

© 2011 г. Ж.В. ЗАЦЕПИЛОВА
(Московский государственный институт стали и сплавов),
В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ ПО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУР LQ -ОПТИМИЗАЦИИ

Сформулирована задача синтеза непрерывных регуляторов линейных многомерных систем, гарантирующих требуемую точность по регулируемым переменным в среднеквадратичном смысле при действии неизмеряемых, ограниченных по мощности полигармонических детерминированных внешних возмущений с неизвестными амплитудами, частотами и числом частот. Получены условия разрешимости задачи с регуляторами состояния (в этом случае возмущения и управления должны быть приложены в одной точке) и регуляторами по измеряемому выходу (объект должен быть минимально-фазовым с одинаковым числом управлений и регулируемых переменных) на основе процедур LQ -оптимизации путем выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимизации.

1. Введение

На практике, как правило, автоматические системы подвержены действию ограниченных неизмеряемых внешних возмущений, которые приводят к появлению ошибок регулирования, имеющих смысл отклонений регулируемых переменных объекта от номинального установившегося режима работы (в задаче стабилизации от нуля).

В случае детерминированных возмущений точность системы, как правило, оценивается максимумом модуля отклонения регулируемых переменных от нуля (т.е. номинального режима работы, поскольку используются уравнения движения в отклонениях). При случайных возмущениях такой характеристикой обычно служат среднеквадратичные значения регулируемых переменных (их дисперсии) [1].

Необходимо отметить, что в рамках стохастической постановки задачи (а также для ступенчатых внешних возмущений) важные результаты по обеспечению заданной точности получены в [2–4].

Настоящая работа продолжает исследования, выполненные ранее в [5] для H_∞ -задачи, и, как в стандартной LQG задаче [1] (при случайных гауссовских возмущениях), точность будет оцениваться в среднеквадратичном смысле. Однако в качестве внешних возмущений (помехи измерения отсутствуют) в статье рассматриваются детерминированные функции времени – полигармонические, содержащие произвольное число гармоник с неизвестными амплитудами и частотами. При этом амплитуды гармоник подчинены условию, ограничивающему мощность каждой полигармонической компоненты внешнего возмущения.

В работе рассматриваются два вида объектов, для которых задача обеспечения заданной точности может быть решена до конца на основе теории LQ -оптимизации (при любой заданной точности). В первом случае вектор состояния объекта доступен измерению, а возмущения и управления приложены в одной точке. Для регуляторов по измеряемому выходу объект должен быть минимально-фазовым, а регулируемые

переменные должны совпадать с измеряемыми. При этом число управлений и регулируемых переменных одинаково, а внешние возмущения и управления могут быть приложены к объекту в разных точках.

Решение поставленных задач опирается на частотные матричные неравенства [6] для передаточной матрицы замкнутой системы от внешних возмущений к регулируемым переменным и управляющим воздействиям. Оказывается, таким неравенствам можно дать физическую интерпретацию на языке средних квадратов регулируемых переменных и управляющих воздействий, когда ограниченные по мощности внешние возмущения (ограничена сумма квадратов амплитуд гармоник [5]) – полигармонические сигналы с неизвестными амплитудами, частотами и их числом.

Отметим, что в постановке задачи LQ -оптимизации вообще отсутствуют внешние возмущения, а движение в замкнутой системе вызывается ненулевыми начальными условиями, имеющими смысл начальных отклонений от номинального установившегося режима, который принимается за начало отсчета. Вместе с тем регуляторы, полученные на основе этого подхода, применяются и при действии внешних возмущений.

Проблема выбора весовых матриц квадратичного функционала оптимизации возникла сразу после работ А.М. Летова [7] и Р.Е. Калмана [8] по LQ -оптимизации. В своей книге 1969 г. “Динамика полета и управление” А.М. Летов писал, что структура и весовые матрицы функционала оптимизации заданы и являются постулатом теории. Однако это главный вопрос всякой теории, претендующей на практическое применение, так как свойства замкнутой системы (кроме устойчивости) существенным образом зависят от выбора структуры и коэффициентов весовых матриц квадратичного функционала оптимизации. С математической точки зрения не имеет значения, какими выбраны весовые матрицы, а с инженерной точки зрения – это чрезвычайно важно.

С появлением теории H_∞ -оптимизации и 2-Риккати подхода в 1989 г. [9] эта проблема возникла снова.

В настоящей работе даются строгие правила выбора коэффициентов функционала оптимизации в LQ задаче, разрешающие проблему синтеза регуляторов состояния и по выходу по заданным среднеквадратичным значениям регулируемых переменных при действии ограниченных по мощности [5] полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами, частотами и их числом. Кроме этого, указывается учет желаемого времени регулирования путем обеспечения заданной степени устойчивости замкнутой системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнениями:

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = C_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = C_2\mathbf{x},$$

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{x}}_c = A_c\mathbf{x}_c + B_c\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = C_c\mathbf{x}_c + D_c\mathbf{y},$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта (2.1), $\mathbf{u}(t) \in R^m$ – вектор управления, $\mathbf{z}(t) \in R^{m_1}$ – вектор регулируемых переменных, $\mathbf{y}(t) \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных, $\mathbf{w}(t) \in R^\mu$ – вектор внешних неизменяемых возмущений, $\mathbf{x}_c(t) \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора (2.2). Постоянные числовые матрицы A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 известны; A_c , B_c , C_c , D_c – неизвестные матрицы регулятора (2.2).

Пара матриц (A, B_2) предполагается стабилизируемой, а пары (C_1, A) и (C_2, A) – детектируемыми.

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции

$$(2.3) \quad w_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, \mu}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Здесь амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}$, $k = \overline{1, p}$) и частоты ω_k ($k = \overline{1, p}$) гармоник неизвестны. Неизвестно и число гармоник $1 \leq p < \infty$.

