©2004 г. А. В. НАЗИН, д-р физ.-мат. наук,
С. А. НАЗИН, канд. физ.-мат. наук,
Б. Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

О СХОДИМОСТИ ВНЕШНИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1]

В гарантированном оценивании широко применяется эллипсоидальная техника для аппроксимации областей достижимости динамической системы. В данной работе рассматриваются вопросы внешнего эллипсоидального оценивания текущих и предельного множеств достижимости устойчивой линейной дискретной динамической системы. Для таких систем выписываются рекуррентные алгоритмы оценивания с применением критерия минимальности следа "взвешенной" матрицы эллипсоида и исследуются их предельные свойства.

1. Введение и постановка задачи

С 70-х годов прошлого столетия широко начал развиваться детерминированный, или гарантированный, подход к задачам оценивания, фильтрации и идентификации динамических систем [1–3] как альтернатива статистическим методам и калмановской фильтрации. При таком подходе предполагается, что ошибки и возмущения в системе являются неизвестными, но ограниченными в некоторой норме векторами. Во многих практических задачах наиболее естественно именно такое представление неопределенности в модели. Однако алгоритмы, основанные на таком описании, весьма слабо используются в реальных приложениях по причине их сложности и вычислительной трудоемкости. К примеру, интервальная постановка часто ведет к NP-трудным задачам. В связи с этим большое значение имеют дальнейшее развитие и упрощение подобных методов. Так, одним из наиболее простых и удобных подходов в гарантированном оценивании является метод эллипсоидов, где предполагается, что ошибки в системе удовлетворяют квадратичным эллипсоидальным ограничениям, и где ищется эллипсоид, содержащий фазовый вектор системы. В настоящее время эллипсоидальная техника представляет собой достаточно широко распространенный инструмент (см. [4–8]), в частности, для анализа различных задач теории управления.

Рассмотрим линейную стационарную дискретную модель, описываемую уравнением

$$x_{k+1} = A\,x_k + B\,w_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

[1] Работа осуществлялась при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00127), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 и INTAS (грант YSF 2002–181).

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ есть фазовый вектор системы, $w_k \in \mathbb{R}^m$ представляет собой вектор внешних возмущений, A и $B \neq 0$ — вещественные матрицы соответствующих размерностей. Без ограничения общности полагаем $\|w_k\| \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Обозначим эллипсоид в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ как линейный образ единичного шара

$$E = \{\, c + Sv : \ \|v\| \leq 1 \,\} \ .$$

В такой записи он может быть вырожденным, т.е. не иметь внутренних точек в $\mathbb{R}^n$. Здесь вектор c есть центр эллипсоида, а $P = SS^{\mathrm{T}}$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, определяющая его форму. Сам эллипсоид будем в дальнейшем писать через $E(c, P)$.

Вектор Bw_k в этом случае принадлежит эллипсоиду $E(0, BB^{\mathrm{T}})$ (возможно, вырожденному), который соответствует аддитивным внешним возмущениям, действующим на систему. Будем предполагать, что начальный фазовый вектор x_0 точно не известен, но принадлежит ограниченному, возможно вырожденному, эллипсоиду $E_0 = E(c_0, P_0)$. Тогда множество

$$(2) \qquad D_k \;=\; \big\{ x_k = A^k x_0 + A^{k-1} B w_0 + A^{k-2} B w_1 + \ldots + A B w_{k-2} + B w_{k-1} : \\ x_0 \in E(c_0, P_0), \quad \|w_j\| \leq 1, \quad j = 0, \ldots, k-1 \,\big\}$$

есть множество достижимости системы (1) в момент времени k. Таким образом, D_k является алгебраической суммой $k+1$ эллипсоидов, которая в общем случае есть выпуклое множество, но не эллипсоид. В задачах оценивания состояний динамических систем требуется точно или приближенно описать это множество. Различные алгоритмы, аппроксимирующие D_k классом оптимальных (субоптимальных) в определенном смысле эллипсоидов, построены в [5–7, 9] для случаев непрерывных и дискретных моделей. При внешней аппроксимации оптимальность понимается с точки зрения минимальности размера эллипсоида. В данной статье под размером эллипсоида $E(c, P)$ будем подразумевать

$$(3) \qquad f_V(P) = \operatorname{tr} VP \,,$$

где V — симметрическая, положительно определенная “весовая” матрица. Эллипсоид минимального размера $f_V(P)$ будем называть оптимальным по критерию следа. В литературе также большое внимание уделяется эллипсоидам минимального объема [5, 6] и другим, более общим, критериям [9, 10].

Мера (3) очень удобна в силу ее линейности как функции от матрицы $P = [p_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, а ее зависимость от весовой матрицы позволяет за счет “правильного” выбора V улучшать получаемые оптимальные эллипсоидальные оценки. Заметим, что, в частности, при единичной весовой матрице $V = I$ размер $f_V(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ii}$ представляет собой сумму квадратов длин полуосей эллипсоида $E(c, P)$.

В общем случае весовую матрицу можно всегда представить в виде

$$(4) \qquad V = U^{\mathrm{T}} U, \quad \det U \neq 0 \,,$$

поэтому

$$f_V(P) = \operatorname{tr} UPU^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr} \widetilde{P} = f_I(\widetilde{P}), \tag{5}$$

где $\widetilde{P} = UPU^{\mathrm{T}}$ — матрица того же эллипсоида в преобразованном пространстве состояний

$$\widetilde{x} = Ux. \tag{6}$$

Матрицы A и B динамической системы (1) преобразуются соответствующим образом:

$$\widetilde{A} = UAU^{-1}, \qquad \widetilde{B} = UB. \tag{7}$$

Такой взгляд на меру (3) позволяет при исследовании свойств получаемых оценок свести рассмотрение к случаю единичной весовой матрицы $V = I$. Однако при формировании алгоритмов оценивания использование общего выражения (3) придает оценкам дополнительную, матричную "степень свободы", адекватное использование которой повышает их точность.

Обозначим спектральный радиус матрицы A через

$$\rho_A = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|, \tag{8}$$

где $\lambda_i(A)$ — собственные значения A. Говорим, что матрица A и система (1) являются устойчивыми, если $\rho_A < 1$. Для устойчивых матриц (и только для них) $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. Таким образом, из (2) непосредственно следует, что устойчивость матрицы A является необходимым и достаточным условием сходимости последовательности множеств достижимости D_k исходной динамической системы к некоторому компакту D_∞, который, следовательно, не зависит от начального эллипсоида $E(c_0, P_0)$. Естественным образом в этой связи возникает вопрос о построении и исследовании предельного поведения внешних эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости.

В [11, 12] на основе критерия следа $f_I(P) = \operatorname{tr} P$ был предложен рекуррентный локально-оптимальный алгоритм эллипсоидального оценивания множеств D_k и доказана ограниченность последовательности оценок при $\rho_A < 1$. Отметим, что устойчивость матрицы A не гарантирует ограниченности аналогичной последовательности эллипсоидов, вычисленных по критерию минимальности объема. Подобные вопросы для случая непрерывных линейных динамических систем рассматривались в [5, 13, 14]. В этих работах исследованы на устойчивость точки равновесия дифференциальных уравнений локально оптимальных эллипсоидов для устойчивых систем (в [5] изучен только вариант с диагональной матрицей динамики A). Тем не менее общая картина глобального поведения внешних эллипсоидальных оценок для непрерывных устойчивых систем довольно неопределенная. Скажем, неясно, будут ли они сходящимися или хотя бы ограниченными.

Цель настоящей работы — исследовать задачу внешнего эллипсоидального оценивания множеств достижимости D_k и D_∞ и получить условия сходимости предложенных здесь алгоритмов оценивания (оптимальных по критерию следа "взвешенной" матрицы эллипсоида) для устойчивых линейных дискретных систем (1).

2. Оценка предельного множества достижимости

Изучим, прежде всего, возможность непосредственного нахождения минимального по критерию $f_V(P)$ эллипсоида $E(0,P) \supseteq D_\infty$, основанную на следующем результате, аналоги которого в той или иной форме встречаются в [2, 3, 5, 15].

Т е о р е м а 1. Пусть D_∞ есть предельное множество достижимости для устойчивой динамической системы (1). Тогда для любого фиксированного $\gamma \in (\rho_A^2, 1)$ эллипсоид $E(0,P_\gamma)$ с матрицей, являющейся решением уравнения Ляпунова

$$P_\gamma = \frac{AP_\gamma A^{\mathrm{T}}}{\gamma} + \frac{BB^{\mathrm{T}}}{1-\gamma}\,, \tag{9}$$

содержит D_∞. Кроме того, функция $\varphi(\gamma) = f_V(P_\gamma) = \operatorname{tr} VP_\gamma$ при $V > 0$ строго выпукла на интервале $\rho_A^2 < \gamma < 1$.

Доказательство теоремы для полноты изложения приведено в Приложении.

