

© 2011 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ H_∞ -РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ И СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматриваются линейные многомерные системы с регуляторами по выходу, подверженные действию внешних возмущений из класса полигармонических функций с неизвестными амплитудами и частотами, ограниченных по мощности. Формулируется задача синтеза непрерывных и дискретных регуляторов по выходу, обеспечивающих требуемую точность по регулируемым переменным объекта. Введено понятие радиуса установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным, и задача обеспечения заданной точности формулируется как задача обеспечения заданного или минимально возможного радиуса установившегося состояния. Синтез регуляторов сводится к стандартной H_∞ -проблеме подавления внешних возмущений, а её численное решение опирается на технику линейных матричных неравенств (ЛМИ), реализованную в MATLAB – пакете LMI Control Toolbox. Указан путь учета заданной степени устойчивости замкнутой системы, определяющей время регулирования. Приводится пример синтеза регулятора для взаимосвязанного электропривода.

1. Введение

Зародившись в начале 80-х гг. 20-го века, математическая теория H_∞ -оптимизации к настоящему времени достигла поры зрелости. Традиционно в рамках этой теории рассматривается задача подавления неизмеряемых внешних возмущений, которые являются исчезающими функциями времени (конечной энергии). Отметим, что постановка этой задачи чисто математическая и мало связана с практическими проблемами, встающими перед инженером-проектировщиком.

С инженерной точки зрения возникает естественный вопрос о подавлении постоянно действующих ограниченных возмущений бесконечной энергии, которые только и встречаются на практике. В этом случае традиционная H_∞ -теория ответа не дает.

Заметим, что еще А.М. Летов в своей книге 1969 г. “Динамика полета и управления” отмечал, что попытка решить обратную задачу об оптимальном регуляторе (т.е. для заданного регулятора, который в инженерном смысле обеспечивает удовлетворительное поведение замкнутой системы, найти структуру функционала и его весовые коэффициенты, при которых система оптимальна) имеет ограниченный практический успех. Это подтверждено гораздо более поздними исследованиями решения обратных задач H_2 -, H_∞ -, L_1 -оптимизации: любой стабилизирующий регулятор является LQ -, H_2 -, H_∞ - и L_1 -оптимальным при соответствующем выборе весовых матриц (функций) критерия оптимизации [1–3].

Поэтому представленные в настоящей работе результаты следует рассматривать как выбор некой начальной точки, с которой инженер-проектировщик систем автоматического управления может начинать решение практической задачи при синтезе регуляторов многомерных систем.

В настоящей работе задача обеспечения заданной точности сводится к обеспечению требуемого радиуса установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным, который в отличие от [4–6] не учитывает установившихся значений управлений, как в [7]. На это обстоятельство следует обратить особое

внимание, поскольку зачастую установившиеся значения управлений определяются мощностью приложенного к системе внешнего возмущения (это абсолютно справедливо, если управления и возмущения приложены к объекту в одной точке). Поэтому введение такого “усеченного” радиуса установившегося состояния, включающего только физически регулируемые переменные объекта, вполне оправдано. Задача обеспечения заданного или минимизируемого радиуса установившегося состояния при действии неизвестных внешних полигармонических возмущений, ограниченных по мощности [4–8], сводится к эквивалентной проблеме H_∞ -оптимизации, и в этом смысле полученный регулятор обеспечивает выполнение H_∞ -критерия с точностью до необходимых и достаточных условий. Однако такая H_∞ -проблема оказывается вырожденной, поскольку регулируемый выход “обобщенного объекта” [9, 10] не содержит управлений, а помехи измерения также отсутствуют. Это создает определенные трудности при численном решении этой задачи 2-Риккати подходом [9] (необходима регуляризация, которая принципиально изменит характер задачи, см., например, [11]).

Заметим, что аналогичные трудности возникают и в дискретном случае, который в работе рассматривается параллельно с непрерывным, а соответствующие обобщения 2-Риккати подхода получены в [12–14].

Это обстоятельство вызвало необходимость при численном решении привлечь подход линейных матричных неравенств (LMI) [15], развитый для проблемы H_∞ -оптимизации в [16, 17], который с легкостью решает вырожденные задачи и программно реализован в MATLAB-пакете LMI Control Toolbox [18].

В работе дополнительно указывается путь учета заданного времени регулирования, которое определяется степенью устойчивости замкнутой системы. В непрерывном случае используется прием перехода к так называемому “смещенному” объекту управления, у которого собственные значения матрицы при состояниях по сравнению с исходной сдвинуты на заданное значение β вправо [19]. В дискретном случае также используется “смещение” модели объекта (см., например, [20]), которое заключается в умножении всех матриц уравнения состояния объекта (при состоянии, управлении и возмущении) на заданное число $\alpha \geq 1$ (при этом собственные значения матрицы при состоянии увеличиваются по сравнению с исходными в α раз).

Рассмотрен численный пример, демонстрирующий эффективность метода синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом [7, 21, 22].

В настоящей работе развиты результаты, полученные ранее в [4–8], они были обсуждены на конференции [23, 24] соответственно в непрерывном и дискретном случаях.

2. Постановка задачи и предварительные сведения

В данном разделе ставится задача синтеза динамического регулятора по выходу в непрерывном и дискретном случаях, который, с одной стороны, обеспечивает заданную точность по регулируемым переменным объекта, а с другой – требуемое время регулирования, определяемое степенью устойчивости замкнутой системы. При этом точность системы оценивается значением радиуса установившегося состояния замкнутой системы, который в отличие от [4, 5] не содержит установившихся значений управляющих воздействий, как в [7], что естественно увеличивает точность системы по отношению к физически регулируемым переменным объекта. Помимо этого помехи измерения не учитываются.

2.1. Непрерывный регулятор

Рассмотрим модель непрерывного объекта, описываемую уравнениями состояния

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния, $\mathbf{w}(t) \in R^\mu$ – вектор внешних ограниченных неизмеряемых возмущений, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $\mathbf{z}(t) \in R^{m_1}$ – вектор регулируемых переменных, $\mathbf{y}(t) \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных. Матрицы A, B_1, B_2, C_1, C_2 соответствующего размера известны.

Предполагается, что пара матриц (A, B_2) управляема, а пары матриц (C_1, A) и (C_2, A) наблюдаемы.