Будем полагать, что среднеквадратичные значения (мощности) любой компоненты внешнего возмущения подчинены условию (следующее равенство доказано, например, в [10]):

$$(2.4) \quad \langle w_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_i^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2}, \quad i = \overline{1, \mu}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где w_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) – заданные числа.

Определим среднеквадратичные значения регулируемых переменных соотношениями [5]

$$(2.5) \quad \langle z_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z_i^2(t) dt > 0, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Аналогично определяются среднеквадратичные значения управляющих воздействий.

Задача. Найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, чтобы среднеквадратичные значения регулируемых переменных системы (2.1), (2.2) при действии возмущений из класса (2.3), (2.4) удовлетворяли требованиям

$$(2.6) \quad \langle z_i^2 \rangle \leq z_i^{*2}, \quad i = \overline{1, m_1},$$

где $z_i^* > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$) – заданные числа.

3. Предварительные результаты. Частотные свойства LQ -оптимальных систем

Важную роль в получении результатов работы играют частотные матричные неравенства, записанные для передаточных матриц замкнутой оптимальной системы, связывающих вектор регулируемых переменных \mathbf{z} и вектор управляющих воздействий \mathbf{u} с вектором внешних возмущений \mathbf{w} . Частным случаем таких матричных неравенств является целевое условие H_∞ теории оптимизации [5, 9].

Предположим, что вектор состояния объекта измеряется ($C_2 = I$, где I – единичная матрица соответствующих размеров). Его уравнения (2.1), если управления и внешние возмущения приложены в одной точке ($B_1 = B_2$, $\mu = m$, $m_2 = n$), имеют вид:

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + B_2(\mathbf{u} + \mathbf{w}), \quad \mathbf{z} = C_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Хорошо известно [1, 11, 12], что для объекта (3.1) закон управления

$$(3.2) \quad \mathbf{u} = K\mathbf{x}, \quad K = -R^{-1}B_2^T P,$$

где симметрическая неотрицательно определенная матрица $P = P^T \geq 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$(3.3) \quad A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P = -C_1^T Q C_1,$$

доставляет минимум квадратичному функционалу качества (при $\mathbf{w} = 0$ в (3.1))

$$(3.4) \quad J = \min_{\mathbf{u}} \int_0^{\infty} (\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt,$$

где Q и R – симметрические положительно определенные весовые матрицы, выбираемые проектировщиком.

Если матрица A объекта гурвицева, то часто матрицу $P \geq 0$ закона управления (3.2) находят путем решения матричного уравнения Ляпунова [13–16]

$$(3.5) \quad A^T P + PA = -C_1^T Q C_1.$$

В этом случае закон управления (3.2), (3.5) минимизирует (при $\mathbf{w} = 0$) следующий квадратичный функционал [17]:

$$(3.6) \quad J = \min_{\mathbf{u}} \int_0^{\infty} (\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*) dt, \quad \mathbf{u}^* = -R^{-1} B^T P \mathbf{x}.$$

В дальнейшем для удобства синтез регулятора (3.2) на основе решения уравнения (3.3) будем называть *процедурой 1*, а на базе уравнения (3.5) – *процедурой 2*.

Переходя к исследованию частотных свойств систем, построенных на основе *процедур 1* и *2*, определим передаточные матрицы замкнутой системы (3.1), (3.2):

$$(3.7) \quad T_{uw}(s) = K(sI - A_{cl})^{-1} B_2, \quad T_{zw}(s) = C_1(sI - A_{cl})^{-1} B_2, \quad A_{cl} = A + B_2 K,$$

первая из которых связывает вектор управляющих воздействий \mathbf{u} , а вторая – вектор регулируемых переменных \mathbf{z} с вектором внешних возмущений \mathbf{w} .

В случае использования *процедур 1* имеют место следующие частотные свойства.

Теорема 1. *Передаточные матрицы (3.7) оптимальной системы (3.1), (3.2), (3.3) удовлетворяют условиям:*

а) *частотному тождеству*

$$(3.8) \quad [I + T_{uw}(-j\omega)]^T R [I + T_{uw}(j\omega)] = R - T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty];$$

б) *частотным матричным неравенствам:*

$$(3.9) \quad T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega) \leq R, \quad \omega \in [0, \infty];$$

$$(3.10) \quad [I + T_{uw}(-j\omega)]^T R [I + T_{uw}(j\omega)] \leq R, \quad \omega \in [0, \infty];$$

$$(3.11) \quad T_{uw}^T(-j\omega) T_{uw}(j\omega) \leq 4I, \quad (R = rI, r > 0), \quad \omega \in [0, \infty];$$

в) *при $t = \mu = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $T_{uw}(j\omega)$ не покидает круга радиуса единица с центром в точке $(-1, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.*

Доказательство теоремы 1 приведено в [6]. В другой форме тождество (3.8) приведено в [18].

При использовании процедуры 2 справедливы следующие аналогичные свойства.

Теорема 2. Передаточные матрицы (3.7) системы (3.1), (3.2), (3.5) удовлетворяют условиям:

а) частотному тождеству

$$(3.12) \quad [I + 2T_{uw}(-j\omega)]^T 0,5R[I + 2T_{uw}(j\omega)] = 0,5R - T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty];$$

б) частотным матричным неравенствам:

$$(3.13) \quad T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) \leq 0,5R, \quad \omega \in [0, \infty];$$

$$(3.14) \quad [I + 2T_{uw}(-j\omega)]^T R[I + 2T_{uw}(j\omega)] \leq R, \quad \omega \in [0, \infty];$$

$$(3.15) \quad T_{uw}^T(-j\omega)T_{uw}(j\omega) \leq I \quad (R = rI, r > 0), \quad \omega \in [0, \infty];$$

в) при $m = \mu = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $T_{uw}(j\omega)$ не покидает круга радиуса $1/2$ с центром в точке $(-1/2, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Свойства в) теорем 1 и 2 служат интерпретацией матричных частотных неравенств (3.10) и (3.14) соответственно в случае скалярных управляющих и возмущающих воздействий. Из свойств (3.11), (3.15) (при $m = \mu = 1$) вытекает, что в первом случае модуль частотной передаточной функции $T_{uw}(j\omega)$ для всех частот не превышает двух, а во втором – единицы. Эти факты другим путем были установлены в [13]. Матричные неравенства (3.11) и (3.15) являются их многомерным обобщением.