Таким образом, минимальный по следу эллипсоид из однопараметрического семейства $E(0,P_\gamma)$ представляет собой решение выпуклой задачи минимизации и дает "хорошую" внешнюю оценку предельного множества достижимости. Причем эту оценку можно вычислить сразу по известным матрицам A и B, не прибегая к анализу эволюции множеств достижимости системы. Этот результат имеет важное применение, в частности, в задаче о подавлении внешних ограниченных возмущений, а также и в других задачах теории управления. Отметим также, что производная по $\gamma \in (\rho_A^2, 1)$ функции $f_V(P_\gamma) = \operatorname{tr} VP_\gamma$ вычисляется достаточно просто, так как матрица $P'_\gamma = dP_\gamma/d\gamma$ представляет собой единственное решение следующего уравнения Ляпунова:

$$P'_\gamma = \frac{AP'_\gamma A^{\mathrm{T}}}{\gamma} - \frac{P_\gamma}{\gamma} + \frac{BB^{\mathrm{T}}}{\gamma(1-\gamma)^2}\,.$$

П р и м е р 1. Пусть задана устойчивая система (1) с матрицами $A = \operatorname{diag}\{0{,}2;\ 0{,}8\}$ и $B = \operatorname{diag}\{1;\ 0{,}2\}$. При любом выборе начального эллипсоида, содержащего x_0, области достижимости D_k системы стремятся к одному и тому же компакту D_∞, граница которого показана на рис. 1 тонкой сплошной линией. Однопараметрическое семейство эллипсоидов $E(0,P_\gamma)$ содержит этот компакт, где P_γ есть решение уравнения Ляпунова (9) при любом фиксированном $\gamma \in (\rho_A^2, 1)$. Некоторые эллипсоиды данного семейства изображены на рис. 1 пунктирными линиями. Минимальный по следу (при $V = I$) эллипсоид из этого семейства (жирная линия) есть $E(0,P)$ с матрицей $P \simeq \operatorname{diag}\{3{,}6797;\ 1{,}3727\}$. Из рисунка видно, что он не является оптимальной внешней оценкой предельного множества достижимости D_∞ среди всех эллипсоидов, содержащих D_∞. $\square$

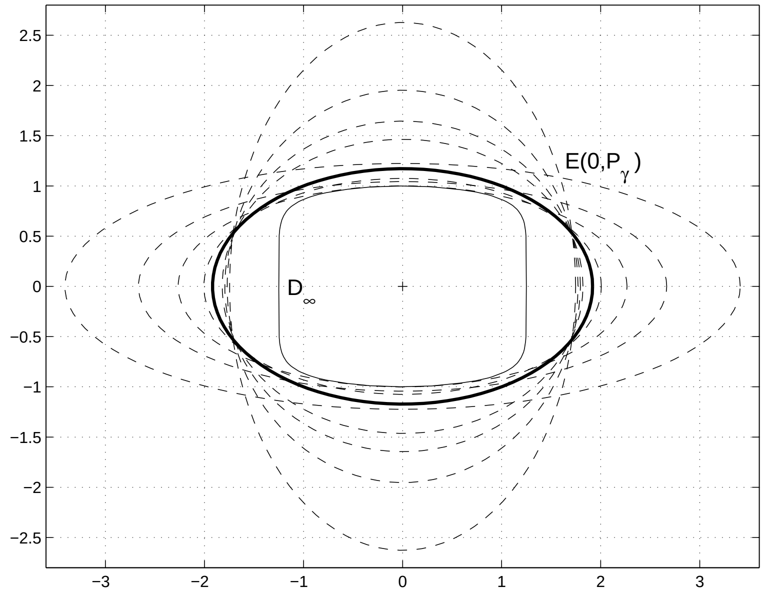

Рис. 1: Семейство эллипсоидов, содержащих предельное множество достижимости.

3. Оценка множеств достижимости D_k и D_∞

Для построения более точных эллипсоидальных оценок воспользуемся следующим важным результатом об аппроксимации суммы эллипсоидов. Пусть $\mathcal{A}_N$ — множество всевозможных векторов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ таких, что все $\alpha_i > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Л е м м а 1. *Пусть S_N есть алгебраическая сумма N эллипсоидов $E(c_i, Q_i)$ и для всех значений $i = 1, \dots, N$ матрицы $Q_i \geq 0$, $Q_i \neq 0$. Тогда*

1) при любом $\alpha \in \mathcal{A}_N$ эллипсоид $E(c, P(\alpha))$ с параметрами

$$c = \sum_{i=1}^{N} c_i, \qquad P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{-1} Q_i \tag{10}$$

содержит S_N,

2) функция $\varphi(\alpha) = f_V(P(\alpha)) = \operatorname{tr} V P(\alpha)$ строго выпукла на симплексе $\mathcal{A}_N$; здесь $V > 0$ — весовая матрица.

Доказательство см. в [7]. Пункт 1) данной леммы впервые был сформулирован Швеппе в его монографии [2].

Отметим, что минимальный по следу эллипсоид среди семейства $E(c, P(\alpha))$ в общем случае может не оказаться минимальным среди всего класса эллипсоидов, содержащих сумму S_N. Тем не менее при "правильном" выборе весовой матрицы V его отличие от минимального будет в большинстве случаев незначительным, см. ниже раздел 5. Для частного случая суммы двух эллипсоидов справедливо следующее замечание.

З а м е ч а н и е 1. *Если $N = 2$, то однопараметрическое семейство эллипсоидов $E(c, P(\alpha))$ из (10) содержит минимальный по следу эллипсоид среди всего класса* *эллипсоидов, в которых содержится множество S_N. Поэтому минимизация по скалярному параметру $\gamma = \alpha_1$ выпуклой функции $f_V(P(\alpha)) = \operatorname{tr} VQ_1/\gamma + \operatorname{tr} VQ_2/(1-\gamma)$ на интервале $\gamma \in (0,1)$ ведет к минимальному по следу эллипсоиду, содержащему S_N.*

Подробнее об аппроксимации суммы двух эллипсоидов см. [5, 6, 9]. При $N \geq 2$ рассмотрим в условиях леммы 1 алгебраическую сумму S_N невырожденных соосных эллипсоидов $E(0, Q_i)$. Тогда, как утверждает следующая лемма, минимальный по (соответствующему) критерию следа эллипсоид, содержащий внутри себя сумму S_N , также принадлежит семейству $E(0, P(\alpha))$ (10) (при $c_i \equiv 0$).

Л е м м а 2. Пусть $N \geq 2$ и невырожденные эллипсоиды $E(0, Q_i)$, $i = 1, \ldots, N$, соосны, т.е. для некоторой невырожденной матрицы U все преобразованные матрицы $\widetilde{Q}_i = UQ_iU^{\mathrm{T}}$ диагональны, с положительными диагональными элементами. Положим $V = U^{\mathrm{T}}U$ и введем вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathcal{A}_N$, симплекс $\mathcal{A}_N$ и матричную функцию $P(\alpha)$ так же, как в лемме 1. Тогда эллипсоид $E(0, P(\alpha))$, соответствующий решению задачи минимизации

$$(11) \qquad \min_{\alpha \in \mathcal{A}_N} \operatorname{tr} VP(\alpha) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}_N} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{-1} \operatorname{tr} VQ_i\,,$$

минимален (по тому же критерию следа $\operatorname{tr} VP$) и среди всевозможных эллипсоидов, содержащих внутри себя алгебраическую сумму $S_N = \sum_{i=1}^{N} E(0, Q_i)$.

Доказательство леммы дается в Приложении.

Так как в соответствии с (2) множество достижимости D_k системы (1) есть сумма $N = k+1$ эллипсоидов с центрами

$$(12) \qquad d_0 = A^k c_0, \qquad d_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

и соответственно матрицами

$$(13) \qquad Q_0 = A^k P_0 (A^{\mathrm{T}})^k, \qquad Q_i = A^{k-i} BB^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}})^{k-i}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

то его внешнюю эллипсоидальную оценку можно строить непосредственно по лемме 1, минимизируя $\operatorname{tr} VP(\alpha)$ на симплексе $\mathcal{A}_N$. Это приводит к следующим оптимальным значениям параметров α_i:

$$(14) \qquad \alpha_i = (\operatorname{tr} VQ_i)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{k} (\operatorname{tr} VQ_j)^{1/2} \right)^{-1}.$$

При этих значениях

$$(15) \qquad \operatorname{tr} VP(\alpha) = \left(\left[\operatorname{tr} VA^k P_0 (A^{\mathrm{T}})^k \right]^{1/2} + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\operatorname{tr} VA^i BB^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}})^i \right]^{1/2} \right)^2.$$

Получившийся эллипсоид $E(0, P(\alpha))$ содержит множество достижимости D_k системы (1) при начальном $x_0 \in E(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$, что является следствием леммы 1 и соотношений (2), (12), (13). При "правильном" выборе весовой матрицы V он дает хорошую внешнюю аппроксимацию множества D_k, что подтверждается многочисленными примерами. Кроме того, вычисление матрицы $P(\alpha)$ этого эллипсоида можно производить итеративным образом при любом наперед заданном значении $k \geq 1$. Нетрудно убедиться, что это вычисление $P(\alpha) = \widehat{P}_k$ описывается формулами:

$$W_i = AW_{i-1}A^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \dots, k, \quad W_0 = P_0\,, \tag{16}$$

$$S_i = AS_{i-1}A^{\mathrm{T}}, \quad \mu_i = (\operatorname{tr} VS_i)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, k, \quad S_0 = BB^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

$$\nu_i = \nu_{i-1} + \mu_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \nu_0 = (\operatorname{tr} VW_k)^{1/2}\,, \tag{18}$$

$$\alpha_i = \mu_i/\nu_k, \quad i = 1, \dots, k, \quad \alpha_0 = \nu_0/\nu_k\,, \tag{19}$$

$$\widehat{P}_i = \widehat{P}_{i-1} + \alpha_i^{-1}S_i, \quad i = 1, \dots, k\,, \quad \widehat{P}_0 = \alpha_0^{-1}W_k\,. \tag{20}$$

Следующая теорема иллюстрирует предельное поведение матрицы $\widehat{P}_k$ при $k \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть матрица A устойчива. Тогда для любого начального значения $P_0 \geq 0$ матрица $\widehat{P}_k$, определяемая алгоритмом (16)–(20), совпадает с $P(\alpha)$ (10), (14) и стремится к конечному пределу $\widehat{P}_\infty \geq 0$ при $k \to \infty$. При этом*

$$\widehat{P}_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j BB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^j}{\widehat{\alpha}_j}\,, \tag{21}$$

где $\widehat{\alpha}_j$ равны

$$\widehat{\alpha}_j = [\operatorname{tr}\, VA^jBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^j\,]^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} [\operatorname{tr}\, VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i\,]^{1/2} \right)^{-1}, \tag{22}$$

а след

$$\operatorname{tr}\, V\widehat{P}_\infty = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left[\operatorname{tr}\, VA^jBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^j\,\right]^{1/2} \right)^2. \tag{23}$$

Таким образом, алгоритм (16)–(20) при достаточно большом k представляет собой итеративный метод аппроксимации предельного множества достижимости.

