

# УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ИЗБЕЖАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ<sup>1</sup>

С. И. Кумков\*, С. Г. Пятко\*\*

\*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, kumkov@imm.uran.ru

\*\*Академия гражданской авиации, С-Петербург

Разработаны новые алгоритмы решения задачи избежания столкновения (разрешения конфликтной ситуации) между маневрирующим и неманеврирующим воздушными судами. Равномерное (с постоянными скоростями) движение обоих судов в горизонтальной плоскости описывается кинематическими уравнениями. Маневрирующее судно управляется изменением угловой скорости направления движения, на которую наложено геометрическое ограничение. Столкновение (конфликтная ситуация) разрешается, если минимальное расстояние между судами при их наихудшем сближении не менее заданного допуска безопасного эшелонирования.

Целью маневра управляемого судна при избежания столкновения или разрешения конфликтной ситуации является минимизация необходимого бокового отклонения от его исходной трассы при условии обеспечения безопасного эшелонирования. Общая структура разрешающего маневра регламентируется технологическими требованиями по управлению воздушным движением. Она содержит: минимальный по длительности  $S$ -образный маневр увода судна с исходной траектории, прямолинейный участок выдерживания заданной продолжительности после расхождения и минимальный по длительности  $S$ -образный маневр возвращения судна на исходную трассу.

Рассматриваются только случаи некооперативного управления: только одно из конфликтующих судов назначается маневрирующим, а второе судно не маневрирует и движется с постоянным курсом на всем интервале времени разрешения конфликтной ситуации. При назначении маневрирующим одного или другого судна из конфликтующей пары задача разрешения конфликтной ситуации формулируется не как дифференциальная игра, а как минимизационная задача оптимального управления. Рассматриваются и сравниваются четыре возможных варианта разрешения конфликтной ситуации: два варианта, когда первое судно, назначенное маневрирующим, выполняет маневр уклонения (изменяет свой курс) по часовой стрелке и, соответственно, против часовой стрелки, и два варианта, когда маневрирующим назначается второе судно, которое выполняет маневр уклонения по часовой стрелке и, соответственно, против часовой стрелки.

Для всех возможных случаев маневров выводится конструктивный алгоритм определения условия разрешимости конфликтной ситуации. Для различных вариантов конфликтных ситуаций выполнено численное моделирование алгоритмов анализа разрешимости и построения оптимальных маневров.

*Ключевые слова:* Воздушное судно, уравнения движения в горизонтальной плоскости, кинематика, столкновение, конфликтная ситуация, условие разрешения, маневры, оптимальный маневр, задача минимизации, итерационный алгоритм.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Задача разработки практически приемлемых схем и маневров для избежания столкновений и разрешения конфликтных ситуаций между воздушными судами, является крайне важной для обеспечения безопасности воздушного движения. Далее по тексту для упрощения изложения под *столкновением* или *конфликтной ситуацией* будем понимать ситуацию, когда минимальное расстояние между судами при их наихудшем сближении оказывается менее заданного допуска безопасного эшелонирования, и будет использоваться единый термин – *конфликтная ситуация*. В результате необходимого маневра конфликтная ситуация разрешается, если минимальное расстояние между судами при их наихудшем сближении обеспечивается не менее заданного допуска.

Рассмотрение существующих практических постановок таких задач показывает, что анализ конфликтной ситуации и рекомендуемые маневры, ее разрешающие, являются как в силу многокритериальности задачи, так и по техническим причинам весьма приближенными [3–5]. Более тонкие алгоритмы анализа и построения маневров [6] могут иметь

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03–01–00415) и корпорации “Новые информационные технологии в авиации” (контракт № 37/2004).

сложную логическую структуру. Строгие математические формулировки задачи анализа и разрешения конфликтных ситуаций [9–12] могут приводить к решениям и алгоритмам, неприемлемым с точки зрения технологических ограничений и нормативных требований при управлении воздушным движением [7].