В дальнейшем авторам потребуется следующее важное вспомогательное утверждение.

Пусть $T_{z\bar{w}}$ – произвольная $(r \times k)$ устойчивая передаточная матрица, связывающая некоторый вектор выходных переменных \bar{z} с вектором входных воздействий \bar{w} из класса (2.3), (2.4) (с заменой размерности μ на k)

$$(3.16) \quad \bar{z} = T_{z\bar{w}}(s)\bar{w},$$

которая удовлетворяет частотному матричному неравенству

$$(3.17) \quad T_{z\bar{w}}^T(-j\omega)\bar{Q}T_{z\bar{w}}(j\omega) \leq \bar{R}, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Здесь \bar{Q} и \bar{R} – некоторые положительно определенные диагональные матрицы соответствующих размеров: $\bar{Q} = \text{diag}[\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r]$, $\bar{R} = \text{diag}[\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_k]$.

Введем вектор $\bar{w}^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*]^T$, компоненты которого фигурируют в правых частях аналогов неравенств (2.4) для входного воздействия \bar{w} .

Имеет место следующая лемма о средних квадратах, доказательство которой приведено в [5].

Лемма. Пусть выполнено частотное неравенство (3.17), тогда средние квадраты выходных переменных устойчивой системы (3.16) при действии входного сигнала из класса (2.3), (2.4) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$(3.18) \quad \sum_{i=1}^r \bar{q}_i \langle \bar{z}_i^2 \rangle \leq \sum_{j=1}^k \bar{r}_j w_j^{*2},$$

где \bar{z}_i ($i = \overline{1, r}$) – компоненты вектора \bar{z} .

Подчеркнем, что рассмотренные выше частотные свойства выражаются через передаточные матрицы замкнутой системы в отличие от известных результатов [11–15, 19], где фигурирует передаточная матрица разомкнутой оптимальной системы.

4. Синтез регуляторов состояния

Рассмотрим решение задачи 1, когда полный вектор состояния доступен измерению, а для построения регулятора используется техника LQ -оптимизации.

Сначала сформулируем основные результаты, если для синтеза регулятора состояния (3.2) используется процедура 1, а затем результаты при использовании процедуры 2. Все утверждения этого раздела являются прямыми следствиями частотных неравенств раздела 3, а их доказательства вынесены в Приложение.

Теорема 3. Средние квадраты регулируемых переменных (ошибок регулирования) системы (3.1), (3.2), (3.3) при действии полигармонических возмущений (2.3), (2.4) в случае диагональных весовых матриц Q и R критерия (3.4) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^{m_1} q_i \langle z_i^2 \rangle \leq \sum_{j=1}^m r_j w_j^{*2},$$

а средние квадраты управляющих воздействий при $R = rI$, $r > 0$ и $Q > 0$ (необязательно диагональной) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^m \langle u_j^2 \rangle \leq 4 \|w^*\|^2,$$

где q_i и r_j – элементы диагональных весовых матриц Q и R , $\|w^*\| = \sqrt{(w^*)^T w^*}$ – евклидова норма вектора $w^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*]^T$ с компонентами из правых частей неравенств (2.4).

Из (4.1) следует, что уменьшения средних квадратов регулируемых переменных можно добиться увеличивая весовые коэффициенты матрицы Q и уменьшая весовые коэффициенты матрицы R – факт в качественной форме давно известный.

Следствие 1. Закон управления (3.2), (3.3) разрешает задачу 1 для объекта (3.1), если элементы диагональных весовых матриц Q и R критерия (3.4) удовлетворяют условиям

$$(4.3) \quad q_i = \frac{\|w^*\|^2}{z_i^{*2}}, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad r_j = 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

Действительно, в силу (4.3) из (4.1) вытекает неравенство $\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\langle z_i^2 \rangle}{z_i^{*2}} \leq 1$, откуда следует (2.6).

Таким образом, для решения задачи 1 с объектом (3.1) необходимо:

- задать весовые матрицы критерия (3.4) в соответствии с равенством (4.3);
- решить уравнение (3.3) относительно симметрической матрицы P и сформировать матрицу K регулятора закона управления (3.2).

Подчеркнем, что закон управления (3.2), (3.3), (4.3) позволяет обеспечить сколь угодно высокую точность управления (числа $z_i^* > 0$ – любые) независимо от частот ω_k внешнего возмущения (2.3).

Частные случаи этого результата для ступенчатых и гармонических возмущений приведены в [11, 20, 21]. Очевидно, что любая из переменных состояния (в этом случае $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $m_1 = n$) может быть сделана сколь угодно малой в установившемся режиме, если внешние возмущения и управления приложены в одной точке $B_1 = B_2$ (см., например, [3, 4]).

Сформулируем теперь аналогичное утверждение, справедливое в случае использования процедуры 2.

Теорема 4. *Средние квадраты регулируемых переменных (ошибок регулирования) системы (3.1), (3.2), (3.5) при действии полигармонических возмущений (2.3), (2.4) в случае диагональных весовых матриц Q и R принадлежат множеству, определяемому неравенством*

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^{m_1} q_i \langle z_i^2 \rangle \leq 0,5 \sum_{j=1}^m r_j w_j^{*2},$$

а средние квадраты управляющих воздействий при $R = rI$, $r > 0$ и $Q > 0$ (необязательно диагональной) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^m \langle u_j^2 \rangle \leq \|w^*\|^2.$$

Следствие 2. *Закон управления (3.2), (3.5) разрешает задачу 1 для объекта (3.1), если элементы диагональных весовых матриц Q и R удовлетворяют условию*

$$(4.6) \quad q_i = \frac{0,5 \|w^*\|^2}{z_i^{*2}}, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad r_j = 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

Как и следствие 1, это утверждение очевидно.