Доказательство теоремы приведено в Приложении. Оно основано на другом способе итеративного представления матрицы $P(\alpha)$ (10), (14), который состоит в следующем. Пусть при некотором $P_0 \geq 0$ задана последовательность

$$P_{i+1} = \frac{AP_iA^{\mathrm{T}}}{\gamma_i} + \frac{BB^{\mathrm{T}}}{1-\gamma_i}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1\,. \tag{24}$$

Здесь параметры $\gamma_i \in (0,1)$, $i = 0, 1, ..., k-1$. Из (24) следует, что

$$P_k = \frac{A^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k}{\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{k-1}} + \frac{A^{k-1}BB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{k-1}}{(1-\gamma_0)\gamma_1\cdots\gamma_{k-1}} + \frac{A^{k-2}BB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{k-2}}{(1-\gamma_1)\gamma_2\cdots\gamma_{k-1}} + \dots \tag{25}$$
$$\dots + \frac{ABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}{(1-\gamma_{k-2})\gamma_{k-1}} + \frac{BB^{\mathrm{T}}}{1-\gamma_{k-1}}\,,$$

и, следовательно, $P_k = P(\alpha)$ при векторе параметров $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{A}_{k+1}$, определяемом соотношениями

$$\alpha_0 = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i\,, \qquad \alpha_j = (1-\gamma_{j-1}) \prod_{i=j}^{k-1} \gamma_i\,, \quad j = 1, \ldots, k\,. \tag{26}$$

Поскольку соотношения (26) устанавливают взаимно однозначное соответствие между гиперкубом $(0,1)^k$ и симплексом $\mathcal{A}_{k+1}$, то выбор параметров $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$ в алгоритме (24) из условия

$$(\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}) = \operatorname*{argmin}_{0<\gamma_0,\ldots,\gamma_{k-1}<1} \operatorname{tr} V P_k \tag{27}$$

также приводит к оптимальной матрице $P(\alpha) = P_k$, как и алгоритм (16)–(20).

Л е м м а 3. *Для любого $P_0 \geq 0$ решение задачи (27) представляется в виде*

$$\gamma_i = \frac{[\operatorname{tr} V A^{k-i} P_i (A^{\mathrm{T}})^{k-i}]^{1/2}}{[\operatorname{tr} V A^{k-i} P_i (A^{\mathrm{T}})^{k-i}]^{1/2} + [\operatorname{tr} V A^{k-i-1} B B^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}})^{k-i-1}]^{1/2}}\,, \quad i = 0, 1, ..., k-1, \tag{28}$$

где матрицы P_i пересчитываются рекуррентно по формуле (24), начиная с P_0. Получающееся в результате значение P_k совпадает с $P(\alpha)$ (10), (13), (14), а также с результатом $\widehat{P}_k$ алгоритма (16)–(20):

$$P_k = \widehat{P}_k = (\operatorname{tr} V P_k)^{1/2} \left(\frac{A^k P_0 (A^{\mathrm{T}})^k}{[\operatorname{tr} V A^k P_0 (A^{\mathrm{T}})^k]^{1/2}} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{A^i B B^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}})^i}{[\operatorname{tr} V A^i B B^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}})^i]^{1/2}} \right). \tag{29}$$

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Заметим, что метод (24), (28) неудобен для рекуррентного применения, так как каждый раз при поиске новой оценки на следующем шаге $k+1$ приходится пересчитывать все предыдущие значения параметров $\gamma_0, ..., \gamma_k$ и матриц $P_1, ..., P_k$. Тем не менее это представляется возможным для небольших k.

С другой стороны, используя (24), легко показать, что минимальная по критерию следа внешняя эллипсоидальная оценка $E(0, P_\gamma)$ множества D_∞, получаемая на основе теоремы 1, всегда проигрывает в точности аппроксимации соответствующей предельной оценке $E(0, \widehat{P}_\infty)$ из теоремы 2. Действительно, если в (24) взять $\gamma_i \equiv \gamma \in (\rho_A^2, 1)$, то в силу теоремы Ляпунова получим

$$P_\gamma = \lim_{k\to\infty} P_k\,, \tag{30}$$

и, поскольку при сужении допустимого множества минимум не убывает,

$$\operatorname{tr} V P_k \geq \operatorname{tr} V \widehat{P}_k\,, \tag{31}$$

где матрица $\widehat{P}_k$ — результат алгоритма (16)–(20) или, что то же самое, алгоритма (24), (27). Отсюда, переходя к пределу при $k \to \infty$, с учетом теоремы 2 получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3. Пусть матрица A устойчива, а P_γ и $\widehat{P}_\infty$ определены в теоремах 1 и 2 соответственно. При любой весовой матрице $V > 0$ справедливо неравенство:

$$\min_{\gamma \in (\rho_A^2, 1)} \operatorname{tr} V P_\gamma \geq \operatorname{tr} V \widehat{P}_\infty \,. \tag{32}$$

4. Локально-оптимальный рекуррентный алгоритм

На основе леммы 1 и соотношения (24) можно также построить более простой в вычислительном отношении рекуррентный алгоритм эллипсоидального оценивания (см. [5, 7]) для исходной системы (1), аппроксимируя на каждом шаге сумму только двух эллипсоидов. Действительно, при некоторых начальных c_0 и $P_0 \geq 0$ рассмотрим последовательность эллипсоидов $E_k = E(c_k, P_k)$ с

$$c_{k+1} = A c_k, \qquad P_{k+1} = \frac{A P_k A^{\mathrm{T}}}{\gamma_k} + \frac{B B^{\mathrm{T}}}{1 - \gamma_k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

где параметр γ_k есть решение выпуклой одномерной задачи оптимизации

$$\gamma_k = \operatorname*{argmin}_{0 < \gamma_k < 1} \operatorname{tr} V P_{k+1}. \tag{34}$$

Тогда $E_k \supseteq D_k$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ Рекуррентный алгоритм (33), (34) требует менее громоздких вычислений, чем прямой метод (16)–(20). Более того, согласно замечанию 1 на каждом шаге он дает локально-оптимальные эллипсоиды. Однако в глобальном смысле оптимальность, как правило, не сохраняется, и точность рекуррентных оценок иногда значительно уступает точности прямого, нерекуррентного метода (16)–(20).

Заметим, что центры рекуррентных эллипсоидов $c_k = A^k c_0$ сходятся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому асимптотика этих оценок полностью зависит от поведения их матриц.

Без ограничения общности полагаем начальный фазовый вектор x_0 системы (1) принадлежащим ограниченному эллипсоиду $E(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$ с центром в нуле. Решение задачи минимизации (34) дает локально-оптимальные параметры

$$\gamma_k = \frac{(\operatorname{tr} V A P_k A^{\mathrm{T}})^{1/2}}{(\operatorname{tr} V A P_k A^{\mathrm{T}})^{1/2} + (\operatorname{tr} V B B^{\mathrm{T}})^{1/2}} \tag{35}$$

и позволяет выписать алгоритм (33), (34) в явном виде:

$$P_{k+1} = \frac{\alpha_k + \beta}{\alpha_k} A P_k A^{\mathrm{T}} + \frac{\alpha_k + \beta}{\beta} B B^{\mathrm{T}}, \tag{36}$$

где

$$\alpha_k = \sqrt{\operatorname{tr} V A P_k A^{\mathrm{T}}}, \qquad \beta = \sqrt{\operatorname{tr} V B B^{\mathrm{T}}}\,. \tag{37}$$

При этом $E(0, P_k) \supseteq D_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, как следствие леммы 1.

Л е м м а 4. Матричная последовательность (36) с коэффициентами (37) является ограниченной тогда и только тогда, когда матрица A устойчива.

Доказательство. См. [11].

Итак, пусть матрица A системы устойчива, т.е. $\rho_A < 1$. Из ограниченности последовательности следует существование некоторого набора ее предельных точек. Исследуем предельные точки последовательности (36) и приведем достаточное условие ее глобальной сходимости к точке равновесия. Поскольку $P_0 \neq 0$, то и $P_k \neq 0$, $\forall\, k = 1, 2, 3, \ldots$ Положим тогда

$$Q_k = \frac{P_k}{\sqrt{\operatorname{tr} V P_k}}\,. \tag{38}$$

Поскольку из (36), (37) следует $\operatorname{tr} V P_{k+1} = (\alpha_k + \beta)^2$, для преобразованной матричной последовательности получаем следующее, более удобное для исследования, рекуррентное уравнение:

$$Q_{k+1} = \nu_k A Q_k A^{\mathrm{T}} + C, \qquad \nu_k = \left(\frac{\operatorname{tr} V Q_k}{\operatorname{tr} V A Q_k A^{\mathrm{T}}}\right)^{1/2}, \tag{39}$$

где $C = BB^{\mathrm{T}}/\beta \geq 0$, $\beta \neq 0$. Преобразование (38) устанавливает взаимно однозначное соответствие между неотрицательно определенными матрицами P_k и Q_k последовательностей (36) и (39) соответственно. Следовательно, их предельное поведение идентично. В частности, следуя лемме 4, устойчивость матрицы A есть необходимое и достаточное условие ограниченности также и последовательности Q_k. Исследуем далее асимптотические свойства преобразованного рекуррентного алгоритма (39).

4.1. Равновесие

Точки равновесия уравнения (39), если таковые существуют, являются решениями уравнения

$$Q = \nu_Q A Q A^{\mathrm{T}} + C, \qquad \nu_Q = \left(\frac{\operatorname{tr} V Q}{\operatorname{tr} V A Q A^{\mathrm{T}}}\right)^{1/2}. \tag{40}$$

Т е о р е м а 4. Для любой неотрицательно определенной матрицы $C \neq 0$ существует единственное решение нелинейного матричного уравнения (40) среди неотрицательно определенных матриц Q в том и только в том случае, когда матрица A является устойчивой. При этом значение параметра ν_Q лежит в интервале $1 < \nu_Q < 1/\rho_A^2$.

Доказательство теоремы см. в Приложении.

Таким образом, рекуррентное уравнение (39) имеет одну единственную точку равновесия Q^*. Она может быть найдена путем численного решения уравнения (40). Последующее применение обратного к (38) преобразования, т.е. переход к матрицам P, приведет к вычислению матрицы P^* равновесного эллипсоида, содержащего предельное множество достижимости D_∞ системы. Представляло бы несомненный интерес исследование этой точки равновесия на локальную устойчивость. Однако оно встречается с некоторыми трудностями, и его рассмотрение мы здесь опустим, сконцентрировавшись на глобальной сходимости.