Например, в [9] задача формулировалась без ограничения на боковое отклонение маневрирующего судна от его трассы, поэтому реализовавшиеся боковые отклонения ([9], Figs.1–4) могут оказаться неприемлемо большими. К неприемлемым величинам бокового отклонения приводят и постановки задач ([10], Fig. 6.6) без ограничений на это отклонение и без требований на минимальность суммарного времени пребывания судна вне своей трассы. А постановки задач, рассматриваемые в [11–12], могут приводить к необходимости изменения структуры трасс и воздушного пространства.

Для гарантированного разрешения конфликтной ситуации необходимы алгоритмы, которые бы прямо учитывали требования технологии управления воздушным движением и конструктивно (по построению) обеспечивали безопасное эшелонирование.

В настоящей работе рассматривается управляемое движение двух конфликтующих воздушных судов в горизонтальной плоскости вдоль своих воздушных трасс. Движение каждого судна задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые координаты описывают положение в плоскости, третья фазовая координата – курс, характеризует направление вектора скорости. Скорости движения судов предполагаются постоянными, а их величины – известными.

Исследуется случай заведомо конфликтной ситуации. При этом прогнозируется ситуация сближения судов и производится ее анализ. В соответствии с Технологическими требованиями по управлению воздушным движением [7] для разрешения конфликтной ситуации выбирается одно воздушное судно. Другое судно продолжает движение, не маневрирует и не участвует в разрешении данной конфликтной ситуации.

Общая структура разрешающего маневра регламентируется Технологическими требованиями. Она содержит: минимальный по длительности  $S$ -образный маневр увода судна с исходной траектории, прямолинейный участок выдерживания заданной продолжительности после расхождения судов и минимальный по длительности  $S$ -образный маневр возвращения судна на его исходную трассу.

При назначении маневрирующим одного или другого судна из конфликтующей пары задача разрешения конфликтной ситуации формулируется не как дифференциальная игра, а как минимизационная задача оптимального управления, в которой целью маневра управляемого судна является минимизация необходимого бокового отклонения от его исходной трассы при условии обеспечения безопасного эшелонирования между судами.

Требование минимальности отклонения маневрирующего судна от своей трассы и требование быстреего возвращения на нее приводят к маневру на терминальное множество специального вида.

По своей сути указанное терминальное множество является специальной областью фазовых состояний управляемой системы маневрирующего судна, при выходе судна в которую конфликтная ситуация разрешается и может быть разрешена не единственным образом. Из возможных маневров, выводящих маневрирующее судно в данное множество, для реализации выбирается оптимальный маневр, удовлетворяющий дополнительному технологическому требованию – минимальности суммарного времени пребывания маневрирующего судна вне его трассы.

Использование маневров заданной структуры и введение указанного терминального множества фиксирует схему наихудшего сближения при разрешающем маневре. Это по результатам прогноза позволяет строить разрешающий маневр и рассчитывать его параметры по простым унифицированным формулам.

Для рассматриваемой конфликтной ситуации проверяется существование разрешающего маневра в четырех возможных вариантах разрешения конфликтной ситуации: два

варианта, когда первое судно, назначенное маневрирующим, выполняет маневр уклонения (изменяет свой курс) по часовой стрелке и, соответственно, против часовой стрелки, и два варианта, когда маневрирующим назначается второе судно, которое выполняет маневр уклонения по часовой стрелке и, соответственно, против часовой стрелки. Варианты маневров, для которых условия разрешения конфликтной ситуации выполняется, сравниваются между собой по значениям их параметров – по величине необходимого бокового отклонения и суммарному времени пребывания маневрирующего судна вне его трассы.

Разработанные алгоритмы и программное обеспечение позволяют в реальном времени производить обнаружение конфликтной ситуации и вырабатывать управление для ее разрешения. избежания. Алгоритмы предназначены для использования в перспективных системах управления воздушным движением. Настоящая работа посвящена описанию и анализу основных положений предлагаемого подхода и проводится в модельной постановке – в отсутствии возмущений и неопределенности входной информации.