Сравнивая (4.3) и (4.6) заключаем, что если выбирать весовые коэффициенты матрицы R единичными, то для обеспечения выполнения требований к точности (2.6) в процедуре 2 элементы весовой матрицы Q можно выбирать в два раза меньшими по сравнению с процедурой 1. Ясно также, что процедура 2 гарантирует четырехкратное уменьшение мощности управляющего воздействия в установившемся режиме по сравнению с процедурой 1, если объект устойчив (см. неравенства (4.2) и (4.5)).

Таким образом, если внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в одной точке, то всегда можно построить регулятор состояния, обеспечивающий сколь угодно высокую точность управления.

Кроме того, в соответствии с результатами работ [11–15, 19] гарантируемые запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (по всем управляющим входам) составляют: для процедуры 1 — не менее 60° и не менее двух соответственно, а для процедуры 2 — не менее 90° и бесконечность.

Замечание 1. Отметим, что закон управления (3.2), (3.3) гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3.1), (3.2) с матрицей $A_{cl} = A + B_2K$. Собственные значения этой матрицы имеют отрицательную действительную часть $\operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) < 0$ ($i = \overline{1, n}$). Для обеспечения заданного времени регулирования t_p , определяемого степенью устойчивости замкнутой системы $\beta > 0$ ($t_p \approx 3/\beta$ [22]), достаточно в уравнении (3.3) заменить матрицу A на $A + \beta I$ и найденное решение $P \geq 0$ использовать в (3.2). В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_i(A + B_2K) < -\beta$, а запасы устойчивости на входе объекта, имевшие место при $\beta = 0$, сохраняются [12].

5. Синтез регуляторов выхода

Если непосредственному измерению доступен вектор $\mathbf{y} = C_2\mathbf{x}$ (совпадающий с вектором регулируемых переменных $\mathbf{z} = C_1\mathbf{x}$, $C_1 = C_2$), а внешние возмущения и управления могут быть приложены в разных точках $B_1 \neq B_2$, то требуется выполнение условия минимальной фазовости объекта, а также равенства числа управлений и регулируемых переменных $m = m_1$. Другими словами [1, 11], корни уравнения (нули объекта) $\det[C_2 \operatorname{adj}(sI - A)B_2] = 0$ (adj – обозначение присоединенной матрицы), должны быть левыми (иметь отрицательную вещественную часть).

Построим регулятор по выходу для такого объекта, разрешающего *задачу 1*. Он будет строиться на базе наблюдателя полного порядка так, что дополнительно гарантируется наличие запасов устойчивости на входе объекта по фазе и коэффициенту усиления, которые имели место для регулятора состояния (3.2) [11–15, 19].

Следуя [6], рассмотрим объект управления (2.1), у которого в общем случае $B_1 \neq B_2$. Для решения *задачи 1* приведем вектор внешних возмущений \mathbf{w} ко входу объекта так, чтобы измеряемые (регулируемые) переменные не изменились. Для этого выразим из (2.1) вектор измеряемых переменных

$$(5.1) \quad \mathbf{y}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2\mathbf{u}(s) + C_2(sI - A)^{-1}B_1\mathbf{w}(s)$$

и определим вектор \mathbf{f} эквивалентных внешних возмущений, приведенных ко входу объекта, соотношением

$$(5.2) \quad \mathbf{f}(s) = [C_2(sI - A)^{-1}B_2]^{-1}C_2(sI - A)^{-1}B_1\mathbf{w}(s) = T_{fw}(s)\mathbf{w}(s).$$

Тогда соотношение (5.1) представим так:

$$(5.3) \quad \mathbf{y}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2[\mathbf{u} + \mathbf{f}].$$

Заметим, что требование минимальной фазовости объекта гарантирует устойчивость полюсов $T_{fw}(s)$ и одинаковый установившийся режим в исходной системе (5.1) и в эквивалентной (5.2), (5.3) при действии ограниченных внешних возмущений (2.3) только в случае, если управляющее воздействие \mathbf{u} формируется лишь по измеряемым переменным \mathbf{y} , которые в этих системах совпадают.

Очевидно, что уравнению (5.3) может быть поставлена в соответствие следующая модель в пространстве состояний (вектор \mathbf{f} удовлетворяет (5.2)):

$$(5.4) \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + B_2[\mathbf{u} + \mathbf{f}], \quad \mathbf{z} = \mathbf{y} = C_2\bar{\mathbf{x}},$$

где новый вектор состояния $\bar{\mathbf{x}}$, вообще говоря, отличен от вектора состояния исходной системы (2.1), однако векторы $\mathbf{y}(t)$ при нулевых начальных условиях совпадают.

Заметим, что передаточная матрица $T_{fw}(s)$ в общем случае не является правильной (ее элементы могут иметь степени полиномов числителя выше степени полиномов знаменателя), поэтому для ограниченности сигнала \mathbf{f} будем полагать, что частотный спектр внешнего возмущения \mathbf{w} ограничен некоторым конечным числом ω^* , значение которого должно выбираться из физических соображений. Пусть найдено число ρ такое, что выполнено частотное матричное неравенство

$$(5.5) \quad T_{fw}^T(-j\omega)T_{fw}(j\omega) \leq \rho^2 I, \quad \omega \in [0, \omega^*].$$

Очевидно, что если $B_1 = B_2$, то $\rho = 1$, а $\omega^* = \infty$.