В качестве управляющего устройства будем использовать динамический регулятор по выходу

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{x}}_c = A_c \mathbf{x}_c + B_c \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = C_c \mathbf{x}_c + D_c \mathbf{y},$$

где $\mathbf{x}_c(t) \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора.

Нахождению подлежат матрицы регулятора A_c, B_c, C_c, D_c , определяющие его передаточную матрицу $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$.

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции

$$(2.3) \quad w_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Причем амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}, k = \overline{1, p}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, p}$) сигналов неизвестны.

Амплитуды гармоник подчинены условиям (компоненты внешних возмущений ограничены по мощности [5])

$$(2.4) \quad \sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2}, \quad i = \overline{1, \mu},$$

где w_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) – заданные числа, p – известное число гармоник.

Следуя [8], определим установившиеся ошибки по регулируемым переменным

$$(2.5) \quad z_{i, st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_1},$$

и введем радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным [7]

$$(2.6) \quad r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \left(\frac{z_{i, st}}{z_i^*} \right)^2.$$

Проблема синтеза регулятора по заданной точности заключается в нахождении стабилизирующего регулятора (2.2) такого, что система (2.1), (2.2) при действии внешних возмущений из класса (2.3), (2.4) удовлетворяет требованиям

$$(2.7) \quad z_{i, st} \leq z_i^*, \quad i = \overline{1, m_1},$$

где z_i^* ($i = \overline{1, m_1}$) – заданные положительные числа.

Поскольку требования к точности (2.7) не всегда могут выполняться, то естественно накладывать ограничения на радиус (2.6). Если в результате решения задачи получилось значение $r_{st}^2 = 1$, то выполнены и требования (2.7) (см., например, [8]).

Потребуем также, чтобы время регулирования в замкнутой системе (2.1), (2.2) не превышало заданного t_p , которое можно оценить по приближенной формуле $t_p \cong 3/\beta$, где $\beta > 0$ – степень устойчивости замкнутой системы [25] (минимальное расстояние до мнимой оси от левого корня характеристического полинома замкнутой системы).

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, чтобы, с одной стороны, выполнялось соотношение

$$(2.8) \quad r_{st}^2 \leq \gamma^2,$$

где γ – заданное или минимизируемое число, а с другой – собственные значения матрицы замкнутой системы (2.1), (2.2) A_{cl} удовлетворяли неравенствам

$$(2.9) \quad \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) < -\beta, \quad i = \overline{1, n+n_c},$$

где $\beta \geq 0$ – заданное число.

2.2. Дискретный регулятор

Рассмотрим дискретную модель непрерывного объекта, описываемую разностными уравнениями состояния

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{w}(k) + B_2\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= C_1\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{y}(k) = C_2\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, $\mathbf{w} \in R^\mu$ – вектор внешних ограниченных неизмеряемых возмущений, $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $\mathbf{z} \in R^{m_1}$ – вектор регулируемых переменных, $\mathbf{y} \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных, A, B_1, B_2, C_1, C_2 – известные матрицы соответствующего размера.

Предполагается, что пара матриц (A, B_2) управляема, а пары матриц (C_1, A) и (C_2, A) наблюдаемы.

Для объекта (2.10) в качестве управляющего устройства будем использовать дискретный динамический регулятор по выходу

$$(2.11) \quad \mathbf{x}_c(k+1) = A_c\mathbf{x}_c(k) + B_c\mathbf{y}(k), \quad \mathbf{u}(k) = C_c\mathbf{x}_c(k) + D_c\mathbf{y}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{x}_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора, а четверка матриц A_c, B_c, C_c, D_c подлежит определению.

Элементы вектора внешних возмущений $\mathbf{w}(k)$ – ограниченные функции

$$(2.12) \quad w_i(k) = \sum_{s=1}^p w_{is} \sin(\omega_s kT + \psi_{is}), \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Здесь амплитуды w_{is} , начальные фазы ψ_{is} ($i = \overline{1, \mu}, s = \overline{1, p}$), а также частоты ω_s ($s = \overline{1, p}$) сигналов неизвестны (T – период дискретности регулятора (2.11)).

Предположим, что для каждой компоненты внешнего возмущения выполнены условия (2.4).

Следуя [6, 7], будем считать, что установившиеся ошибки замкнутой системы по регулируемым переменным определяются равенствами

$$(2.13) \quad z_{i,st} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |z_i(k)|, \quad i = \overline{1, m_1},$$

а радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным определяется соотношением (2.6), где z_i^* ($i = \overline{1, m_1}$) – заданные положительные числа.

Задача 2. Найти стабилизирующий регулятор (2.11) такой, чтобы, с одной стороны, выполнялось соотношение

$$(2.14) \quad r_{st}^2 \leq \gamma^2,$$

где γ – заданное или минимизируемое число, а с другой – собственные значения матрицы замкнутой системы (2.10), (2.11) не превосходили по модулю заданного значения $1/\alpha$

$$(2.15) \quad |\lambda_i(A_{cl})| < 1/\alpha, \quad i = \overline{1, n + n_c}.$$

Очевидно, что если выполняется (2.14), то имеет место

$$(2.16) \quad z_{i,st} \leq \gamma z_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Если в результате решения задачи получилось значение $r_{st}^2 = 1$, то выполнены и требования (2.7).

2.3. Лемма об установившихся значениях

Для доказательства последующих утверждений нам потребуется лемма об установившихся значениях, доказанная в [8] для непрерывного случая.

Пусть $T_{\check{z}\check{w}}$ – произвольная ($l_1 \times l_2$) устойчивая передаточная матрица, связывающая некоторый вектор выходных переменных \check{z} с вектором входных воздействий \check{w} ($\check{z}(s) = T_{\check{z}\check{w}}(s)\check{w}(s)$) из класса (2.3), (2.4) (с заменой размерности μ на l_2), реализации которой в пространстве состояний соответствуют выражения

$$(2.17) \quad \dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}\check{w}, \quad \check{z} = \check{C}\check{x}, \quad T_{\check{z}\check{w}}(s) = \check{C}(sI - \check{A})^{-1}\check{B},$$

где \check{A} – гурвицева матрица. И пусть выполнено частотное матричное неравенство

$$(2.18) \quad T_{\check{z}\check{w}}^T(-j\omega)\check{Q}T_{\check{z}\check{w}}(j\omega) \leq \check{R}, \quad \omega \in [0, \infty),$$

где \check{Q} и \check{R} – некоторые положительно определенные диагональные матрицы соответствующих размеров $\check{Q} = \text{diag} [\check{q}_1, \dots, \check{q}_{l_1}]$, $\check{R} = \text{diag} [\check{r}_1, \dots, \check{r}_{l_2}]$.