## 2 ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ РАССМОТРЕНИЕ

### 2.1. Технологические требования к маневру разрешения конфликтной ситуации

Технологии работы диспетчеров службы управления воздушным движением предусматривают следующие требования к разрешающему маневру [7].

I. Прогнозирование и обнаружение конфликтной ситуации должно осуществляться с запасом расстояния и времени, достаточными для выполнения разрешающего маневра.

II. Для снижения нагрузки на диспетчера и вычислительный комплекс системы управления воздушным движением, разрешение конфликтной ситуации должно осуществляться, как правило, маневром только одного судна. Второе судно продолжает свое движение, не маневрирует и не участвует в разрешении конфликтной ситуации.

III. Разрешающий маневр состоит из следующих стандартных элементов: S-образный маневр увода судна с исходной траектории с экстремальными значениями управления противоположных знаков на первой и второй половинах длительности маневра; прямолинейный участок выдерживания заданной продолжительности после расхождения судов; S-образный маневр возвращения судна на исходную трассу с экстремальными значениями управления противоположных знаков на первой и второй половинах длительности маневра.

IV. Для уменьшения времени занятости диспетчера на разрешение данной конфликтной ситуации и снижения нагрузки на экипаж маневрирующего судна, длительность маневра увода должна быть минимальной.

V. Для уменьшения времени занятости диспетчера на разрешение данной конфликтной ситуации и снижения нагрузки на экипаж маневрирующего судна, длительность выполнения маневра возвращения судна на исходную трассу должна быть минимальной.

VI. Для исключения вторичных (наведенных) конфликтных ситуаций с другими судами, боковое отклонение маневрирующего судна от оси его исходной трассы должно быть минимально необходимым.

VII. Боковое ускорение судна при разрешающем маневре не должно превышать заданный допуск.

VIII. Требование минимальной продолжительности всего маневра, разрешающего конфликтную ситуацию, т.е., минимальность суммарного времени пребывания маневрирующего судна в стороне от оси его трассы.

Перечисленные требования далее формализуются и прямо или косвенно используются для постановки задачи построения оптимального разрешающего маневра.

## 2.2. Описание движения воздушных судов

Движение каждого воздушного судна в горизонтальной плоскости (рис. 1) стандартной нормальной системы координат [8] описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \psi, \\ \dot{z} &= V \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_{\max} u, \\ \omega_{\max} &= k/V.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $x$  – ордината положения ВС по оси  $OX$  в стандартной нормальной системе координат;  $z$  – абсцисса положения ВС по оси  $OZ$  в стандартной нормальной системе координат;  $\psi$  – направление вектора скорости (угол отсчитывается от оси  $OX$  по часовой стрелке);  $\omega_{\max}$  – максимальная величина допустимой угловой скорости;  $k > 0$  – максимальная величина допустимого бокового ускорения ВС;  $V > 0$  – приборная скорость самолета в отсутствие возмущений;  $u$  – управление. Трасса судна отмечена жирной штриховой линией,  $\Psi_{\text{Tr}}$  – направление трассы, жирная стрелка – вектор скорости, указаны направления отсчета углов. Система уравнений (1) используется для выполнения стандартных навигационных расчетов [3–7]. Принимаются следующие допущения относительно параметров