Переходя к формулировке основного результата этого раздела, будем считать весовые матрицы Q и R функционала оптимизации диагональными.

Пусть найдена матрица K регулятора состояния (3.2) на основе одной из процедур раздела 3, условия применения которых оговариваются далее в соответствующем утверждении. Будем искать закон управления в виде

$$(5.6) \quad \mathbf{u} = K\mathbf{x}_c,$$

где $\mathbf{x}_c \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя (фильтра) полного порядка

$$(5.7) \quad \dot{\mathbf{x}}_c = A\mathbf{x}_c + B_2\mathbf{u} + K_f(\mathbf{y} - C_2\mathbf{x}_c),$$

в котором матрица коэффициентов передачи K_f имеет вид

$$(5.8) \quad K_f = Y C_2^T,$$

где Y – неотрицательно определенное решение матричного уравнения Риккати [23,24]

$$(5.9) \quad AY + YA^T - Y C_2^T C_2 Y = -Q_0 - \alpha B_2 V B_2^T.$$

В правой части (5.9) Q_0 и V – произвольные неотрицательно определенная и положительно определенная матрицы чисел, α – достаточно большой положительный весовой коэффициент.

В этом случае матрицы регулятора (2.2) имеют вид:

$$(5.10) \quad A_c = A + B_2 K - K_f C_2, \quad B_c = K_f, \quad C_c = K, \quad D_c = 0.$$

Теорема 5. Пусть рассматривается минимально-фазовый объект (2.1), у которого $C_1 = C_2$, $m_1 = m_2 = m$. Тогда при $R = rI$, где скаляр $r > 0$, и достаточно большим α в (5.9) неравенства теорем 3 и 4, а также утверждения следствий 1 и 2 в системе с наблюдателем (2.1), (5.6)–(5.9) остаются в силе с точностью до замены в соотношениях (4.1)–(4.6) $\|w^*\|^2$ на $\rho^2 \|w^*\|^2$.

Таким образом, если объект минимально-фазовый, то в асимптотике ($\alpha \rightarrow \infty$) имеет место результат, аналогичный случаю полного измерения состояния, если частоты внешнего возмущения не превышают ω^* .

Замечание 2. Очевидно, что в случае, когда внешние возмущения и управления приложены в одной точке $B_1 = B_2$, то неравенства теорем 3 и 4, а также утверждения следствий 1 и 2 остаются неизменными в системе с наблюдателем (2.1), (5.6)–(5.9), а частоты внешнего возмущения ω_k произвольны. В системе с таким наблюдателем гарантируемые границы запасов устойчивости сохраняют значения, которые имели место при полном измерении вектора состояния объекта [14, 23, 24].

Отметим, что в отличие от работ [25–27] здесь частотный спектр возмущения неизвестен.

Замечание 3. Закон управления (3.2), (3.3), (5.6)–(5.9) гарантирует устойчивость матрицы замкнутой системы (2.1), (3.2), (3.3), (5.6)–(5.9)

$$(5.11) \quad \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) = \operatorname{Re} \lambda_i \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} < 0, \quad i = \overline{1, 2n}.$$

Для обеспечения заданной степени устойчивости $\beta > 0$ замкнутой системы

$$(5.12) \quad \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) < -\beta \quad (i = \overline{1, 2n})$$

достаточно [28] при построении регулятора в уравнениях (3.3) и (5.9) матрицу A объекта заменить на $\tilde{A} = A + \beta I$ и найти регулятор $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ по формулам (3.2), (5.8), (5.10), который гарантирует устойчивость замкнутой системы с такой матрицей \tilde{A} объекта.

Регулятор, обеспечивающий выполнение (5.11), имеет матрицы $\tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c$, а запасы устойчивости на входе объекта сохраняются [28].

6. Связь оценок точности на языке средних квадратов и абсолютных значений

В [6] точность в установившемся режиме работы оценивается величинами

$$(6.1) \quad z_{i,st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

А амплитуды гармоник каждой компоненты внешнего возмущения (2.3) подчинены условиям

$$(6.2) \quad \sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq \tilde{w}_i^{*2}, \quad i = \overline{1, \mu},$$

где p – заданное число гармоник, \tilde{w}_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) – заданные числа.

В [6] доказано, что если элементы диагональных весовых матриц выбирать из равенств

$$(6.3) \quad q_i = \frac{p \|\tilde{w}^*\|^2}{\tilde{z}_i^{*2}}, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad r_j = 1, \quad j = \overline{1, m},$$

где \tilde{z}_i^* – заданные положительные числа, то регулятор (3.2), (3.3) обеспечивает выполнение требований к точности

$$(6.4) \quad z_{i,st} \leq \tilde{z}_i^*.$$

Пусть для регулятора состояния (3.2) задача 1 решена. При этом весовые матрицы Q и R выбраны из равенств (4.3). Найдем границы установившихся ошибок – значения \tilde{z}_i^* из (6.4).

Поскольку рассматривается один и тот же регулятор (3.2), (3.3), то естественно приравнять элементы весовых матриц Q из (4.3) и (6.3)

$$(6.5) \quad \frac{\|w^*\|^2}{z_i^{*2}} = \frac{p \|\tilde{w}^*\|^2}{\tilde{z}_i^{*2}}.$$

Из (2.4) с учетом (6.2) заключаем, что $\tilde{w}_i^{*2} = 2w_i^{*2}$, $i = \overline{1, \mu}$.

Тогда из (6.5) следует, что

$$(6.6) \quad \tilde{z}_i^* = \sqrt{2p} \cdot z_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Таким образом, на основе (6.6) можно найти границы установившихся ошибок \tilde{z}_i^* из (6.4), если оценка точности производится на основе (6.1). Недостатком оценки (6.6) является её зависимость от числа гармоник p внешнего возмущения.

7. Численный пример

Рассмотрим взаимосвязанный электропривод, математическая модель и параметры которого приведены в [29, 30].