Введем вектор $\check{w}^* = [\check{w}_1^*, \dots, \check{w}_{l_2}^*]^T$, компоненты которого фигурируют в правых частях аналогов неравенств (2.4) для входного воздействия \check{w} .

Лемма 1. Пусть выполнено частотное неравенство (2.18), тогда установившиеся значения выходных переменных устойчивой системы (2.17) при действии входного сигнала из класса (2.3), (2.4) удовлетворяют неравенству

$$(2.19) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \check{q}_i \check{z}_{i,st}^2 \leq p \sum_{i=1}^{l_2} \check{r}_i \check{w}_i^{*2}.$$

Основной результат работы для дискретного случая опирается на дискретный вариант леммы об установившихся значениях, доказанной в [6].

Пусть имеется асимптотически устойчивая дискретная система вида

$$(2.20) \quad \check{x}(k+1) = \check{A}\check{x}(k) + \check{B}\check{w}(k), \quad \check{z}(k) = \check{C}\check{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через $T_{\check{z}\check{w}}(e^{j\omega T})$ частотную передаточную ($l_1 \times l_2$) матрицу системы (2.20), связывающую вектор выходных переменных $\check{z} \in R^{l_1}$ с вектором входных

воздействий $\check{\mathbf{w}} \in R^{l_2}$ из класса (2.12), (2.4), которая удовлетворяет частотному матричному неравенству

$$(2.21) \quad T_{\check{\mathbf{z}}\check{\mathbf{w}}}^T(e^{-j\omega T})\check{Q}T_{\check{\mathbf{z}}\check{\mathbf{w}}}(e^{j\omega T}) \leq \check{R}, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

где диагональные матрицы \check{Q} и \check{R} определены выше. Тогда имеет место

Лемма 2. Пусть выполнено частотное неравенство (2.21), тогда установившиеся значения выходных переменных устойчивой системы (2.20) при действии входного сигнала из класса (2.12), (2.4) удовлетворяют неравенству (2.19).

3. Решение задачи о заданной точности на основе H_∞ -подхода

В данном разделе рассматривается задача обеспечения требований (2.8) и (2.14) к радиусу установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным соответственно в непрерывном и дискретном вариантах задачи. Решение сводится к стандартной проблеме H_∞ -оптимизации и в этом смысле имеет необходимый и достаточный характер относительно параметров найденного регулятора.

3.1. Непрерывный регулятор

Покажем, что задача обеспечения заданного радиуса установившегося состояния (2.8) замкнутой системы, либо его минимизация, сводится к некоторой эквивалентной проблеме H_∞ -оптимизации.

Введем в рассмотрение новый вектор регулируемых переменных $\bar{\mathbf{z}} \in R^{m_1}$, который связан с исходным вектором физических регулируемых переменных равенством $\bar{\mathbf{z}} = Q^{1/2}\mathbf{z}$, где $Q = \text{diag}[q_1, \dots, q_{m_1}]$ диагональная весовая матрица с положительными элементами $q_i > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$), выбираемая проектировщиком.

Передаточную матрицу замкнутой системы (2.1), (2.2), связывающую векторы $\bar{\mathbf{z}}$ с вектором внешних возмущений \mathbf{w} , обозначим через $T_{\bar{\mathbf{z}}\mathbf{w}}$. Тогда можно записать

$$(3.1) \quad \bar{\mathbf{z}} = T_{\bar{\mathbf{z}}\mathbf{w}}\mathbf{w} = Q^{1/2}T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\mathbf{w},$$

где $T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}$ – передачная матрица замкнутой системы от \mathbf{w} к \mathbf{z} . Очевидно, что она является функцией регулятора (2.2).

Пусть регулятор $K(s)$ разрешает следующую задачу минимизации H_∞ -нормы передачной матрицы замкнутой системы:

$$(3.2) \quad \|T_{\bar{\mathbf{z}}\mathbf{w}}\|_\infty \leq \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число. Тогда с учетом (3.1) получим

$$(3.3) \quad \|Q^{1/2}T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty \leq \gamma.$$

Это неравенство может быть представлено в эквивалентной форме [4, 5, 26]:

$$(3.4) \quad T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}^T(-j\omega)QT_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

На основе леммы 1 об установившихся значениях из соотношения (3.4) легко получить следующий результат (имея в виду, что $\check{Q} = Q$, $\check{R} = \gamma^2 I$).

Теорема 1. Установившиеся ошибки по регулируемым переменным системы (2.1), (2.2), регулятор (2.2) которой найден в результате решения H_∞ -проблемы

(3.4) при действии внешних возмущений из класса (2.3), (2.4), принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 \leq p \gamma^2 \|\mathbf{w}^*\|^2,$$

где $\|\mathbf{w}^*\| = \sqrt{(\mathbf{w}^*)^T \mathbf{w}^*}$ - евклидова норма вектора $\mathbf{w}^* = [w_1^*, \dots, w_\mu^*]^T$ с компонентами из правой части (2.4), p - известное число гармоник внешнего возмущения (2.3).

Легко видеть, что здесь, как и в задаче LQ оптимизации [8], множество значений $z_{i,st}$ ($i = \overline{1, m_1}$) образует замкнутую область гиперэллипсоида, оси которого обратно пропорциональны весовым коэффициентам q_i и прямо пропорциональны γ^2 .

Следствие 1. Регулятор (2.2), полученный на основе решения H_∞ -проблемы (3.2), обеспечивает выполнение целевого условия (2.8) задачи 1, если элементы весовой матрицы Q выбирать из равенств

$$(3.6) \quad q_i = \frac{p \|\mathbf{w}^*\|^2}{z_i^{*2}}, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Действительно, подставляя (3.6) в (3.5), с учетом (2.6) приходим к (2.8), где γ - реализовавшееся значение при решении H_∞ - проблемы (3.2).