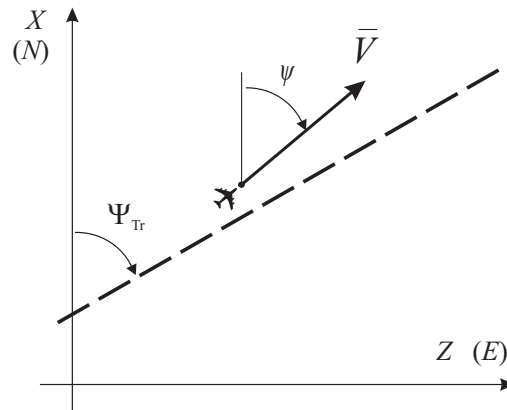


Рис. 1: Движение воздушного судна; стандартная нормальная система координат

системы (1). Величины  $V_1$  и  $V_2$  приборной скорости каждого воздушного судна полагаются постоянными

$$V_1 = \text{Const}, \quad V_2 = \text{Const}.\quad (2)$$

Управление каждого судна, назначенного в качестве маневрирующего, полагается ограниченным по модулю

$$|u_1| \leq 1 \quad \text{или} \quad |u_2| \leq 1.\quad (3)$$

Для упрощения исследования и вычислений используется вариант нормальной системы координат, центрированной направлением движения неманеврирующего судна и его трассой (рис. 2). Выделим, например, судно условно идущее на Север со скоростью  $V_1$  (рис. 2). Далее, для простоты изложения это судно, его параметры и фазовые переменные будем всегда отмечать индексом “1”, и полагать угол направления его трассы равным нулю  $\Psi_1 \equiv 0$  (условно, движение этого судна происходит на Север по направлению оси  $OX$ ). Судно, пересекающее трассу судна 1, его параметры и фазовые переменные отмечаются индексом “2”, его трасса в этой системе координат указана штриховой линией. При этом угол  $\Psi_{\text{Tr}}$  схождения трасс прямо совпадает с углом  $\Psi_2$  направления трассы судна 2 (рис. 2), а направление его отсчета стандартное – по часовой стрелке от оси  $OX$ .

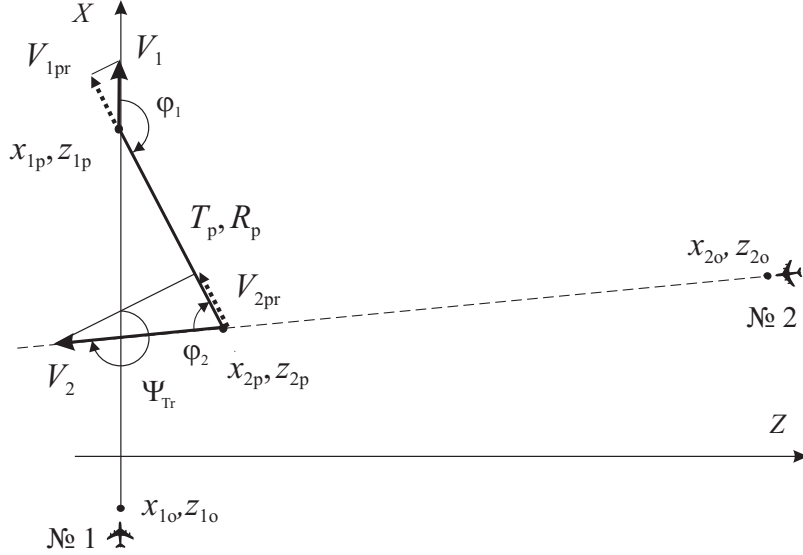


Рис. 2: Движение пары судов в системе, центрированной направлением и трассой немавирующего судна 1

На рис. 2 отмечены также начальные позиции  $x_{1o}, z_{1o}$  и  $x_{2o}, z_{2o}$  судов в условный начальный момент времени  $t_0 = 0$ , их позиции  $x_{1p}, z_{1p}$  и  $x_{2p}, z_{2p}$  в момент  $T_p$  наихудшего сближения, жирная линия показывает минимальное расстояние между судами, пунктирными стрелками указаны проекции  $V_{1pr}, V_{2pr}$  скоростей судов на линию визирования в этот момент.