Данный объект минимально-фазовый, но число управлений меньше числа регулируемых переменных. Поэтому, вообще говоря, условия теоремы 5 выполнены не все, а именно: стремление α к ∞ не обеспечивает совпадения свойств замкнутой системы с регулятором состояния и с регулятором по выходу (на основе наблюдателя полного порядка). Однако введение требований к быстродействию системы

(в виде заданной степени устойчивости) позволяет разрешить поставленную задачу, несмотря на то что Loop Transfer Recovery (*LTR*) свойство [23, 24] не имеет места.

Компоненты вектора состояния $\mathbf{x} \in R^5$ имеют следующий смысл [29]: x_1, x_2 – отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных, x_3, x_4 – отклонения якорных токов двигателей от номинальных, x_5 – отклонение угловой скорости двигателей от номинальной (двигатели работают на общую нагрузку и жестко связаны, т.е. имеют одинаковую угловую скорость). Вектор управления $\mathbf{u} \in R^2$ с компонентами u_1, u_2 – отклонения управляющих напряжений от номинальных (входы тиристорных преобразователей). Внешнее возмущение w – отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального. Регулируемые переменные включают токи двигателей и угловую скорость.

Матрицы уравнений состояния (2.1) объекта управления имеют вид [30]:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,33333 & 0 & 0 & 0 \\ 137,8105 & 0 & -11,2866 & 0 & -1123,155 \\ 0 & 132,4591 & 0 & -11,0653 & -1101,133 \\ 0 & 0 & 0,24867 & 0,25364 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0307 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Видно, что объект характеризуется существенным свойством $B_1 \neq B_2$.

Для построения регулятора по выходу используется подход к синтезу, предложенный в разделе 5.

Весовые матрицы Q и R выбраны из равенств (4.3) при условии, что $z_1^{*2} = z_2^{*2} = 375$, $z_3^{*2} = 1$, $w^* = 600$. При этом

$$Q^{1/2} = \begin{bmatrix} 30,98 & 0 & 0 \\ 0 & 30,98 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Коэффициент α выбран равным 100, а желаемая степень устойчивости $\beta = 30$, что определяет время регулирования ($t_p = 3/\beta$) порядка 0,1 с.

Полученные матрица регулятора состояния K и матрица K_f наблюдателя (5.7) при этом имеют следующий вид:

$$K = \begin{bmatrix} -0,7266 & -0,0022 & -31,2370 & -0,1782 & -3726,20 \\ -0,0019 & -0,7737 & -0,1610 & -31,2720 & -3798,20 \end{bmatrix},$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 157850 & 2,0390 & 474,55 \\ -2,5041 & 134580 & 485,06 \\ 6614,70 & 0,0863 & -0,0519 \\ -0,0423 & 5989,60 & -0,0518 \\ -0,0520 & -0,0515 & 59,998 \end{bmatrix}.$$

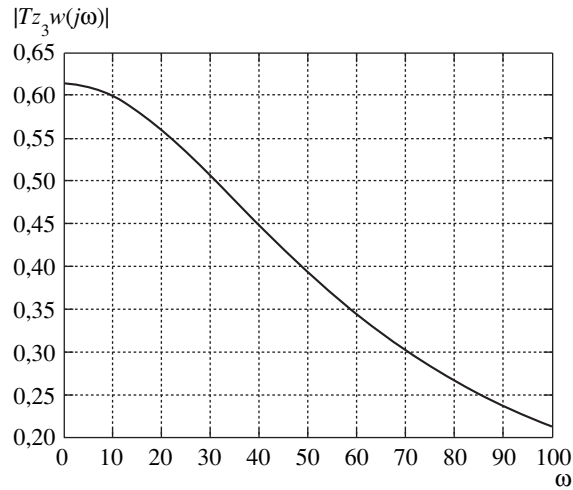


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения к регулируемой переменной z_3 .

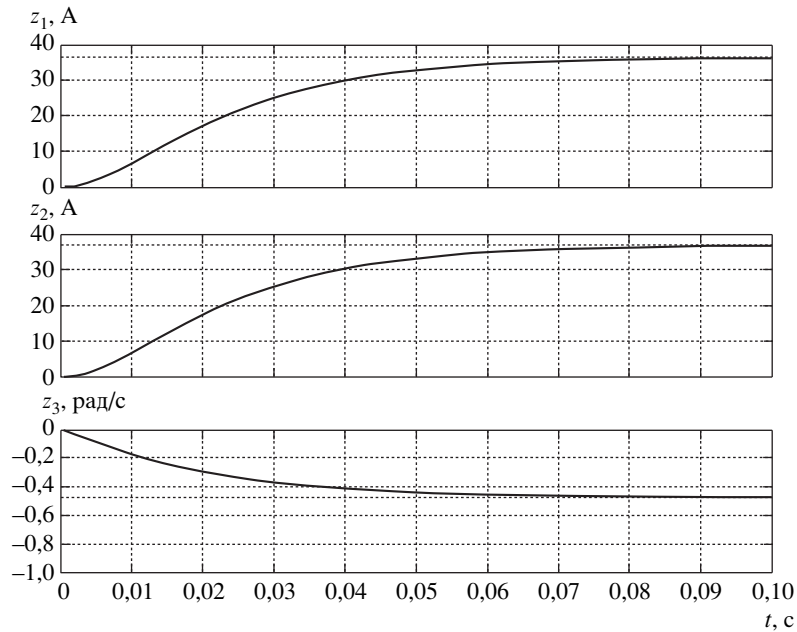


Рис. 2. Переходные процессы по токам и угловой скорости.

На рис. 1 построена амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения (момента нагрузки) к регулируемой переменной z_3 (угловой скорости двигателей), по которой судят о качестве замкнутой системы. Эта характеристика промасштабирована амплитудой внешнего возмущения $w^* = 600$.

Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наилучшее внешнее возмущение для замкнутой системы – ступенчатое.

На рис. 2 приведены графики переходных процессов по токам двигателей и угловой скорости при ступенчатом изменении момента нагрузки $w(t) = \text{const} = w^* = 600$.

Из графиков монотонных переходных процессов видно, что двигатели равномерно нагружены (их якорные токи близки) и выполнены требования к точности, в частности, по угловой скорости $|z_3(t)| \leq z_3^* = 1$.

Заметим, что приведенные переходные процессы и частотная характеристика близки к таковым в системе с регулятором состояния (3.2) (с теми же весовыми матрицами Q и R и значением $\beta = 30$).

8. Заключение

В работе предложены процедуры синтеза линейных многомерных систем заданной точности при действии ограниченных по мощности внешних возмущений из класса полигармонических функций с неизвестными амплитудами, частотами и их числом. При этом точность работы системы управления оценивается среднеквадратичными значениями регулируемых переменных. Основой решения проблемы обеспечения заданной точности в настоящей работе служат процедуры LQ -оптимизации. В работе получены условия разрешимости проблемы заданной точности (сколь угодно высокой) для регуляторов состояния (управления и возмущения приложены к объекту в одной точке) и регуляторов по выходу (объект минимально-фазовый, у которого измеряемые и регулируемые переменные совпадают, а число управлений и регулируемых переменных одинаково). При этом помехи измерения не учитываются, а представленные результаты не зависят от числа гармоник внешних возмущений. Полученные результаты опираются на исследование частотных свойств замкнутых LQ -оптимальных систем и выбор коэффициентов квадратичного функционала оптимизации.

Порядок получаемого динамического регулятора по выходу не превышает порядка исходного физического объекта, что важно для практических приложений. При этом гарантируется наличие высоких запасов устойчивости по фазе и коэффициенту усиления на входе объекта, если объект минимально-фазовый.

Приведен пример синтеза регулятора по выходу для электромеханического объекта.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. С учетом (3.2), (3.7) представим уравнение (3.5) в виде $A_{cl}^T P + P A_{cl} + 2P B_2 R^{-1} B_2^T P = -C_1^T Q C_1$. Отсюда после добавления и вычитания из левой части sP и умножения слева на $B_2^T (-sI - A_{cl}^T)^{-1}$, а справа на $(sI - A_{cl})^{-1} B_2$, принимая во внимание (3.2), (3.7) (после добавления к обеим частям матрицы $0,5R$), вытекает тождество (3.12). Из тождества (3.12) в силу неотрицательной определенности его левой части следует (3.13), а в силу отрицательной полуопределенности второго слагаемого правой части вытекает (3.14). Докажем теперь неравенство (3.15). При $R = rI$, где скаляр $r > 0$, из (3.14) следует, что H_∞ норма [9] передаточной матрицы $\|I + 2T_{uw}\|_\infty \leq 1$ или $\|I/2 + T_{uw}\|_\infty \leq 1/2$, откуда, используя неравенство треугольника, получим $\|T_{uw}\|_\infty = \|I/2 + T_{uw} - I/2\|_\infty \leq \|I/2 + T_{uw}\|_\infty + \|I/2\|_\infty \leq 1/2 + 1/2 = 1$, что эквивалентно (3.15).

Доказательство свойства в) теоремы 2 следует из (3.14). Действительно, при $m = \mu = 1$ это неравенство примет вид

$$[1/2 + T_{uw}(-j\omega)][1/2 + T_{uw}(j\omega)] \leq 1/4,$$

откуда с учетом представления $T_{uw}(j\omega) = \text{Re}T_{uw}(j\omega) + j\text{Im}T_{uw}(j\omega)$ получим:

$$[1/2 + \text{Re}T_{uw}(j\omega)]^2 + \text{Im}^2T_{uw}(j\omega) \leq 1/4.$$

Геометрическая интерпретация последнего неравенства и приводит к свойству 6).

Доказательство теоремы 3. Неравенство (4.1) – следствие частотного неравенства (3.9) и леммы при диагональной структуре весовых матриц Q и R . Аналогично второе неравенство (4.2) является следствием частотного неравенства (3.11) (справедливого при некоторой $Q > 0$ и диагональной $R = rI$, $r > 0$) и леммы.

Доказательство теоремы 4. Неравенство (4.4) – следствие частотного неравенства (3.13) и леммы при диагональной структуре весовых матриц Q и R . Аналогично второе неравенство (4.5) является следствием частотного неравенства (3.15) (справедливого при некоторой $Q > 0$ и диагональной $R = rI$, $r > 0$) и леммы.

Доказательство теоремы 5. Пусть для “объекта” (5.4) на основе одной из процедур 1 или 2 построен регулятор состояния

$$(П.1) \quad \mathbf{u} = K\bar{\mathbf{x}}.$$

Обозначим через $T_{zf}(s)$, $T_{uf}(s)$ (от $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{z}$ и $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}$) передаточные матрицы замкнутой системы (5.4) и (П.1). Они имеют вид (3.7) и удовлетворяют частотным неравенствам теорем 1 и 2. С другой стороны, эти матрицы могут быть выражены через передаточную матрицу разомкнутой (по входу \mathbf{u}) системы (5.4), (П.1) $W(s) = -K(sI - A)^{-1}B_2$ следующим образом:

$$(П.2) \quad T_{zf}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2(I - K(sI - A)^{-1}B_2)^{-1} = \\ = C_2(sI - A)^{-1}B_2(I + W(s))^{-1},$$

$$(П.3) \quad T_{uf}(s) = K(sI - A)^{-1}B_2(I - K(sI - A)^{-1}B_2)^{-1} = -W(s)(I + W(s))^{-1}.$$

Аналогичные передаточные матрицы в системе с наблюдателем (5.4), (5.6)–(5.9) имеют соответственно вид:

$$(П.4) \quad C_2(sI - A)^{-1}B_2(I - K_c(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2)^{-1} = \\ = C_2(sI - A)^{-1}B_2(I + W_c(s))^{-1},$$

$$(П.5) \quad K_c(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2(I - K_c(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2)^{-1} = -W_c(s)(I + W_c(s))^{-1},$$

где $K_c(s) = K(sI - A - B_2K + K_fC_2)^{-1}K_f$ – передаточная матрица регулятора (5.6)–(5.9) (т.е. $\mathbf{u} = K_c(s)\mathbf{y}$), $W_c(s) = -K_c(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица разомкнутой (по входу \mathbf{u}) системы (5.4), (5.6)–(5.9). При выводе (П.2)–(П.5) использовалось почти очевидное матричное тождество [31] $(I + GF)^{-1}G = G(I + FG)^{-1}$.