3.2. Дискретный регулятор

Пусть регулятор (2.11) разрешает дискретную H_∞ -задачу (3.2) минимизации нормы передаточной матрицы замкнутой системы $T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}$, где \mathbf{z} вектор из (3.1). Тогда с учетом (3.1) получим дискретный аналог (3.3). Это неравенство может быть представлено в эквивалентной форме [6]

$$(3.7) \quad T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}^T(e^{-j\omega T}) Q T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(e^{j\omega T}) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

где T - период дискретности регулятора (2.11).

Пусть Q - диагональная матрица, тогда на основе дискретной леммы 2 об установившихся значениях из соотношения (3.7) приходим к следующему результату.

Теорема 2. Установившиеся ошибки по регулируемым переменным системы (2.10), (2.11), дискретный регулятор (2.11) которой найден в результате решения дискретной H_∞ -проблемы (3.7) при действии внешних возмущений из класса (2.12), (2.4), принадлежат множеству, описываемому неравенством (3.5), где $\mathbf{w}^* = [w_1^*, \dots, w_\mu^*]^T$ - вектор с компонентами из правой части (2.4), p - известное число гармоник внешнего возмущения (2.12).

В дискретном случае имеет место результат, аналогичный следствию 1.

Следствие 2. Регулятор (2.11), полученный на основе решения дискретной H_∞ -проблемы (3.7), обеспечивает выполнение целевого условия (2.14) задачи 2, если элементы диагональной весовой матрицы Q выбирать из равенств (3.6).

Следствие очевидно, а значение γ в (2.14) соответствует реализовавшемуся значению при численном решении (3.7).

Замечание 1. Хотя в непрерывном и дискретном случаях установившиеся ошибки по регулируемым переменным принадлежат замкнутой области гиперэллипсоида (3.5), а весовые матрицы Q выбираются из равенств (3.6), что обеспечивает выполнение целевых условий (2.8), (2.14), значение γ , фигурирующее в их

правых частях, может существенно различаться для непрерывного регулятора (2.2) и дискретного (2.11). Это, прежде всего, связано с ограниченной точностью систем с дискретными регуляторами [27] при конечном периоде дискретности T , даже если внешние возмущения и управления приложены в одной точке $B_1 = B_2$, а регулятор строится по полному вектору состояния. Для регуляторов по выходу даже для минимально – фазового объекта точность дискретной системы также ограничена [27]. Это естественно следует и из теории l_1 - оптимальных систем [28].

4. Обеспечение заданной степени устойчивости

В предыдущем разделе сформулированы результаты для непрерывного и дискретного случаев, которые носят необходимый и достаточный характер по отношению к регуляторам по выходу (2.2) и (2.11), поскольку регулятор, обеспечивающий выполнение целевых условий (2.8) и (2.14), строится на основе стандартной процедуры H_∞ -оптимизации.

Дополнение целевых условий (2.8) и (2.14) задач 1 и 2 требованиями заданного быстродействия (2.9) и (2.15) приводит при решении этих задач только к достаточному результату. Поэтому при решении практических задач следует сначала решить поставленную задачу исходя из заданной точности, т.е. выполнения целевых условий (2.8) или (2.14), и, если требования к быстродействию не выполняются, переходить к “смещенному” объекту, как это делается ниже (задаваясь сначала минимальной степенью устойчивости и увеличивая ее в дальнейшем).

4.1. Непрерывный регулятор

Итак, потребуем, чтобы собственные значения матрицы замкнутой системы (2.1), (2.2)

$$(4.1) \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

удовлетворяли неравенству (2.9). Заменим матрицу A объекта при решении H_∞ -проблемы (3.2) на смещенную $\tilde{A} = A + \beta I$ и найдем регулятор, обеспечивающий устойчивость матрицы

$$Re \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = Re \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A} + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & \tilde{A}_c \end{bmatrix} < 0, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где \tilde{A}_c , B_c , C_c , D_c – матрицы такого регулятора.

Искомый же регулятор имеет матрицы

$$(4.2) \quad A_c = \tilde{A}_c - \beta I, \quad B_c, \quad C_c, \quad D_c.$$

Действительно, собственные значения матрицы \tilde{A}_{cl} и A_{cl} с таким регулятором связаны очевидным соотношением $Re \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = Re \lambda_i(A_{cl}) + \beta < 0$, из которого следует (2.9).

Замечание 2. Заметим, что при решении смещенной проблемы (3.2), в которой матрица A объекта заменена на $\tilde{A} = A + \beta I$, будет выполняться (см., например, [19])

$$(4.3) \quad T_{zw}^T(-j\omega - \beta)QT_{zw}(j\omega - \beta) \leq \gamma^2 I, \quad \omega = [0, \infty).$$

Используя частотную теорему В.А. Якубовича (см., например, [29, 30]), получим следующий результат.

Лемма 3. Пусть передаточная матрица $\tilde{T}_{zw} = C(pI - \tilde{A})^{-1}B$, $p = j\omega$, $\tilde{A} = A_{cl} + \beta I$ удовлетворяет неравенству (3.4). Тогда и передаточная матрица $T_{zw} = C(pI - A_{cl})^{-1}B$ также удовлетворяет (3.4).

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Таким образом, разрешая смещенную проблему (3.2), (4.3), получим решение задачи 1.

4.2. Дискретный регулятор

Пусть необходимо, чтобы собственные значения матрицы (4.1) замкнутой системы удовлетворяли неравенству (2.15). Заменим матрицы A и B_2 при решении H_∞ -проблемы (3.7) на $\tilde{A} = A\alpha$, $\tilde{B}_2 = B_2\alpha$ и найдем регулятор, обеспечивающий устойчивость смещенной замкнутой системы

$$|\lambda_i(\tilde{A}_{cl})| = \left| \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}_2 D_c C_2 & \tilde{B}_2 C_c \\ \tilde{B}_c C_2 & \tilde{A}_c \end{bmatrix} \right| < 1, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где \tilde{A}_c , \tilde{B}_c , C_c , D_c – матрицы такого регулятора.