В момент наихудшего сближения судов производная по времени расстояния между ними равна нулю, т.е.,  $\dot{R} = V_{1pr} - V_{2pr} = 0$ , а вспомогательные углы – угол визирования судна 2 из позиции судна 1 и угол визирования судна 1 из позиции судна 2, обозначены, соответственно, как  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Прогнозируемое движение судна 1 по его исходной трассе без маневра описывается конечными соотношениями

$$x_1(t) = x_{1o} + V_1 t, \quad z_1(t) \equiv 0, \quad \Psi_1 \equiv 0. \quad (4)$$

Прогнозируемое движение судна 2 по его трассе без маневра описывается конечными соотношениями

$$x_2(t) = x_{2o} + tV_2 \cos \Psi_{Tr}, \quad z_2(t) = z_{2o} + tV_2 \sin \Psi_{Tr}, \quad \Psi_{Tr} = \Psi_{2o} \equiv \text{Const}. \quad (5)$$

В (4) и (5)  $\Psi_{1o}, \Psi_{2o}$  – направления трасс в нормальной земной системе;  $\Psi_{Tr}$  – угол схождения трасс;  $x_{1o}, z_{1o}, x_{2o}, z_{2o}$  – начальные положения судов в условный начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

### 3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть данная конфликтная ситуация и разрешающий маневр рассматривается на некотором достаточно большом интервале времени  $[t_0, T]$ . Главным условием построения маневра является выполнение требования

$$R_{\min} = R(T_{\min}) = \min_{t \in [t_0, T]} R(t) \geq R_s, \quad (6)$$

где  $R_s$  – расстояние безопасного эшелонирования;  $T_{\min}$  – момент наступления наихудшего сближения;  $R_{\min}$  – расстояние при наихудшем сближении.

Задача сводится к построению управления, удовлетворяющего условию

$$u^*(t) : \min_{u(t)} \{ \Delta B(u(t)) \text{ при } R_{\min} \geq R_s \}, \quad (7)$$

где управление маневрирующего судна ограничено  $|u(t)| \leq 1$  по (3),  $\Delta B(\cdot)$  – боковое отклонение судна от его трассы.

Решение задачи (7) усложняется при попытке учета указанных технических требований (раздел 2). При этом задача становится многокритериальной может оказаться некорректной, а ее решение – технически неприемлемым. Отсюда вытекает необходимость прямого учета указанных технических требований в постановке задачи.

Требование I формализуется условием, что начальное расстояние  $R(t_0)$  между судами с запасом превышает норму безопасности, расчетное время  $T_{\text{bm}}$  начала маневра увода должно быть не меньше некоторого предельного момента  $T_{\text{bm}}^*$ :

$$R(t_0) \gg R_s, \quad t_0 \leq T_{\text{bm}} \leq T_{\text{bm}}^*. \quad (8)$$

Заметим, что это простое с инженерной точки зрения условие приводит к серьезным трудностям при строгой математической формулировке задачи управления маневрирующим судном, так как момент  $T_{\text{bm}}$  начала маневра оказывается свободным параметром.

Требования II, III, IV и V прямо реализуются следующим образом.

1) По Технологии [7] маневрирование выполняется только одним судном.

2) Структура  $S$ -образного маневра увода фиксирована: отсутствуют прямолинейные отрезки; половину времени маневра управление имеет один знак, а на второй половине знак управления противоположен; минимальность длительности этого маневра обеспечивается тем, что управление принимает экстремальные допустимые значения. Например,

$$T_{\text{trm}} = T_{\text{bm}} + \tau^*, \quad u(t) = \begin{cases} +1, & T_{\text{bm}} \leq t < T_{\text{bm}} + \tau^*/2, \\ -1, & T_{\text{bm}} + \tau^*/2 \leq t < T_{\text{trm}}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $T_{\text{bm}}$  – момент начала маневра увода;  $T_{\text{trm}}$  – момент окончания маневра увода;  $\tau^*$  – длительность маневра.