4.2. Сходимость

Сформулируем достаточные условия сходимости рекуррентного алгоритма (39), справедливость которых основывается на уже установленной единственности точки равновесия и доказательстве отсутствия других предельных точек последовательности $\{Q_k\}$.

Л е м м а 5. *Пусть матрица $C \geq 0$, $C \neq 0$. Для любой устойчивой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ найдется такая весовая матрица $V = U^{\mathrm{T}}U > 0$, для которой преобразованная матрица $\widetilde{A} = UAU^{-1}$ имеет наибольшее сингулярное значение $\sigma_{\max}(\widetilde{A}\,) < 1$, а решение $Q = Q^*$ уравнения (40) удовлетворяет неравенству*

$$\nu_{Q^*} \leq \sigma_{\max}^{-2}(\widetilde{A}\,)\,. \tag{41}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть матрица A устойчива, $C \geq 0$, $C \neq 0$, а весовая матрица $V = U^{\mathrm{T}}U > 0$ выбрана таким образом, что преобразованная матрица $\widetilde{A} = UAU^{-1}$ имеет $\sigma_{\max}(\widetilde{A}\,) < 1$ и решение $Q = Q^*$ уравнения (40) удовлетворяет неравенству (41). Тогда матричная последовательность $\{Q_k\}$, порождаемая алгоритмом (39) при произвольном начальном $Q_0 \geq 0$, сходится к точке равновесия Q^*, однозначно определяемой уравнениями (40).*

Доказательства леммы и теоремы приведены в Приложении.

Таким образом, локально-оптимальный алгоритм (39), а значит и алгоритм в исходных переменных (36), (37), порождают сходящуюся последовательность эллипсоидальных внешних оценок множеств D_k, в пределе при $k \to \infty$ содержащих D_∞. Однако из соотношений (9) и (36) видно, что предельная матрица P_∞ принадлежит семейству $\{P_\gamma\}$ из теоремы 1, а значит, эллипсоид $E(0, P_\infty)$ является, вообще говоря, менее точной оценкой множества D_∞ по сравнению с оптимальным эллипсоидом $E(0, P_\gamma)$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{tr} VP_k \geq \min_{\gamma\in(\rho_A^2,1)} \operatorname{tr} VP_\gamma\,. \tag{42}$$

Отметим, что в литературе для аналогичных задач известны лишь существенно более жесткие достаточные условия сходимости эллипсоидальных оценок. Например, в [5] для динамических систем в непрерывном времени проводится анализ асимптотического поведения аппроксимирующих эллипсоидов только в классе диагональных матриц, что позволяет разложить исходную систему на n простых подсистем, описываемых скалярными уравнениями. В [13, 14] даны условия локальной сходимости эллипсоидов в окрестности точек равновесия. Тем самым теорема 5 по характеру результатов сильнее упомянутых выше.

Сходимость рекуррентного эллипсоидального алгоритма (39), а значит и (36), является еще одним привлекательным свойством критерия следа при его использовании для нахождения эллипсоида минимального размера по сравнению с другими критериями, например с критерием минимальности объема (см. [11]).

5. Выбор весовой матрицы

Рассмотрим для простоты частный случай, когда матрица A не вырождена и имеет n различных собственных значений. Тогда (см., например, [16]) существует вещественное преобразование подобия $\widetilde{A} = UAU^{-1}$, приводящее A к блочно-диагональному виду, а именно: матрица $\widetilde{A}$ имеет (ненулевыми) лишь диагональные блоки размера 1×1 из вещественных собственных значений $\lambda_j(A)$ и размера 2×2, соответствующие комплексно-сопряженным парам невещественных собственных значений $\lambda_j(A) = |\lambda_j(A)| \exp\{\cos\varphi_j \pm i \sin\varphi_j\}$ и представимые в виде

$$|\lambda_j(A)| \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что произвольная k-я степень $\widetilde{A}^k$, $k \geq 1$, повторяет блочно-диагональную структуру матрицы $\widetilde{A}$, причем матрица $\widetilde{A}^k(\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^k$ диагональна, а именно

$$\widetilde{A}^k(\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^k = \operatorname{diag}\{\, |\lambda_1(A)|^{2k}, \ldots, |\lambda_n(A)|^{2k} \,\}. \tag{43}$$

Предположим также, что преобразованная матрица $\widetilde{B} = UB$ такова, что при некоторых $m \geq 0$ и $\nu_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, m$, справедливо разложение

$$\widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}} = \sum_{k=0}^{m} \nu_k \widetilde{A}^k(\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^k. \tag{44}$$

Пусть, кроме того, матрица эллипсоида $E(0, \widetilde{P}_0)$ (начальных состояний в преобразованном пространстве $\widetilde{x} = Ux$) также допускает представление типа (44), т.е. для некоторых $l \geq 0$ и $\nu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, l$, справедливо разложение

$$\widetilde{P}_0 = \sum_{k=0}^{l} \mu_k \widetilde{A}^k(\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^k. \tag{45}$$

Заметим, что в силу (43) условия (44), (45) с необходимостью означают, что матрицы $\widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}$ и $\widetilde{P}_0$ диагональны. Таким образом, в соответствии с (13) диагональны и матрицы эллипсоидов-слагаемых множества достижимости $\widetilde{D}_{N-1}$

$$\widetilde{Q}_0 = \widetilde{A}^N \widetilde{P}_0 (\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^N, \qquad \widetilde{Q}_k = \widetilde{A}^k \widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}} (\widetilde{A}^{\mathrm{T}})^k, \quad k \geq 1,$$

а значит, эллипсоиды $E(0, \widetilde{Q}_k)$ соосны (в преобразованном пространстве).

В соответствии с леммой 2 описанная здесь ситуация наиболее благоприятна для применения алгоритма (16)–(20) эллипсоидального оценивания множества достижимости $\widetilde{D}_{N-1}$, представляющего собой сумму N соосных эллипсоидов. При этом весовая матрица определяется указанной выше матрицей преобразования U по формуле

$$V = U^{\mathrm{T}} U\,,$$

а применение критерия следа $f_I(\widetilde{P}) = \operatorname{tr} \widetilde{P}$ в преобразованном фазовом пространстве эквивалентно использованию критерия взвешенного следа $f_V(P) = \operatorname{tr} VP$ в исходном

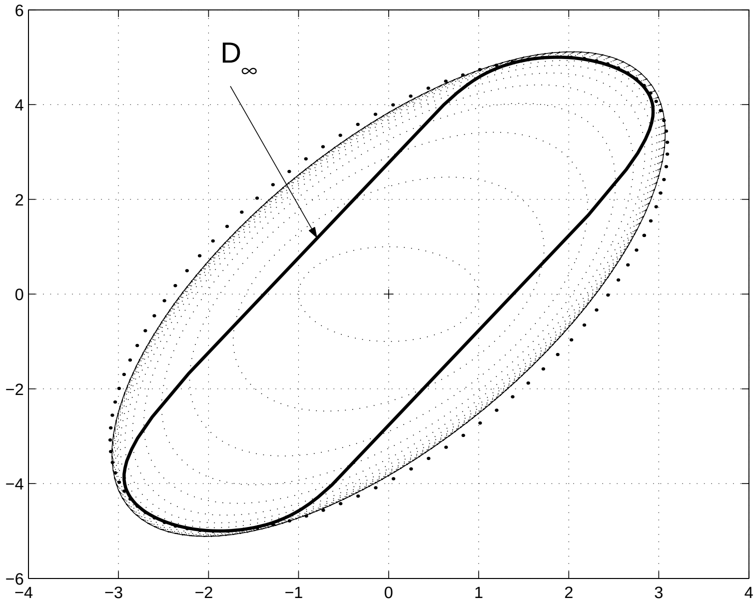

Рис. 2: Сходимость оценок при $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} < 1$ и $V = I$.

фазовом пространстве. Отметим, что все вычисления в алгоритме (16)–(20) производятся в исходном фазовом пространстве и никакого преобразования не производится. При этом в силу теоремы 2 алгоритм приводит к эллипсоиду, оптимальному по критерию взвешенного следа среди всех эллипсоидов, содержащих множество достижимости D_{N-1}. Естественно, V не зависит от N, а определяется лишь матрицей A.

Если условие (44) не выполняется, то при указанном выборе весовой матрицы V нельзя утверждать, что полученный по алгоритму (16)–(20) эллипсоид глобально оптимален; это же справедливо и в отношении условия (45), роль которого, однако, не столь существенна при достаточно больших N, а в пределе при $N \to \infty$ и вовсе исчезает. В то же время точность эллипсоидальных оценок остается достаточно высокой и, как правило, значительно лучшей по сравнению со случаем $V = I$.

При произвольной (устойчивой) матрице A всегда существует вещественное преобразование подобия $\widetilde{A} = U_\varepsilon A U_\varepsilon^{-1}$, приводящее A к блочно-диагональному виду с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ [16]. В этом случае весовую матрицу рекомендуется выбирать равной $V = U_\varepsilon U_\varepsilon^{\mathrm{T}}$. Эта общая рекомендация применима и к локально-оптимальному алгоритму (39), поскольку выбор достаточно малого $\varepsilon > 0$ обеспечивает выполнение условий теоремы 5, гарантирующих сходимость порождаемых эллипсоидов.

6. Численные примеры

Начнем с простого примера, в котором при построении рекуррентных оценок по критерию следа естественно взять единичную весовую матрицу $V = I$.