Искомый же регулятор имеет матрицы

$$(4.4) \quad A_c = \tilde{A}_c/\alpha, \quad B_c = \tilde{B}_c/\alpha, \quad C_c, D_c.$$

Действительно, собственные значения матриц \tilde{A}_{cl} и A_{cl} с таким регулятором связаны очевидным соотношением $|\lambda_i(\tilde{A}_{cl})| = |\lambda_i(A_{cl})|\alpha < 1$, из которого следует (2.17).

Замечание 3. Заметим, что при решении смещенной проблемы

$$(4.5) \quad T_{zw}^T (e^{(-j\omega - \beta)T}) Q T_{zw} (e^{(j\omega - \beta)T}) \leq \gamma^2 I, \quad \alpha = e^{\beta T}, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

смещению должны подвергаться не только матрицы A и B_2 объекта, но и матрица B_1 при внешнем возмущении ($\tilde{A} = A\alpha$, $\tilde{B}_1 = B_1\alpha$, $\tilde{B}_2 = B_2\alpha$). Тогда опираясь на частотную теорему В.А. Якубовича (см., например, [29–31]), придем к следующему результату.

Лемма 4. Пусть передаточная матрица замкнутой системы (2.10), (2.11) $\tilde{T}_{zw} = C(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ (где $\tilde{A} = A_{cl}\alpha$, $\tilde{B} = B\alpha$) удовлетворяет неравенству (3.7). Тогда и передаточная матрица $T_{zw} = C(zI - A_{cl})^{-1}B$ также удовлетворяет неравенству (3.7).

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Таким образом, разрешая смещенную дискретную проблему (4.5), получаем решение задачи 2.

5. Численное решение в пространстве состояний и алгоритмы синтеза на основе LMI-подхода

Поскольку задачи H_∞ -оптимизации, к которым сводятся решения поставленных задач 1 и 2, вырожденные (регулируемый выход не содержит управлений, а помехи измерения отсутствуют [10]), то численное решение таких задач в настоящей работе опирается на метод линейных матричных неравенств (LMI) [15], реализованный в MATLAB-пакете LMI Control Toolbox [18].

Этот подход в отличие от 2-Риккати подхода [9] не требует никаких ограничений на матрицы задачи и с легкостью преодолевает трудности решения вырожденных задач теории H_∞ -управления.

Численное решение задачи 1 удобно осуществлять в пространстве состояний.

Нетрудно проверить, что уравнения состояния обобщенного объекта [9] для решения стандартной H_∞ -проблемы (3.2) имеют вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u}, & \bar{\mathbf{z}}(t) &= \hat{C}_1\mathbf{x} + D_{11}\mathbf{w} + D_{12}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y}(t) &= C_2\mathbf{x} + D_{21}\mathbf{w} + D_{22}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

где $\hat{C}_1 = Q^{1/2}C_1$, $D_{11} = 0$, $D_{12} = 0$, $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$.

В дискретном случае используются их разностные аналоги.

5.1. Алгоритм синтеза непрерывного регулятора

Для численного решения стандартной H_∞ -проблемы (3.2) для обобщенного объекта (5.1), (5.2) необходимо осуществить следующие шаги алгоритма.

1. Формируем расширенные матрицы обобщенного объекта в соответствии с (5.1) A , $B = [B_1, B_2]$, $C = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $D = 0$ (их размерности должны быть согласованы).

Заменяем матрицу A на $\tilde{A} = A + \beta I$, где β положительный скаляр (первоначально полагаем $\beta = 0$).

2. Формируем системную матрицу $P = \text{ltisys}(\tilde{A}, B, C, D)$ обобщенного объекта.

3. Находим оптимальное значение $\gamma = \gamma_{opt}$ (которое используется на следующем шаге алгоритма) с помощью процедуры $\gamma_{opt} = \text{hinflmi}(P, [m_2, m])$, где P – системная матрица, m_2 и m – число входов и выходов регулятора соответственно.

4. Выбираем значение $\gamma \geq \gamma_{opt}$ и строим системную матрицу регулятора K , разрешающего задачу (4.3), с помощью процедуры $[\gamma, K] = \text{hinflmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$, где ε – точность вычисления γ .

5. Из системной матрицы K извлекаем матрицы уравнений состояния (2.2) смещенного регулятора процедурой $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$.

6. Находим матрицы $A_c = \tilde{A}_c - \beta I$, B_c , C_c , D_c искомого регулятора (2.2).

7. Строим переходный процесс в замкнутой системе (2.1), (2.2) при действии внешних возмущений из класса (2.3), (2.4) и находим установившиеся ошибки и время регулирования.

Если время регулирования больше заданного, увеличиваем сдвиг полюсов объекта β и переходим к п.1; в противном случае, задача 1 решена.

5.2. Алгоритм синтеза дискретного регулятора

В случае дискретного регулятора (2.11) используем следующие шаги алгоритма (предварительно преобразовав непрерывный объект (2.1) к дискретному виду (2.10)).

1. Формируем матрицы A , B , C , D дискретного обобщенного объекта A , $B = [B_1, B_2]$, $C = \begin{bmatrix} Q^{1/2}C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $D = 0$ и заменим его матрицы A , B на $\tilde{A} = \alpha A$, $\tilde{B} = \alpha B$, где $\alpha \geq 1$ (сначала следует положить $\alpha = 1$).

2. Формируем системную матрицу обобщенного объекта $P = \text{ltisys}(\tilde{A}, \tilde{B}, C, D)$.

3. Находим оптимальное значение $\gamma = \gamma_{opt}$ (которое используется на следующем шаге алгоритма) с помощью процедуры $\gamma_{opt} = dhinflmi(P, [m_2, m])$, где P – системная матрица, m_2 и m – число входов и выходов регулятора соответственно.

4. Выбираем значение $\gamma \geq \gamma_{opt}$ и строим системную матрицу регулятора K , решающего задачу (4.5), с помощью процедуры $[\gamma, K] = dhinflmi(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$, где ε – точность вычисления значения γ .

5. Из системной матрицы K извлекаем матрицы смещенного регулятора процедурой $[\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, C_c, D_c] = ltiss(K)$.

6. Находим матрицы $A_c = \tilde{A}_c/\alpha$, $B_c = \tilde{B}_c/\alpha$, C_c , D_c искомого регулятора (2.11).

