}{q} \|w_{mp}(s)\|^2 \leqslant \frac{y_{ss}^{*2}}{f^{*2}}, \tag{П.8}$$

из которого следует неравенство (4.6) утверждения.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим выражение (5.5) для функции g_0. Для анализа входящих в него слагаемых

$$a = \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}T^i, \quad b = 2\sum_{i=1}^{n} \delta_{n-i}T^i \tag{П.9}$$

используем выражение их коэффициентов через корни соответствующих полиномов

$$d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s+s_i), \quad \delta(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s+s_i^\delta). \tag{П.10}$$

Обозначим

$$\bar{c}_i = \frac{s_i}{|s_n|}, \quad \bar{c}_i^\delta = \frac{s_i^\delta}{s_n^\delta} \quad (i = \overline{1, n-1}). \tag{П.11}$$

Из неравенств (5.6), (5.7) следует, что $|\bar{c}_i| \leqslant 1$, $0 < \bar{c}_i^\delta \leqslant 1$ $(i = \overline{1, n-1})$.

Используя (5.8), запишем

$$\frac{s_i}{s_T} = \bar{c}_i\varepsilon_1, \quad \frac{s_i^\delta}{s_n^\delta} = \bar{c}_i^\delta\varepsilon_2 \quad (i = \overline{1, n}), \quad \bar{c}_n = 1, \quad \bar{c}_n^\delta = 1. \tag{П.12}$$

Нетрудно видеть, что

$$d_{n-i}T^i = c_i\varepsilon_1^i, \quad \delta_{n-i}T^i = c_i^\delta\varepsilon_2^i \quad (i = \overline{1, n}), \tag{П.13}$$

где c_i и c_i^δ – числа, определяемые значениями чисел $\bar{c}_i$ и $\bar{c}_i^\delta$ $(i = \overline{1, n})$.

Действительно, при

$$i = 1: \quad d_{n-1}T = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) T = c_1\varepsilon_1,$$

$$i = 2: \quad d_{n-2}T^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} s_i s_j\right) T^2 = c_2\varepsilon_1^2,$$

$$\vdots$$

$$i = n: \quad d_0T^n = \left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right) T^n = c_n\varepsilon_1^n.$$

Аналогичные выражения можно записать для каждого произведения $\delta_{n-i}T^i$ $(i = \overline{1, n})$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}T^i = \sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_1^i = a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1, \\ b &= 2\sum_{i=1}^{n} \delta_{n-i}T^i = 2\sum_{i=1}^{n} c_i^\delta\varepsilon_2^i = b_1(\varepsilon_2)\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{П.14}$$

где $a_1(\varepsilon_1) = c_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} c_i \varepsilon_1^{i-1}$, $b_1(\varepsilon_2) = 2c_1^\delta + 2\sum\limits_{i=2}^{n} c_i^\delta \varepsilon_2^{i-1}$, и следовательно,

$$g_0 = \frac{1 + b_1(\varepsilon_2)\varepsilon_2 - a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}. \tag{П.15}$$

Пусть $g_0 = 1 + \varepsilon_g$, и тогда получим выражение

$$\varepsilon_g = \frac{b_1(\varepsilon_2)\varepsilon_2 - 2a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}, \tag{П.16}$$

из которого следует, что при сколь угодно малом заданном ε_g^* всегда можно найти числа ε_1 и ε_2, что при любых $b_1(\varepsilon_2)$, $a_1(\varepsilon_1)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{b_1(\varepsilon_2)\varepsilon_2 - 2a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1} \right| \leqslant \varepsilon_g^*, \tag{П.17}$$

что доказывает утверждение.

Доказательство утверждения 3. Для оценки величины g_0 при условии (5.9) утверждения рассмотрим входящее в выражение (5.5) слагаемое

$$b = 2\sum_{i=1}^{n} \delta_{n-i} T^i. \tag{П.18}$$

Обозначим

$$\mu_i = s_i^\delta / s_1^\delta \quad (i = \overline{1,n}). \tag{П.19}$$

Из неравенств (5.9) следует, что $\mu_i \geqslant 1$ $(i = \overline{1,n})$ и, следовательно, $s_i^\delta / s_T = \mu_i \varepsilon_3^{-1}$ $(i = \overline{1,n})$.