П р и м е р 2. Пусть задана линейная динамическая система с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A^{\mathrm{T}}A$ устойчива (ее спектральный радиус равен $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} = 0,7352$), поэтому возьмем $V = I$. Выполнение условия (41) легко проверяется с помощью леммы 5. Эллипсоиды $E(0, P_k)$, порождаемые локально-оптимальным алгоритмом (36), сходятся к предельному с матрицей

$$P_\infty \simeq \begin{pmatrix} 9{,}4400 & 10{,}4167 \\ 10{,}4167 & 26{,}1727 \end{pmatrix}$$

при любых начальных условиях. В частности, на рис. 2 показано асимптотическое поведение этих оценок, когда начальный эллипсоид есть единичный круг. Заметим, что предельный эллипсоид $E(0, P_\infty)$ (тонкая сплошная линия) очень хорошо аппроксимирует предельное множество достижимости D_∞, граница которого представлена жирной линией. При этом он практически не отличается от минимального эллипсоида $E(0, P)$ (точечная линия на рис. 2) из однопараметрического семейства (9), полученного по теореме 1. В рассматриваемом случае

$$P \simeq \begin{pmatrix} 9{,}5761 & 9{,}5182 \\ 9{,}5182 & 25{,}0540 \end{pmatrix},$$

а $\mathrm{tr}\, P_\infty = 35{,}6127$ и $\mathrm{tr}\, P = 34{,}6301$. Тем самым, для случая устойчивой матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ можно считать, что рекуррентный алгоритм (36) представляет собой простой и эффективный итеративный метод поиска внешней эллипсоидальной оценки предельного множества достижимости D_∞ динамической системы (1). $\square$

Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что сходимость (36) при $V = I$, по-видимому, имеет место и при простом требовании устойчивости матрицы A. Однако доказать этот факт пока не удается. С другой стороны, его ценность с практической точки зрения была бы весьма незначительной, поскольку при $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} \gg 1$ размер предельного эллипсоида (при $V = I$) получается неудовлетворительным в сравнении с предельным множеством достижимости D_∞. Проиллюстрируем это на следующем примере.

П р и м е р 3. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A системы устойчива, но имеет существенный по величине недиагональный элемент, из-за чего $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} \gg 1$. Предельное множество достижимости для этого случая показано на рис. 3 жирной линией. Вычисления показывают, что при $V = I$ и любом начальном эллипсоиде $E(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$, рекуррентный алгоритм (36) сходится к предельному эллипсоиду $E(0, P_\infty)$ с матрицей

$$P_\infty \simeq \begin{pmatrix} 5{,}8764 & 0{,}7680 \\ 0{,}7680 & 0{,}1578 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

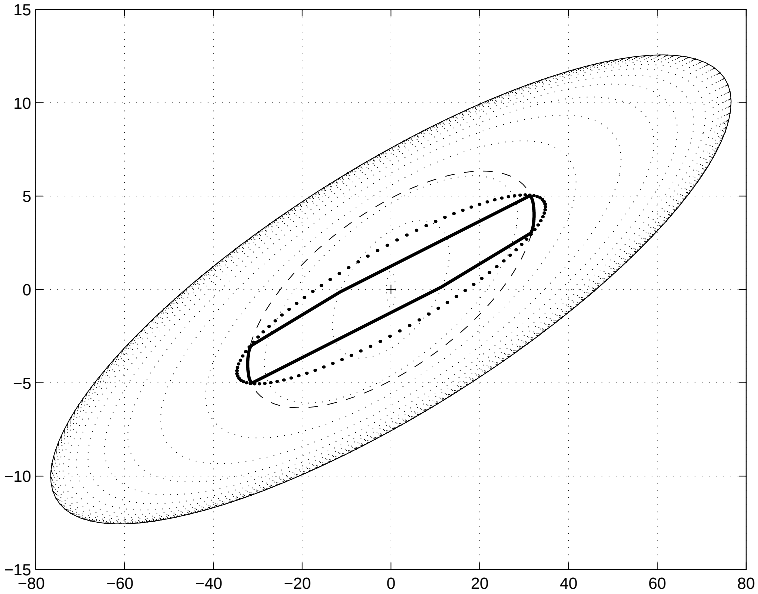

Рис. 3: Поведение оценок при $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} \gg 1$ и $V = I$.

Эллипсоид $E(0, P_\infty)$ показан на рис. 3 тонкой сплошной линией. Из рисунка видно, что эта оценка является сильно завышенной в сравнении с минимальным по следу эллипсоидом $E(0, P)$ (точечная линия), полученным по теореме 1, и в сравнении с эллипсоидом $E(0, \widehat{P}_\infty)$ (пунктирная линия), где матрица $\widehat{P}_\infty$ из теоремы 2. $\square$

Таким образом, если $\rho_A \ll \|A\|$, т.е. спектральная матричная норма сильно превышает (в несколько раз) ее спектральный радиус, то использование рекуррентного алгоритма (36) с единичной весовой матрицей $V = I$ для внешней аппроксимации множеств достижимости динамической системы при больших k нецелесообразно.

П р и м е р 4. В условиях примера 3 все вычисления повторены при весовой матрице

$$V = \begin{pmatrix} 1{,}0 & \text{-}8{,}3333 \\ \text{-}8{,}3333 & 139{,}8889 \end{pmatrix} = U^{\mathrm{T}}U\,, \qquad U = \begin{pmatrix} 1{,}0 & \text{-}8{,}3333 \\ 0 & 8{,}3931 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

При этом матрица U приводит A к диагональной $\widetilde{A} = UAU^{-1} = \mathrm{diag}\{0{,}2; 0{,}8\}$. На рис. 4 множество D_∞ и соответствующие эллипсоиды обозначены так же, как их аналоги в примере 3. Видно, как сильно возросла точность оценивания, в частности, локально-оптимальным алгоритмом (36) за счет правильного выбора весовой матрицы V. $\square$

6. Заключение

Предложено однопараметрическое семейство внешних эллипсоидальных оценок предельного множества достижимости для устойчивой линейной динамической системы, причем оптимальная среди них находится решением выпуклой одномерной задачи оптимизации. Исследовано асимптотическое поведение рекуррентных алгоритмов оценивания для систем с дискретным временем. Доказано достаточное условие сходимости

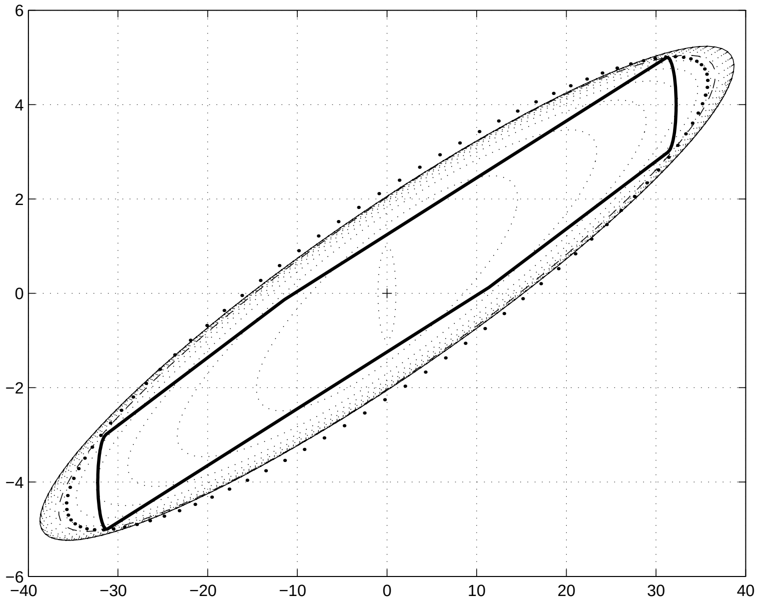

Рис. 4: Поведение оценок при $\rho_{A^{\mathrm{T}}A} \gg 1$ и $V = UU^{\mathrm{T}}$ (46).

локально-оптимального по критерию следа рекуррентного алгоритма. Показано, что оценки по этому методу могут оказаться сильно завышенными. В этой связи предлагается использовать критерий следа с весовой матрицей, правильный выбор которой дает более эффективные эллипсоидальные аппроксимации областей достижимости.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 1.   Из (2) следует, что опорная функция предельного множества достижимости D_∞ равна

$$\varphi_\infty(d) \doteq \sup_{x\in D_\infty} d^{\mathrm T}x = \sum_{i=0}^{\infty} \|(A^iB)^{\mathrm T}d\|\,, \quad d\in\mathbb{R}^n\,. \tag{П.1}$$

Таким образом, множество D_∞ есть набор точек $x\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $d^{\mathrm T}x \ \le\ \varphi_\infty(d)$ для любого вектора $d\in\mathbb{R}^n$. В частности, отсюда видно, что это есть выпуклое замкнутое множество, симметричное относительно начала координат.

Рассмотрим эллипсоид $E(0,P_\gamma)$ с матрицей, удовлетворяющей уравнению Ляпунова (9) для любого $\gamma\in(\rho_A^2,\,1)$. Так как матрица $A/\sqrt{\gamma}$ устойчива, то по теореме Ляпунова это уравнение имеет единственное решение $P_\gamma\ge 0$, поскольку $BB^{\mathrm T}\ge 0$. Кроме того,

$$P_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kBB^{\mathrm T}(A^k)^{\mathrm T}}{\gamma^k(1-\gamma)}\,.$$

Тогда опорная функция эллипсоида $E(0,P_\gamma)$ равна

$$\begin{aligned}\varphi_{E(0,P_\gamma)}(d) \ &=\ \sqrt{d^{\mathrm T}P_\gamma\, d} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^{\mathrm T}A^kBB^{\mathrm T}(A^k)^{\mathrm T}d}{\gamma^k(1-\gamma)}\right)^{1/2} \ \ge \\ &\ge\ \left(\inf_{\{\alpha_k\}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|(A^kB)^{\mathrm T}d\|^2}{\alpha_k}\right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\|(A^kB)^{\mathrm T}d\| = \varphi_\infty(d)\,,\end{aligned}$$

где inf берется по всем последовательностям $\{\alpha_k\}_{k\ge0}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию нормировки $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i = 1$. Заметим, что одной из таких последовательностей является $\alpha_k = (1-\gamma)\gamma^k$. Итак, для любого вектора $d\in\mathbb{R}^n$ и любого γ из интервала $(\rho_A^2,\,1)$ справедливо неравенство для опорных функций $\varphi_{E(0,P_\gamma)}(d)\ge\varphi_\infty(d)$. Значит, $E(0,P_\gamma)\supseteq D_\infty$.