7. Строим переходный процесс в замкнутой системе (2.10), (2.11) при действии внешних возмущений из класса (2.12), (2.4). Если время регулирования превышает заданное, увеличиваем α и переходим к п.1; в противном случае, задача 2 решена.

6. Пример

Рассмотрим взаимосвязанный электропривод, модель которого приведена в [7, 21, 22].

Компоненты вектора состояния $\mathbf{x} \in R^5$ имеют следующий смысл [21]: x_1, x_2 – отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных, $x_3 = i_1, x_4 = i_2$ – отклонения якорных токов двигателей от номинальных, $x_5 = \omega$ – отклонение угловой скорости двигателей от номинальной (двигатели работают на общую нагрузку и жестко связаны, т.е. имеют одинаковую угловую скорость). Вектор управления \mathbf{u} имеет две компоненты u_1 и u_2 – отклонения управляющих напряжений от номинальных на входах тиристорных преобразователей. Внешнее возмущение w – отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального. Регулируемые переменные включают токи двигателей и угловую скорость.

Матрицы уравнений состояния (2.1) объекта управления имеют вид [7]:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,33333 & 0 & 0 & 0 \\ 137,8105 & 0 & -11,2866 & 0 & -1123,155 \\ 0 & 132,4591 & 0 & -11,0653 & -1101,133 \\ 0 & 0 & 0,24867 & 0,25364 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0307 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для построения регулятора по выходу будем использовать алгоритм 5.1.

Весовая матрица Q была выбрана из равенств (3.6) при условии, что $z_1^* = z_2^* = 375$, $z_3^* = 1$, $w^* = 600$. При этом $\beta = 0$,

$$Q^{1/2} = \begin{bmatrix} 1,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix}.$$

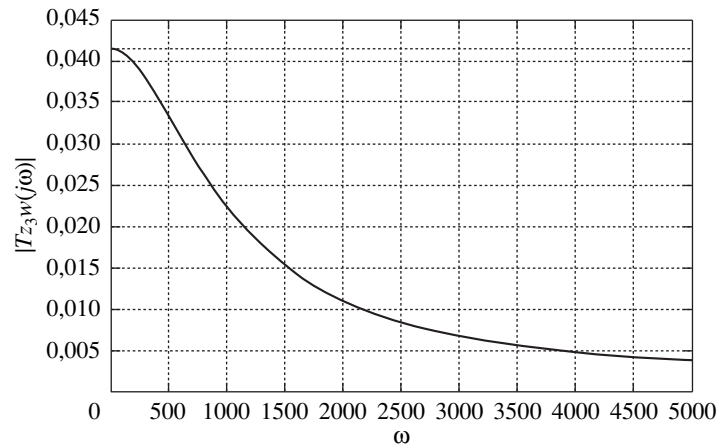


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения к регулируемой переменной z_3 .

Полученные матрицы регулятора (2.2) имеют следующий вид:

$$A_c = \begin{bmatrix} 30082692,71 & -19309621,50 & 21341845,08 & -53150966,77 & 146193897,58 \\ 49255448,14 & -31257072,63 & 34342402,16 & -86099585,14 & -171507181,11 \\ -36164858,25 & 23253102,10 & -25724310,83 & 63998259,56 & -222071037,46 \\ -12048002,43 & 7631904,43 & -8377738,64 & 21024244,37 & 57360927,90 \\ 59859,30 & -38243,64 & 42474,15 & -105173,72 & 287402,57 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1358,40 & 256,87 & -181,05 \\ 17,73 & -245,87 & -322,66 \\ 174,12 & 48,35 & -794,88 \\ -248,22 & 1362,63 & -229,77 \\ -227,21 & -245,50 & 2898,37 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -3621,15 & 2320,33 & -2562,34 & 6387,53 & -13073,50 \\ 2708,01 & -1711,25 & 1875,97 & -4715,04 & -17724,31 \end{bmatrix},$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Реализовавшееся при решении H_∞ -проблемы (3.2) значение γ при расчете регулятора составило 0,14561 (оптимальное же значение $\gamma_{opt} = 0,13883$).

На рис. 1 построена амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения (момента нагрузки) к регулируемой переменной z_3 (угловой скорости двигателей), по которой судят о качестве замкнутой системы. Эта характеристика промасштабирована амплитудой внешнего возмущения $w^* = 600$.

Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наилучшее внешнее возмущение для замкнутой системы – ступенчатое.

На рис. 2 и рис. 3 приведены графики переходных процессов по токам двигателей и угловой скорости при ступенчатом изменении момента нагрузки $w(t) = \text{const} = w^* = 600$.

Из графиков монотонных переходных процессов видно, что двигатели равнонагружены (их якорные токи близки) и выполнены требования к точности, в част-

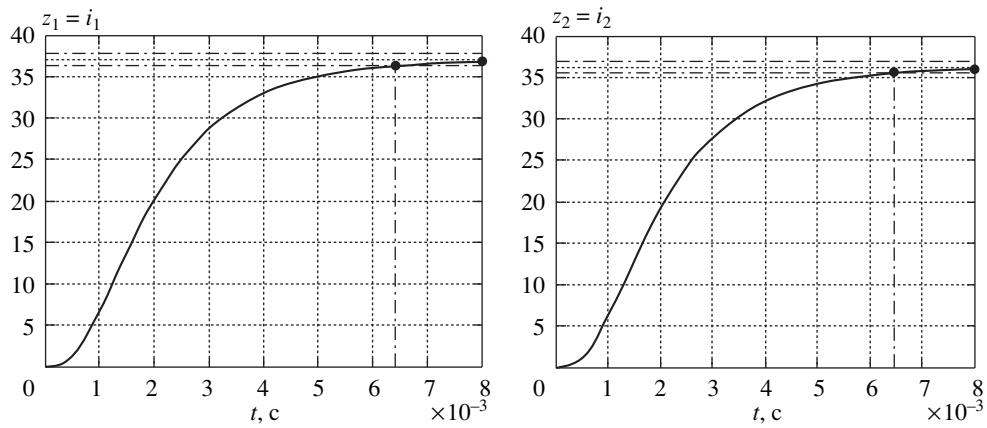


Рис. 2. Переходные процессы по токам двигателей.