Нетрудно видеть, что вследствие положительности чисел δ_i $(i = \overline{0,n})$

$$b \geqslant 2\delta_0 T^n = 2\prod_{i=1}^{n} s_i^\delta T^n = 2\prod_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_3^{-1} = 2\mu\varepsilon_3^{-n}, \tag{П.20}$$

где $\mu = \prod\limits_{i=1}^{n} \mu_i$ – положительное число, не зависящее от ε_3.

С учетом (П.20) запишем (П.15) как

$$g_0 \geqslant \frac{1 + 2\mu\varepsilon_3^{-n} - a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}.$$

Пренебрегая числами $a_1(\varepsilon_1)$ и ε_1, которые могут быть сделаны сколь угодно малыми выбором малых чисел ε_1, а также числом 1 при достаточно малых ε_3, будем использовать выражение

$$\hat{g}_0 = 2\mu\varepsilon_3^{-n}. \tag{П.21}$$

Рассмотрим теперь функцию возвратной разности (5.4). Заменяя в ней g_0 на $\hat{g}_0$ запишем приближенное соотношение

$$\hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega) = \frac{(\omega^2 + s_T^2)\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\omega^2 + \left(s_i^\delta\right)^2\right]}{(\omega^2 + s_T^2\hat{g}_0^2)\prod\limits_{i=1}^{n}(\omega^2 + s_i^2)}.$$

При $\omega = s_1^\delta$ получим

$$\text{(П.22)}\qquad \hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega)\big|_{\omega=s_1^\delta} = \frac{\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + s_T^2\right]\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + \left(s_i^\delta\right)^2\right]}{\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + s_T^2 4\mu^2\varepsilon_3^{-2n}\right]\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + s_i^2\right]}.$$

Из неравенств (5.9), (5.6) следует, что

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + \left(s_i^\delta\right)^2\right] \leqslant 2^n \prod_{i=1}^{n}\left(s_i^\delta\right)^2,\ \left(s_1^\delta\right)^2 + s_T^2 = \left(s_1^\delta\right)^2\left(1+\varepsilon_3^2\right),$$
$$\prod_{i=1}^{n}\left[\left(s_1^\delta\right)^2 + \left(s_i\right)^2\right] \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(s_1^\delta\right)^2.$$

Кроме того, заметим, что

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(s_i^\delta\right)^2}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(s_1^\delta\right)^2} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\left(s_i^\delta\right)^2}{\left(s_1^\delta\right)^2} = \mu^2.$$

Подставляя эти неравенства в (П.22), получим соотношения

$$\text{(П.23)}\qquad \hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega)\big|_{\omega=s_1^\delta} \leqslant \frac{2^n\mu^2\left(1+\varepsilon_3^2\right)}{1+4\mu^2\varepsilon_3^{-2(n-1)}} \leqslant \frac{2^{n-2}\left(1+\varepsilon_3^2\right)}{\varepsilon_3^{-2(n-1)}} = \left(2\varepsilon_3^2\right)^{n-1}\frac{\left(1+\varepsilon_3^2\right)}{2},$$

из которых следует неравенство (5.10) утверждения.

Доказательство утверждения 4. Передаточная матрица системы (6.1), (6.2), связывающая регулируемые переменные с внешним возмущением, имеет вид

$$\text{(П.24)}\qquad T_{z\rho}(s) = C\left(Es - A - BK\right)^{-1}B.$$

В установившемся режиме

$$\text{(П.25)}\qquad z_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_i(\omega_k^f)\sin\left(\omega_k^f t + \varphi_k^f\right)\qquad (i=\overline{1,m}).$$

Амплитуды регулируемых переменных:

$$\text{(П.26)}\qquad a_i(\omega_k^f) = \left|\left[T_{z\rho}\left(j\omega_k^f\right)\rho\right]_i\right|\qquad (i=\overline{1,m},\quad k=\overline{0,\infty}),$$

где $\left[T_{z\rho}\left(j\omega_k^f\right)\rho\right]_i$ – i-я компонента вектора $\left[T_{z\rho}\left(j\omega_k^f\right)\rho\right]$.