Далее, так как $\operatorname{tr} VA^kBB^{\mathrm T}(A^k)^{\mathrm T}\ge 0$, а при некоторых $k\ge 0$ это неравенство строгое, функция

$$\varphi(\gamma) \doteq\ \operatorname{tr} VP_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tr} VA^kBB^{\mathrm T}(A^k)^{\mathrm T}}{\gamma^k(1-\gamma)}$$

есть сумма строго выпуклых функций на интервале $(\rho_A^2,\,1)$. Действительно,

$$\frac{1}{\gamma^k(1-\gamma)} = \frac{1}{1-\gamma} + \sum_{j=1}^{k}\gamma^{-j}\,,$$

а функции $(1-\gamma)^{-1}$ и γ^{-j} строго выпуклы при любом $j\ge 1$. Следовательно, $\varphi(\gamma)$ строго выпукла, и теорема доказана полностью. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Без ограничения общности считаем матрицы Q_i диагональными, с положительными диагональными элементами, а матрицы U и V единичными (поскольку преобразование (6) пространства состояний, $\widetilde{x} = Ux$, с исходной матрицей U приводит именно к этому случаю). Опорная функция $\varphi_P(d)$ невырожденного эллипсоида $E(0,P)$ равна

$$\varphi_P(d) = \max_{x\in E(0,P)} x^{\mathrm{T}} d = \sqrt{d^T P d}\,, \quad d \in \mathbb{R}^n\,, \tag{П.2}$$

и для диагональных матриц P при $d = e_n = (1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$ получаем $\varphi_P(e_n) = \sqrt{\operatorname{tr} P}$. Аналогично (П.1) опорная функция суммы S_N при $d = e_n$ в силу диагональности Q_i дает

$$\varphi_S(e_n) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{d^T Q_i d} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\operatorname{tr} Q_i}\,. \tag{П.3}$$

Нетрудно убедиться, что в задаче минимизации следа $\operatorname{tr} P$ на множестве всех эллипсоидов $E(c,P)$, содержащих внутри себя сумму S_N эллипсоидов $E(0,Q_i)$ с диагональными матрицами Q_i, достаточно ограничиться центральными эллипсоидами с диагональными же матрицами P. Действительно, каждый из эллипсоидов $E(0,Q_i)$ инвариантен относительно любого (ортогонального) преобразования $\widetilde{x} = U_{\pm} x$ с $U_{\pm} = \operatorname{diag}\{\pm 1,\dots,\pm 1\}$; следовательно, такой же инвариантностью обладает и их сумма S_N. Кроме того, $\operatorname{tr} U_{\pm} P U_{\pm}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr} P$ для любой матрицы P в силу ортогональности $U_{\pm}$. Таким образом, минимальный эллипсоид $E(c,P)$, будучи единственным (см. [7, 10]), обладает той же инвариантностью, а значит, вектор c и матрица P удовлетворяют уравнениям

$$c = U_{\pm} c, \quad P = U_{\pm} P U_{\pm}^{\mathrm{T}} \tag{П.4}$$

для любой из 2^n матриц $U_{\pm}$. Отсюда $c = 0$, а матрица P диагональна.

Итак, учитывая вышесказанное, полагаем вектор $c = 0$ и рассматриваем диагональные матрицы $P > 0$, для которых

$$\psi(P) = \min_{d\in\mathbb{R}^n} \left(\varphi_P(d) - \varphi_S(d)\right) \geq 0\,. \tag{П.5}$$

Тогда (в классе диагональных матриц P)

$$\min_{\psi(P)\geq 0} \operatorname{tr} P \geq \min_{\varphi_P(e_n)\geq\varphi_S(e_n)} \operatorname{tr} P = \varphi_S^2(e_n) = \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\operatorname{tr} Q_i}\right)^2. \tag{П.6}$$

Но правая часть (П.6) совпадает с минимумом в задаче (10):

$$\min_{\alpha\in\mathcal{A}_N} \operatorname{tr} P(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\operatorname{tr} Q_i}\right)^2. \tag{П.7}$$

С учетом леммы 1 доказательство завершено. □

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы   2. Пусть матрицы $\widehat{P}_k$ и P_k получены в силу алгоритмов (16)–(20) и (24), (27) соответственно. Последовательности матриц $\widehat{P}_k = P_k$ ограниченны, поскольку из соотношений (30), (31) и леммы 3 для произвольного $\gamma \in (\rho_A^2, 1)$ следует

$$\text{(П.8)} \qquad \operatorname{tr} VP_\gamma \geq \limsup_{k\to\infty} \operatorname{tr} V\widehat{P}_k = \limsup_{k\to\infty} \operatorname{tr} VP_k\,.$$

Далее, рассмотрим выражение (15)

$$(\operatorname{tr} VP_k)^{1/2} = \big[\operatorname{tr} VA^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k\big]^{1/2} + \sum_{i=0}^{k-1}\big[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i\big]^{1/2}.$$

Первое слагаемое в его правой части стремится к нулю при $k \to \infty$, так как матрица A устойчива. Второе слагаемое в его правой части представляет собой ряд из положительных элементов, значение которого монотонно возрастает с ростом k и ограничено. Отсюда следует сходимость для $\operatorname{tr} VP_k$:

$$\text{(П.9)} \qquad (\operatorname{tr} VP_k)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{\infty}\big[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i\big]^{1/2}.$$

Для доказательства сходимости матриц P_k запишем (29) в виде

$$\text{(П.10)} \qquad P_k = \frac{A^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k}{\alpha_0} + (\operatorname{tr} VP_k)^{1/2}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{A^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i}{[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i]^{1/2}}\,,$$

где $\alpha_0 = (\operatorname{tr} VA^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k)^{1/2}/(\operatorname{tr} VP_k)^{1/2}$. Первое слагаемое в нем, $A^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k/\alpha_0$, есть неотрицательно определенная матрица, которая стремится к нулевой с ростом k, так как след

$$\operatorname{tr} V(A^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k)\,/\,\alpha_0 = \sqrt{\operatorname{tr} VP_k \,\cdot\, \operatorname{tr}(A^kP_0(A^{\mathrm{T}})^k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

поскольку $A^k \to 0$ и $(A^{\mathrm{T}})^k \to 0$ при $k \to \infty$. Теперь для сходимости матриц P_k достаточно показать сходимость сумм, фигурирующих в правой части (П.10). Но эти суммы монотонно не убывают и ограничены, а значит, сходятся. Таким образом, доказана сходимость P_k к конечному пределу

$$\widehat{P}_\infty = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\big[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i\big]^{1/2}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i}{[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i]^{1/2}}\right),$$

что совпадает с выражением (21), (22). Отсюда непосредственно следует выражение и для следа

$$\operatorname{tr} V\widehat{P}_\infty = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\big[\operatorname{tr} VA^iBB^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i\big]^{1/2}\right)^2 < \infty.$$

Теорема доказана полностью. □

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Равенства $P_k = \widehat{P}_k = P(\alpha)$ получены непосредственно перед формулировкой данной леммы, а выражение (29) непосредственно вытекает из соотношений (10), (13)–(15). Докажем (28).

Минимизацию (27) можно осуществить, последовательно проходя все γ_i в обратном порядке, т.е. сначала по γ_{k-1}, затем по γ_{k-2} и т.д. Действительно, матрица P_k из (25) представляется в виде

$$P_k = \frac{AP_{k-1}A^{\mathrm{T}}}{\gamma_{k-1}} + \frac{BB^{\mathrm{T}}}{1-\gamma_{k-1}},$$

где P_{k-1} уже от γ_{k-1} не зависит. Минимизация $\mathrm{tr}\ VP_k$ по γ_{k-1} дает единственное решение (в силу выпуклости, см. [7, 9]), причем решение находится аналитически. Имеем

$$\text{(П.11)} \qquad \min_{0<\gamma_0,\dots,\gamma_{k-2},\gamma_{k-1}<1} \mathrm{tr}\ VP_k = \left[\left(\min_{0<\gamma_0,\dots,\gamma_{k-2}<1} \mathrm{tr}\ VAP_{k-1}A^{\mathrm{T}}\right)^{1/2} + \beta_0\right]^2,$$

где $\beta_0 = \sqrt{\mathrm{tr}\ VBB^{\mathrm{T}}}$, а оптимальное значение

$$\gamma_{k-1} = \frac{\left(\mathrm{tr}\ VAP_{k-1}A^{\mathrm{T}}\right)^{1/2}}{(\mathrm{tr}\ VAP_{k-1}A^{\mathrm{T}})^{1/2} + (\mathrm{tr}\ VBB^{\mathrm{T}})^{1/2}}\,.$$

Аналогично теперь представляя

$$AP_{k-1}A^{\mathrm{T}} = \frac{A^2P_{k-2}(A^{\mathrm{T}})^2}{\gamma_{k-2}} + \frac{ABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}{1-\gamma_{k-2}}$$

и минимизируя $\mathrm{tr}\ VAP_{k-1}A^{\mathrm{T}}$ по γ_{k-2}, получаем

$$\text{(П.12)} \min_{0<\gamma_0,\dots,\gamma_{k-3},\gamma_{k-2}<1} \mathrm{tr}\ VAP_{k-1}A^{\mathrm{T}} = \left[\left(\min_{0<\gamma_0,\dots,\gamma_{k-3}<1} \mathrm{tr}\ VA^2P_{k-2}(A^{\mathrm{T}})^2\right)^{1/2} + \beta_1\right]^2,$$

где $\beta_1 = \sqrt{\mathrm{tr}\ VABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}$, а оптимальное значение

$$\gamma_{k-2} = \frac{\left(\mathrm{tr}\ VA^2P_{k-2}(A^{\mathrm{T}})^2\right)^{1/2}}{(\mathrm{tr}\ VA^2P_{k-2}(A^{\mathrm{T}})^2)^{1/2} + (\mathrm{tr}\ VABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})^{1/2}}.$$

Таким же образом последовательно находятся и остальные $\gamma_{k-3}, \dots, \gamma_0$. Итак, все γ_i для $i = 0, 1, \dots, k-1$ удовлетворяют (28). Лемма доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Достаточно провести доказательство для случая единичной весовой матрицы $V = I$. Действительно, именно к этому случаю (эквивалентным образом) сводится формулировка данной теоремы, если перейти к преобразованным матрицам $\widetilde{A} = UAU^{-1}$, $\widetilde{B} = UB$ и $\widetilde{P} = UPU^{\mathrm{T}}$, где невырожденная матрица преобразования U удовлетворяет соотношению $V = U^{\mathrm{T}}U$, см. (4)–(7). Поэтому далее считаем $V = I$.