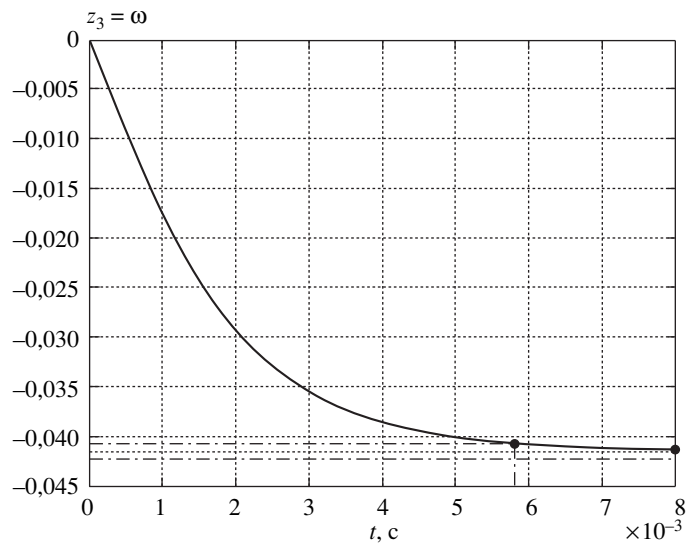


Рис. 3. Переходный процесс по угловой скорости двигателей.

ности по угловой скорости $|z_3(t)| \ll z_3^* = 1$, а время регулирования много меньше заданного 0,25 с.

Заметим, что установившиеся значения токов не зависят от регулятора, а определяются только величиной приложенного внешнего возмущения – момента нагрузки. Однако если токи двигателей исключить из регулируемых переменных, то, как показывают численные эксперименты, становится проблематичным обеспечить равнонагруженность приводов (близость их якорных токов в переходном процессе).

7. Заключение

В работе предложены процедуры синтеза многомерных линейных систем по заданной точности в установившемся режиме при действии ограниченных по мощности внешних возмущений из класса полигармонических функций с неизвестными амплитудами и частотами. При этом точность работы системы управления оценива-

ются абсолютными значениями регулируемых переменных в установившемся режиме. Основой решения проблемы обеспечения заданной точности в настоящей работе служат процедуры H_∞ -теории управления.

Введено понятие радиуса установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным объекта и дано строгое правило выбора весовой матрицы, взвешивающей физически регулируемые переменные объекта, в эквивалентной задаче H_∞ -оптимизации (субоптимизации), что приводит к регулятору, обеспечивающему заданный радиус с точностью до необходимых и достаточных условий по отношению к параметрам регулятора. Указан способ перехода к “смещенному” объекту управления, который дополнительно с заданным радиусом установившегося состояния гарантирует выполнение требований по быстродействию замкнутой системы. Однако это нарушает необходимый и достаточный характер первоначального результата (без учета заданной степени устойчивости).

Численное решение поставленной задачи опирается на метод линейных матричных неравенств [15], реализованный в пакете LMI Control Toolbox [18]. При этом порядок регулятора не превышает порядка физического объекта управления.

Приведены алгоритмы построения непрерывных и дискретных регуляторов в пакете [18], численная эффективность которых продемонстрирована при стабилизации угловой скорости взаимосвязанного электропривода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 3. Хорошо известно, что для выполнения (3.4) для \tilde{T}_{zw} необходимо и достаточно [4], чтобы существовало положительно определенное решение $P = P^T > 0$ уравнения Лурье-Риккати

$$(П.1) \quad \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \gamma^{-2} P B B^T P = -C^T Q C.$$

Отсюда, учитывая что $\tilde{A} = A_{cl} + \beta I$, получим

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + \gamma^{-2} P B B^T P = -C^T Q C - 2\beta P.$$

Из последнего соотношения следует матричное неравенство

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + \gamma^{-2} P B B^T P \leq -C^T Q C.$$

Добавляя и вычитая из его левой части pP и умножая слева на $B^T(-pI - A_{cl}^T)^{-1}$, а справа на $(pI - A_{cl})^{-1}B$, получим (после добавления к обеим частям $\gamma^2 I$) неравенство

$$[I - T_w(-p)]^T \gamma^2 [I - T_w(p)] \leq \gamma^2 I - T_{zw}^T(-p) Q T_{zw}(p), \quad p = j\omega, \quad \omega \in [0, \infty),$$

где $T_w = -\gamma^2 B^T P (pI - A_{cl})^{-1} B$. Из данного неравенства в силу неотрицательной определенности его левой части и следует неотрицательная определенность правой части, что эквивалентно доказываемому утверждению.

Доказательство леммы 4. Естественнее предположить, что далее обе матрицы A_{cl} и \tilde{A} устойчивы, т.е. все их собственные значения лежат внутри единичного круга с центром в начале координат. Известно, что для выполнения (3.7) для \tilde{T}_{zw} необходимо и достаточно [12, 14, 31], чтобы существовало положительно определенное решение $P = P^T > 0$ уравнения Лурье-Риккати (для простоты здесь $\gamma = 1$, для $\gamma \neq 1$ заменяем \tilde{B} на \tilde{B}/γ)

$$\tilde{A}^T P \tilde{A} - P + \tilde{A}^T P \tilde{B} [I - \tilde{B}^T P \tilde{B}]^{-1} \tilde{B}^T P \tilde{A} = -C^T Q C$$

и выполнялось условие $[I - \tilde{B}^T P \tilde{B}] > 0$.