С учетом (6.3) запишем

$$\text{(П.27)}\qquad \left|a_i(\omega_k^f)\right| = \sqrt{\left[T_{z\rho}\left(-j\omega_k^f\right)\rho\right]_i\left[T_{z\rho}\left(j\omega_k^f\right)\rho\right]_i} =$$
$$= f_k\sqrt{\left[T_{z\rho}\left(-j\omega_k^f\right)æ\right]_i\left[T_{z\rho}\left(j\omega_k^f\right)æ\right]_i}\qquad (i=\overline{1,m},\quad k=\overline{0,\infty}).$$

В [11] показано, что при условиях утверждения 4 передаточная матрица (П.24) удовлетворяет неравенству

$$T_{z\rho}^{\mathrm{T}}(-j\omega)QT_{z\rho}(j\omega) \leqslant E_m, \quad 0 \leqslant \omega < \infty. \tag{П.28}$$

Полагая $\omega = \omega_k^f$, умножим это неравенство справа и слева на векторы

$$\rho_+^{(k)} = \left[\rho_{1k}e^{j\phi_k}, \ldots, \rho_{mk}e^{j\phi_k}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \rho_-^{(k)} = \left[\rho_{1k}e^{-j\phi_k}, \ldots, \rho_{mk}e^{-j\phi_k}\right]^{\mathrm{T}} \tag{П.29}$$

и, используя (П.27), получим

$$\begin{aligned}\rho_-^{(k)}T_{z\rho}^{\mathrm{T}}(-j\omega_k^f)QT_{z\rho}(j\omega_k^f)\rho_+^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m} q_{ii}a_i^2(j\omega_k^f) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\rho_{ik}^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}æ_i^2\right)f_k^2 \quad (k = \overline{0,\infty}).\end{aligned} \tag{П.30}$$

Отсюда

$$\left|a_i(\omega_k^f)\right| \leqslant \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(æ_i^2)}}{\sqrt{q_{ii}}}|f_k| \quad (i = \overline{1,m}), \quad (k = \overline{0,\infty}). \tag{П.31}$$

Из выражений (П.26), (П.31) и (2.4) следует, что

$$|z_i(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left|a_i(\omega_k^f)\right| \leqslant \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}æ_i^2}}{\sqrt{q_{ii}}}f^* \quad (i = \overline{1,m}). \tag{П.32}$$

Тогда из этого выражения и требования (6.6) получим неравенство (6.9) утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы автоматического регулирования. (Под ред. В.В. Солодовникова) М.: Машгиз, 1954.
2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Ч. I. Линейные системы регулирования одной величины. М.; Л.: Энергия, 1965.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435.
4. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bullet Soc. Mat. Mech. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
5. *Александров А.Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем управления // АиТ. 1969. № 9. С. 176–181.
6. *Александров А.Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. 2 // АиТ. 1972. № 2. С. 17–29.
7. *Тимофеев Ю.К.* Статические ошибки аналитически сконструированных систем // Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб.: Сарат. политех. ин-т. 1976. С. 53–60.

8. *Садомцев Ю.В.* Аналитическое конструирование регуляторов по заданным показателям качества. Развитие проблемы // Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб.: Сарат. политех. ин-т. 1980. С. 32–48.
9. *Волков Е.Ф., Ершов Н.Н.* Синтез асимптотически устойчивых многосвязных систем с заданной статической точностью // АиТ. 1981. № 7. С. 19–27.
10. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
11. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I, II // АиТ. 1998. № 7. С. 83–95; № 8. С. 124–138.
12. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. № 5. С. 39–46.
13. *Dahleh M.A., Pearson J.B.* l_1-Optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32. P. 314–322.
14. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования. Межвуз. науч. сб. “Аналитические методы синтеза регуляторов”, СПИ, Саратов. 1980. С. 3–14.
15. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
16. *Александров А.Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем с несколькими управлениями // АиТ. 1969. № 12. С. 12–17.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 05.04.2007