Рассмотрим скалярное уравнение $\nu^2 = f(\nu)$, где $f(\nu) = \frac{\operatorname{tr} Q(\nu)}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}}$, в котором $Q(\nu)$ есть решение уравнения Ляпунова $Q = \nu AQA^{\mathrm{T}} + C$ для некоторого фиксированного параметра ν такого, что $0 < \nu < 1/\rho(A)^2$. Распишем

$$\begin{aligned} Q &= \nu AQA^{\mathrm{T}} + C, & \frac{dQ}{d\nu} &= \nu A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}} + AQA^{\mathrm{T}}, \\ \operatorname{tr} Q &= \nu \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr} C, & \operatorname{tr} \frac{dQ}{d\nu} &= \nu \operatorname{tr} \left(A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}} \right) + \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Заметим, что матрицы $Q(\nu)$ и $\frac{dQ}{d\nu}$ неотрицательно определенные при $0 < \nu < 1/\rho(A)^2$.

Прямо: Пусть уравнение (40) имеет единственное решение $Q \geq 0$. Предположим обратное, а именно, что $\rho_A \geq 1$. Тогда для того, чтобы при фиксированном ν уравнение Ляпунова $Q = \nu AQA^{\mathrm{T}} + C$ с $C \geq 0$ имело неотрицательно определенное решение, необходимо и достаточно, чтобы $0 < \nu < 1/\rho_A^2 \leq 1$.
Однако при любых ν таких, что $0 < \nu \leq 1$, функция $f(\nu) = \frac{\operatorname{tr} Q(\nu)}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} = \nu + \frac{\operatorname{tr} C}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} > \nu > \nu^2$, и уравнение (40) не имеет решения, что противоречит условию. Значит, $\rho_A < 1$.

Обратно: Пусть матрица A устойчива. Тогда уравнение Ляпунова $Q = \nu AQA^{\mathrm{T}} + C$ имеет единственное неотрицательно определенное решение при любом фиксированном значении ν из интервала $0 < \nu < 1/\rho_A^2$. Рассмотрим на этом интервале функции $f(\nu)$ и ν^2 и докажем единственность точки пересечения их графиков. Было показано, что $f(\nu) > \nu^2$ на $0 < \nu \leq 1$. Поэтому решения (40) могут быть только на $1 < \nu < 1/\rho_A^2$. При $\nu = 1$ функция $f(\nu) = \nu + \frac{\operatorname{tr} C}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} > 1$. С другой стороны, $\lim_{\nu \to 1/\rho_A^2 - 0} f(\nu) = \lim_{\nu \to 1/\rho_A^2 - 0} \left(\nu + \frac{\operatorname{tr} C}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} \right) = 1/\rho_A^2$, так как при этом $\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}$ стремится к бесконечности. Значит, $\lim_{\nu \to 1/\rho_A^2 - 0} f(\nu) < \nu^2|_{\nu = 1/\rho_A^2} = 1/\rho_A^4$. Отсюда следует, что $f(\nu)$ и ν^2 имеют точки пересечения на этом интервале. Далее рассмотрим производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\nu} f(\nu) = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\operatorname{tr} Q(\nu)}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} \right) &= \frac{1}{(\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2} \left\{ \operatorname{tr} \frac{dQ}{d\nu} \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}} - \operatorname{tr} Q \operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}}) \right\} = \\ &= \frac{1}{(\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2} \left\{ \left(\nu \operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}}) + \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}} \right) \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}} - \operatorname{tr} Q \operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}}) \right\} = \\ &= \frac{1}{(\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2} \left\{ \left(\nu \operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}} - \operatorname{tr} Q \right) \operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}}) + (\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{(\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2} \left\{ -\operatorname{tr} C \operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}}) + (\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2 \right\} = \\ &= 1 - \operatorname{tr} C \frac{\operatorname{tr} (A \frac{dQ}{d\nu} A^{\mathrm{T}})}{(\operatorname{tr} AQA^{\mathrm{T}})^2} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, разность $\nu^2 - f(\nu)$ будет здесь монотонной функцией, так как

$$\frac{d}{d\nu} \left(\nu^2 - f(\nu) \right) = 2\nu - \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\operatorname{tr} Q(\nu)}{\operatorname{tr} AQ(\nu)A^{\mathrm{T}}} \right) > 2\nu - 1 > 0$$

для всех $\nu > 1/2$. Таким образом, показана единственность точки пересечения функций ν^2 и $f(\nu)$, а соответственно и решения уравнения (40). Теорема доказана. $\square$

Доказательство леммы 5. Хорошо известно (см., например, [16]), что для любого $\varepsilon > 0$ найдется невырожденная вещественная матрица преобразования подобия U, при которой $\rho_A > \sigma_{\max}(\widetilde{A}) - \varepsilon$. В частности, если все собственные значения $\lambda_i(A)$ матрицы A простые (т.е. имеют кратность 1), можно обеспечить $\varepsilon = 0$ приведением матрицы A к вещественной блочно-диагональной форме такой, что $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\widetilde{A} = \mathrm{diag}\{|\lambda_1(A)|^2, \ldots, |\lambda_n(A)|^2\}$ и, следовательно, $\rho_A = \sigma_{\max}(\widetilde{A})$. В общем же случае величину $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, при устойчивой матрице A можно обеспечить как устойчивость матрицы $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\widetilde{A}$, так и, с учетом теоремы 4, выполнение неравенства (41). Лемма доказана. $\square$

Для доказательства теоремы 5 получим ряд вспомогательных результатов.

Лемма П.1. Пусть A, $Q = Q^{\mathrm{T}}$ и $Q_0 = Q_0^{\mathrm{T}}$ — вещественные $(n \times n)$-матрицы, и параметр $\beta \geq \mathrm{tr}\, Q_0$; матрицы A и Q_0 фиксированы. Тогда при всех $Q \geq Q_0$ и таких, что $\mathrm{tr}\, Q = \beta$, справедливо неравенство

$$\mathrm{tr}\, AQA^{\mathrm{T}} \leq \mathrm{tr}\, AQ_0A^{\mathrm{T}} + (\beta - \mathrm{tr}\, Q_0)\, \sigma^2_{\max}(A), \tag{П.13}$$

которое становится равенством при

$$Q = Q_0 + (\beta - \mathrm{tr}\, Q_0) H\, diag\{1, 0, \ldots, 0\} H^{\mathrm{T}}. \tag{П.14}$$

Здесь H — ортогональная матрица, приводящая симметрическую матрицу $A^{\mathrm{T}}A$ к диагональному виду, в котором $(1,1)$-элемент представляет собой наибольшее собственное значение, т.е.

$$H^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)H = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \qquad \lambda_1 = \sigma^2_{\max}(A). \tag{П.15}$$

Доказательство. Случай $\beta = \mathrm{tr}\, Q_0$ тривиален, так как допустимое множество матриц Q состоит из единственной точки $Q = Q_0$; поэтому считаем далее $\beta > \mathrm{tr}\, Q_0$. Сделаем замену переменных

$$Z = Q - Q_0 \tag{П.16}$$

и воспользуемся теорией двойственности задач выпуклого программирования (см., например, [17]). Поскольку $\mathrm{tr}\, AZA^{\mathrm{T}} = \langle A^{\mathrm{T}}A, Z\rangle$ и $\mathrm{tr}\, Z = \langle I, Z\rangle$, то имеем для $\beta_0 = \beta - \mathrm{tr}\, Q_0 > 0$

$$\max_{\substack{\mathrm{tr}\, Z = \beta_0 \\ Z \geq 0}} \mathrm{tr}\, AZA^{\mathrm{T}} = \min_{\lambda I \geq A^{\mathrm{T}}A} \beta_0\, \lambda = \beta_0\, \sigma^2_{\max}(A)\,. \tag{П.17}$$

Отсюда, используя обратную замену (П.16), получаем (П.13). Далее, матрица (П.14) удовлетворяет ограничениям $Q \geq Q_0$ и $\mathrm{tr}\, Q = \beta$, а ее подстановка в левую часть неравенства (П.13) превращает последнее в равенство. Лемма доказана. $\square$

Следствие П.1. *В условиях леммы П.1 при* $Q_0 = 0$ *неравенство (П.13) принимает следующий вид:*

(П.18) $$\mathrm{tr}\ AQA^{\mathrm{T}} \leq \sigma^2_{\max}(A)\ \mathrm{tr}\ Q, \qquad \forall\, Q \geq 0\,.$$

Следствие П.2: *В условиях леммы П.1 при* $\beta > 0$

(П.19) $$\max_{\substack{\mathrm{tr}\ Q \leq \beta \\ Q \geq Q_0}} \frac{\mathrm{tr}\ AQA^{\mathrm{T}}}{\mathrm{tr}\ Q} = \frac{\mathrm{tr}\ AQ_0A^{\mathrm{T}} + (\beta - \mathrm{tr}\ Q_0)\sigma_{\max}(A)}{\beta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По неравенству (П.18) правая часть (П.19) представляет собой монотонно не убывающую функцию параметра $\beta > 0$, являясь в силу леммы П.1 максимумом отношения $\mathrm{tr}\ AQA^{\mathrm{T}}/\,\mathrm{tr}\ Q$ по всем $Q \geq Q_0$ при условии $\mathrm{tr}\ Q = \beta$. Отсюда непосредственно следует (П.19). Следствие П.2 доказано. $\square$

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty$ множество предельных точек всех последовательностей $\{Q_k\}_{k\geq 0}$, порождаемых рекуррентным алгоритмом (39) при условии $Q_0 \geq 0$, и введем функции $g(\cdot):\ R^{n\times n}_+ \to R_+$

(П.20) $$g(Q) = \left(\frac{\mathrm{tr}\ Q}{\mathrm{tr}\ AQA^{\mathrm{T}}}\right)^{1/2}, \qquad Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0\,, \quad Q \neq 0,$$

и $Q(\cdot):\ [0, \rho_A^{-2}) \to R^{n\times n}_+$ как решение матричного уравнения Ляпунова

(П.21) $$Q(\nu) = \nu AQ(\nu)A^{\mathrm{T}} + C\,, \qquad 0 < \nu < \rho_A^{-2}\,,$$

т.е.