Учитывая выражения для \tilde{A} и \tilde{B} и вводя обозначение $\tilde{P} = \alpha^2 P$, приходим к уравнению

$$A_{cl}^T \tilde{P} A_{cl} - P + A_{cl}^T \tilde{P} B [I - B^T \tilde{P} B]^{-1} B^T \tilde{P} A_{cl} = -C^T Q C.$$

Прибавляя и вычитая из левой части этого уравнения \tilde{P} и учитывая, что $\tilde{P} - P \geq 0$ для $\alpha \geq 1$, приходим к матричному неравенству

$$A_{cl}^T \tilde{P} A_{cl} - \tilde{P} + A_{cl}^T \tilde{P} B [I - B^T \tilde{P} B]^{-1} B^T \tilde{P} A_{cl} \leq -C^T Q C.$$

Из последнего неравенства получим частотное условие для $T_{zw} = C(zI - A_{cl})^{-1} B$. Для этого умножим неравенство на (-1) и добавим и вычтем из левой части полученного выражения $A_{cl}^T \tilde{P} z$. Умножая это выражение слева на $B^T (z^{-1} I - A_{cl}^T)^{-1}$ и справа на $(zI - A_{cl})^{-1} B$, после несложных преобразований (см., например, [32]), учитывая тождество $z(zI - A)^{-1} = I + A(zI - A)^{-1}$ и полагая $z = e^{j\omega T}$, $\omega \in [0, \pi/T]$, приходим к частотному неравенству (после вычитания из обеих частей единичной матрицы I)

$$\begin{aligned} & -B^T (z^{-1} I - A_{cl}^T)^{-1} A_{cl}^T \tilde{P} B - B^T \tilde{P} A_{cl} (zI - A_{cl})^{-1} B + I - \\ & - B^T \tilde{P} B + B^T (z^{-1} I - A_{cl}^T)^{-1} A_{cl}^T \tilde{P} B (I - B^T \tilde{P} B)^{-1} \times \\ & \times B^T \tilde{P} A_{cl} (zI - A_{cl})^{-1} B \leq I - T_{zw}^T (z^{-1} Q T_{zw}(z)). \end{aligned}$$

Преобразуя левую часть последнего неравенства с учетом обозначения $W(z) = (I - B^T \tilde{P} B)^{-1} B^T \tilde{P} A_{cl} (zI - A_{cl})^{-1} B$, приходим к матричному неравенству

$$\begin{aligned} & [I - W^T(z^{-1})][I - B^T \tilde{P} B][I - W(z)] \leq I - T_{zw}^T (z^{-1}) Q T_{zw}(z), \\ & z = e^{j\omega T}, \quad \omega \in [0, \pi/T]. \end{aligned}$$

Учитывая положительную определенность матрицы $[I - B^T \tilde{P} B]$, заключаем, что левая часть последнего неравенства неотрицательно определена. Тогда из правой части следует частотное неравенство (3.7) для $\gamma = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R.E. When is a linear control system optimal? // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic. Eng. 1964. V. 86. P. 51–60.
2. Lenz K.E., Khargonekar P.P., Doyle J.C. When is a controller H_∞ -Optimal? // Math. Control, Signal Syst. 1988. V. 1. P. 107–122.
3. Deodhare G., Vidyasagar M. Every Stabilizing Controller is l_1 and H_∞ - Optimal // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. 36. № 9. P. 1070–1073.
4. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. II // АиТ. 1998. № 8. С. 124–138.
5. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности по среднеквадратичному критерию // АиТ. 1998. № 12. С. 109–117.
6. Честнов В.Н. Синтез цифровых H_∞ регуляторов состояния многомерных систем заданной точности // АиТ. 2005. № 8. С. 46–51.
7. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ подхода // АиТ. 2004. № 10. С. 101–108.
8. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I // АиТ. 1998. № 7. С. 83–95.
9. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 8. P. 831–846.

10. *Садомцев Ю.В.* Синтез динамических субоптимальных регуляторов пониженного порядка на основе H_∞ -критерия // *АиТ.* 2006. № 12. С. 175–190.
11. *Первозванский А.А., Чечурин Л.С.* Синтез обратной связи по критерию робастности с помощью уравнений Риккати // *АиТ.* 1997. № 11. С. 152–158.
12. *Iglesias P.A., Glover K.* State-space discrete-time H_∞ control theory // *Eur. Control Conf. Grenoble. France.* 1991. V. 2. P. 1730–1735.
13. *Iglesias P.A., Glover K.* State-space approach to discrete-time H_∞ control // *Int. J. Control.* 1991. V. 54. № 5. P. 1031–1073.
14. *Yaesh I., Shaked U.* A transfer function approach to the problem of discrete-time systems: H_∞ -optimal linear control and filtering // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1991. V. 36. № 11. P. 1264–1271.
15. *Boyd S., Chaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequality in system and control theory. SIAM, Philadelphia. 1994.
16. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // *Int. J. Control.* 1994. V. 4. P. 421–448.
17. *Iwasaki T., Skelton R.* All solutions for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas // *Automatica.* 1994. V. 30. № 8. P. 1307–1317.
18. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.* LMI Control Toolbox. User's Guide. Mathworks, Natic. Mass. 1995.
19. *Честнов В.Н.* Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // *АиТ.* 2007. N 3. С. 199–205.
20. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -регуляторов по выходу с учетом заданного радиуса запасов устойчивости и времени регулирования // *Сб. тр. IV Междунар. конф. по пробл. упр.* 26–30 января 2009. М.: ИПУ РАН. С. 160–163.
21. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞ -подхода // *АиТ.* 2004. № 9. С. 110–119.
22. *Честнов В.Н., Салихов З.Г.* Синтез автоматического регулятора многоприводного трубопрокатного стана // *Изв. Вузов. Черная металлургия.* 2008. № 5. С. 43–47.
23. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -непрерывных регуляторов по выходу многомерных систем по заданной точности и степени устойчивости // *Сб. тр. 2-й Рос. конф. "Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения" (УКИ-2010).* М.: ИПУ РАН, 2010. 10С. (CD-ROM).
24. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -цифровых регуляторов по выходу многомерных систем по заданной точности и степени устойчивости // *Сб. тр. 2-й Рос. конф. "Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения" (УКИ-2010).* М.: ИПУ РАН, 2010. 9С. (CD-ROM).
25. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
26. *Kwakernaak H.* Robust Control and H_∞ -Optimization. – Tutorial Paper // *Automatica.* V. 29. № 2. 1993. P. 255–273.
27. *Честнов В.Н.* Предельно достижимая точность систем с цифровыми регуляторами // *Частотное управление. Тр. МИСиС. Москва.* 1994. С. 40–55.
28. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
29. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // *Сиб. мат. журн.* 1973. Т. 14. № 2. С. 384–420.
30. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
31. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Алгебраические уравнения Риккати и линейные матричные неравенства для систем дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2005.
32. *Честнов В.Н.* Свойства аналитически сконструированных многомерных систем с цифровыми регуляторами // *Изв. ВУЗов СССР. Приборостроение.* 1991. № 10. С. 11–18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 14.04.2011