В [23, 24] показано, что если в (5.9) $\alpha \rightarrow \infty$, то $W_c(s) = W(s)$ и, следовательно, (П.4) совпадает с (П.2), а (П.5) с (П.3). Таким образом, передаточные матрицы замкнутой системы с наблюдателем (5.4), (5.6)–(5.9) будут удовлетворять матричным неравенствам теорем 1 и 2. Так, неравенства (3.9) и (3.11) при $R = rI$ для этих передаточных матриц примут вид:

$$(П.6) \quad T_{zf}^T(-j\omega)QT_{zf}(j\omega) \leq rI, \quad \omega \in [0, \infty],$$

$$(П.7) \quad T_{uf}^T(-j\omega)T_{uf}(j\omega) \leq 4I, \quad \omega \in [0, \infty].$$

Передаточные матрицы исходной замкнутой системы с наблюдателем (5.1), (5.6)–(5.9) (от $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}$ и $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{u}$), в силу (5.1)–(5.3), имеют вид:

$$(П.8) \quad T_{zw}(s) = T_{zf}(s)T_{fw}(s), \quad T_{uw}(s) = T_{uf}(s)T_{fw}(s).$$

Умножая (П.6) и (П.7) слева на $T_{fw}^T(-j\omega)$, а справа на $T_{fw}(j\omega)$ и учитывая в правой части полученных выражений соотношение (5.5), приходим в силу (П.8) к неравенствам:

$$\begin{aligned} T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) &\leq r\rho^2 I, \quad \omega \in [0, \omega^*], \\ T_{uw}^T(-j\omega)T_{uw}(j\omega) &\leq 4\rho^2 I, \quad \omega \in [0, \omega^*]. \end{aligned}$$

Из последних неравенств на основе леммы получим соотношения:

$$\sum_{i=1}^m q_i z_{i,st}^2 \leq r\rho^2 \|w^*\|^2, \quad \sum_{i=1}^m u_{i,st}^2 \leq 4\rho^2 \|w^*\|^2,$$

доказывающие утверждение теоремы 5 относительно неравенств (4.1)–(4.3). Подобным же образом получаются аналоги неравенств (4.4)–(4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
2. *Садомцев Ю.В.* Основы подхода к решению задачи стохастического линейного регулирования и слежения по критериям точности и грубости // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 4. С. 57–94.
3. *Садомцев Ю.В.* Проблема статической точности в теории многомерных систем автоматического управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 2. С. 48–59.
4. *Садомцев Ю.В.* Конструирование систем управления с обратной связью по критериям точности и грубости. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2003.
5. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности по среднеквадратичному критерию // АиТ. 1998. № 12. С. 109–117.
6. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур LQ-оптимизации // АиТ. 1998. № 7. С. 83–95.
7. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // АиТ. 1960. № 4. С. 436–443; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435.
8. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat., Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
9. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 8. P. 831–846.
10. *Петров Ю.П.* Синтез оптимальных систем управления при неполноте известных возмущающих сил. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
11. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
12. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear optimal control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.
13. *Александров А.Г.* Свойства аналитически сконструированных линейных систем // АиТ. 1975. № 10. С. 5–11.
14. *Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M.* Robustness results in linear-quadratic Gaussian based multivariable control designs // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. № 1. P. 75–92.
15. *Safonov M.G., Athans M.* Gain and phase margin for multiloop LQG regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. 22. № 2. P. 173–179.
16. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
17. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.
18. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

19. Александров А.Г., Небалчев Н.А. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов на основе частотных критериев качества. I // *АиТ*. 1971. № 12. С. 12–20.
20. Садомцев Ю.В. Аналитическое конструирование регуляторов по заданным показателям качества. Развитие проблемы / Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. политехн. ин-та, 1980. С. 32–48.
21. Тимофеев Ю.К. Статические ошибки аналитически сконструированных систем / Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб. Саратов: Изд-во Саратов. политехн. ин-та, 1976. С. 53–60.
22. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
23. Doyle J.C., Stein G. Robustness with observers // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. V. 24. № 4. P. 607–611.
24. Doyle J.C., Stein G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1981. V. 26. № 1. P. 4–16.
25. Якубович В.А. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний при неизвестном гармоническом внешнем воздействии // *ДАН*. 1993. Т. 333. № 2. С. 170–172.
26. Davison E.J., Patel P. Application of the robust servomechanism controller to systems with periodic tracking/disturbance signals // *Int. J. Control*. 1988. V. 47. № 1. P. 111–127.
27. Sarkin A.V., Petersen I.R. Robust control with rejection of harmonic disturbances // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1995. V. 40. № 11. P. 1968–1971.
28. Честнов В.Н. Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // *АиТ*. 2007. № 3. С. 199–205.
29. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞ подхода // *АиТ*. 2004. № 9. С. 110–119.
30. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ подхода // *АиТ*. 2004. № 10. С. 101–108.
31. Weinmann A. *Uncertain Models and Robust Control*. Wien-New York: Springer-Verlag, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 06.06.2011