(П.22) $$Q(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A^k C (A^{\mathrm{T}})^k.$$

Лемма П.2. *Пусть* $\sigma_{\max}(A) < 1$ *и множество всех предельных точек* $\mathcal{Q}_\infty \subseteq \mathcal{Q}_1$, *где*

(П.23) $$\mathcal{Q}_1 = \{Q = Q^{\mathrm{T}} \mid Q \geq X_1,\ \mathrm{tr}\ Q \leq \tau_1\}\,,$$

а параметры X_1 *и* τ_1 *удовлетворяют условиям* $X_1 = X_1^{\mathrm{T}} > 0$ *и* $\mathrm{tr}\ X_1 \leq \tau_1 \leq +\infty$. *Тогда* $\mathcal{Q}_\infty \subseteq \mathcal{Q}_2$, *где*

(П.24) $$\mathcal{Q}_2 = \{Q = Q^{\mathrm{T}} \mid Q \geq X_2,\ \mathrm{tr}\ Q \leq \tau_2\}\,,$$

причем

(П.25) $$X_2 = Q(\nu_*), \qquad \tau_2 = \frac{\nu_*}{\nu_* - 1}\ \mathrm{tr}\ C\,,$$

(П.26) $$\nu_* = \inf_{Q\in\mathcal{Q}_1} g(Q)$$

и

$$\lambda_{\max}^{-1/2}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \le \nu_* \le g(Q^*) = \nu^* \,. \tag{П.27}$$

Доказательство. По определению множества $\mathcal{Q}_\infty$ в нем содержится по крайней мере одна точка, а именно точка равновесия Q^* рекуррентного алгоритма (39), являющаяся единственным корнем уравнения (40). Поэтому из (П.26) вытекает неравенство $\nu_* \le g(Q^*) = \nu^*$, обеспечивающее правое неравенство в (П.27) в силу теоремы 2. Левое неравенство в (П.27) является прямым следствием (П.18). Докажем теперь (П.24)–(П.25).

Итерируя уравнение (39) и учитывая, что $\nu_k = g(Q_k)$ и, следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty} \nu_k \ge \nu_* \,, \tag{П.28}$$

из монотонности (П.22) относительно ν получаем, что для любой предельной точки Q_∞ произвольной последовательности $\{Q_k\}$, порождаемой алгоритмом (П.22), справедливо неравенство

$$Q_\infty \ge Q(\nu_*) = X_2 \,. \tag{П.29}$$

Далее, из (39) следует разностное уравнение

$$\mathrm{tr}\ Q_{k+1} = \nu_k^{-1}\,\mathrm{tr}\ Q_k + \mathrm{tr}\ C\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{П.30}$$

для которого выполняется условие асимптотической устойчивости

$$\limsup_{k\to\infty} \nu_k^{-1} \le (\nu_*)^{-1} \le \left(\sigma_{\max}^2(A)\right)^{1/2} < 1\,, \tag{П.31}$$

обеспечивающее справедливость верхней оценки

$$\limsup_{k\to\infty}\ \mathrm{tr}\ Q_k \le \frac{\mathrm{tr}\ C}{1 - 1/\nu_*} = \tau_2 \,. \tag{П.32}$$

Значит, и $\mathrm{tr}\ Q_\infty \le \tau_2$. В силу произвольности $Q_\infty \subseteq \mathcal{Q}_2$ лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5. Как и при доказательстве теоремы 4, случай произвольной весовой матрицы $V > 0$ без ограничения общности сводится к случаю единичной матрицы $V = I$, который далее и рассматривается (с целью упрощения выкладок).

Многократно используя лемму П.2, построим монотонно не возрастающую последовательность множеств $\mathcal{Q}(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, содержащих $\mathcal{Q}_\infty$ — множество предельных точек всех последовательностей $\{Q_k\}_{k\ge 0}$, порождаемых рекуррентным алгоритмом (39) при произвольном начальном условии $Q_0 \ge 0$. Поскольку $Q_k \ge C$ при всех $k \ge 1$, то в (П.23) можно взять $X_1 = C$, $\tau_1 = +\infty$. Для каждого $i \ge 1$ последовательно, начиная с $i = 1$, полагаем $\mathcal{Q}(i) = \mathcal{Q}_1$ из (П.23) и получаем $\mathcal{Q}(i+1) = \mathcal{Q}_2$ из (П.24), а соответствующую величину ν_* из (П.26) обозначаем через $\nu_*(i)$:

$$\nu_*(i) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}(i)} g(Q) \,. \tag{П.33}$$

По построению $\mathcal{Q}(2) \subseteq \mathcal{Q}(1)$, и, следовательно, $\nu_*(2) \geq \nu_*(1)$. Далее, в силу монотонной зависимости X_2 и τ_2 из (П.25) от ν_* последовательно получаем $\mathcal{Q}(i+1) \subseteq \mathcal{Q}(i)$ и $\nu_*(i+1) \geq \nu_*(i)$ для всех $i \geq 1$. Таким образом, переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем конечный предел $\nu_\infty = \lim_{i\to\infty} \nu_*(i) \leq \nu^*$, и из (П.24)–(П.26)

$$\mathcal{Q}_\infty \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{Q}(i) = \left\{Q = Q^{\mathrm{T}} \mid Q \geq X_\infty,\ \operatorname{tr} Q \leq \tau_\infty\right\}, \tag{П.34}$$

$$X_\infty = Q(\nu_\infty), \qquad \tau_\infty = \frac{\nu_\infty}{\nu_\infty - 1} \operatorname{tr} C\,, \tag{П.35}$$

где с учетом (П.33) и следствия 2 из леммы П.1

$$\nu_\infty = \left(\frac{\tau_\infty}{\operatorname{tr} AX_\infty A^{\mathrm{T}} + (\tau_\infty - \operatorname{tr} X_\infty)\sigma^2_{\max}(A)}\right)^{1/2}. \tag{П.36}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться (с учетом (39), (П.30) и определения точки равновесия Q^*), что система уравнений (П.35)– (П.36) имеет решение

$$X_\infty = Q^*\,, \quad \tau_\infty = \operatorname{tr} Q^*\,, \quad \nu_\infty = \left(\frac{\operatorname{tr} Q^*}{\operatorname{tr} AQ^*A^{\mathrm{T}}}\right)^{1/2}. \tag{П.37}$$

(Заметим, что при условии $\operatorname{tr} X_\infty = \tau_\infty$ других решений и не может быть, так как в соответствии с теоремой 2 система уравнений (П.35)–(П.36) становится эквивалентной (40).) Теперь достаточно показать единственность этого решения при условии $\operatorname{tr} X_\infty \leq \tau_\infty$, поскольку тогда из (П.34) и равенства $\operatorname{tr} X_\infty = \tau_\infty$ вытекает одноточечность множества предельных точек, т.е. $\mathcal{Q}_\infty = \{Q^*\}$. Отметим, что условие $\operatorname{tr} X_\infty \leq \tau_\infty$ эквивалентно неравенству $\nu_\infty \leq \nu^*$ в силу монотонности функций $\operatorname{tr} Q(\nu)$ и $\tau(\nu)$ и того, что $\tau(\nu) = \operatorname{tr} Q(\nu)$ лишь при $\nu = \nu^*$, как уже отмечалось выше.

Исключим из системы (П.35)–(П.36) переменные X_∞ и τ_∞, полагая для краткости $\nu = \nu_\infty$, $\lambda = \sigma^2_{\max}(A)$ и обозначая полученную в правой части (П.36) функцию через $F(\nu)$. После несложных преобразований с учетом уравнения Ляпунова (П.21) полученное уравнение с одним неизвестным ν можно эквивалентным образом переписать в виде

$$F^{-2}(\nu) - \nu^{-2} = \left(\lambda - \nu^{-1}\right)\left(1 - \left(1 - \nu^{-1}\right)\frac{\operatorname{tr} Q(\nu)}{\operatorname{tr} C}\right). \tag{П.38}$$

Таким образом, корни уравнения $F(\nu) = \nu$ могут возникать лишь в тех случаях, когда один из сомножителей правой части (П.38) обращается в нуль. Равенство нулю второго сомножителя возможно лишь при $\nu = \nu^*$, а первый сомножитель имеет единственный корень $\nu = 1/\lambda$, который не лежит слева от точки ν^* по условию данной теоремы. Это и завершает доказательство последней. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16, P. 117–128.

2. *Schweppe F.* Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1973.

3. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

4. *Fogel E., Huang Y.* On the value of information in system identification – bounded noise case // Automatica. 1982. V. 18. P. 229–238.

5. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

6. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

7. *Durieu C., Walter E., Polyak B.T.* Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding // J. Opt. Theory Appl. 2001. V. 111. No. 2. P. 273–303.

8. *Chernousko F.L., Ovseevich A.I.* Properties of optimal ellipsoids approximating the reachable sets of uncertain systems // J. Opt. Theory Appl. 2004. V. 120. No. 2. P. 223–246.

9. *Решетняк Ю.Н.* Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 249–254.

10. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию // АиТ. 1991. № 9. С. 133–144.

11. *Назин С.А.* Предельное поведение эллипсоидальных оценок состояний линейных динамических систем // АиТ. 2001. № 4. С. 91–97.

12. *Nazin S.A., Polyak B.T.* Limiting behavior of bounding ellipsoids for state estimation // Proc. 5th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems. St.-Petersburg, Russia, 2001. P. 585–589; Nonlinear Control Systems 2001, A. Kurzhanskii, A. Fradkov (Eds), Elsevier Science. 2002. V.2. P. 553–558.

13. *Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н.* Асимптотическое поведение эллипсоидальных оценок областей достижимости. I // Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 90–100.

14. *Овсеевич А.И.* Локальное асимптотическое поведение эллипсоидов, ограничивающих области достижимости // АиТ. 1994. № 12. С. 48–58.

15. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. Мир, 1989.

17. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. Philadelphia: SIAM, 2001.