**Замечание 3.1.** Отметим принципиально важный факт, который будет использоваться в дальнейшем. При заданной структуре маневра увода и управления (9) угол  $\psi$  направления движения (курс) маневрирующего судна в момент окончания маневра увода равен начальному курсу и совпадает с направлением трассы  $\Psi_{\text{Tr}}$  этого судна.

3) На временном интервале  $\tau_{\text{lt}}$  выдерживания после расхождения судов управление полагается нулевым, и судно движется прямолинейно с направлением  $\Psi_{\text{Tr}}$

$$T_{\text{lt}} = T_{\text{trm}} + \tau_{\text{lt}}, \quad u(t) \equiv 0, \quad T_{\text{trm}} \leq t \leq T_{\text{lt}}, \quad (10)$$

где  $T_{\text{lt}}$  – момент окончания интервала выдерживания.

4) Структура  $S$ -образного маневра возвращения фиксирована: отсутствуют прямолинейные отрезки; половину времени маневра управление имеет один знак, а на второй половине знак управления противоположен; его длительность  $\tau_{\text{rt}}^*$  равна длительности  $\tau^*$  маневра увода, а минимальность длительности этого маневра обеспечивается тем, что управление принимает экстремальные допустимые значения. Например,

$$T_{\text{rt}} = T_{\text{lt}} + \tau^*, \quad u(t) = \begin{cases} -1, & T_{\text{lt}} \leq t < T_{\text{lt}} + \tau^*/2, \\ +1, & T_{\text{lt}} + \tau^*/2 \leq t < T_{\text{rt}}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $T_{\text{rt}}$  – момент окончания маневра возвращения.

**Замечание 3.2.** Таким образом, заданные  $S$ -образные маневры не содержат прямолинейных отрезков между составляющими их дугами окружностей минимального радиуса разворота, обусловленными ограничением на максимальное боковое ускорение  $k$  воздушного судна и максимальную угловую скорость  $\omega_{max}$  разворота вектора скорости в системе (1). Этим прямо удовлетворяется Требование VII.

Требование VI минимальности необходимого бокового отклонения обеспечивается структурой заданного маневра, в котором: выполняется специальное условие равенства курса  $\psi$  в характерные моменты направлению  $\Psi_{Tr}$  трассы маневрирующего самолета

$$\psi(t_0) = \psi(T_{bm}) = \psi(T_{trm}) = \psi(T_{lt}) = \psi(T_{rt}) \equiv \Psi_{Tr}, \quad (12)$$

и тем, что по построению требуемое боковое отклонение достигается в момент окончания маневра увода.

Требование VIII минимальной продолжительности всего маневра, разрешающего конфликтную ситуацию (т.е., минимальность его суммарной длительности) также обеспечивается фиксированной структурой маневра и расчетным совпадением момента  $T_{trm}$  окончания маневра увода с моментом  $T_{min}$  наихудшего сближения судов.

**Замечание 3.3.** Отметим два важных факта. Во-первых, заданная структура разрешающего маневра и удовлетворение Требований V, VI и VII фиксируют угловую ориентацию (углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , рис. 2) линии визирования в момент наихудшего сближения, не ограничивая смещение линии визирования параллельно самой себе вдоль трассы неманеврирующего судна. Это существенно упрощает задачу поиска минимально необходимого бокового отклонения маневрирующего судна от его исходной трассы и позволяют вывести конструктивное условие существования маневра, разрешающего исследуемую конфликтную ситуацию. Во-вторых, удовлетворение Требований II–VIII очевидно приводит к сужению класса допустимых управлений и, как следствие, может приводить к сужению типов разрешаемых конфликтных ситуаций и возможному уменьшению величины обеспечиваемого безопасного эшелонирования.

Рассмотрим специальное терминальное множество  $\widetilde{M}$  позиций маневрирующего судна в моменты  $T = T_{trm}$  окончания возможных маневров увода с курсом  $\Psi_{Tr}$ , и при дальнейшем прямолинейном движении судна на этом курсе (т.е., при нулевом значении его управления), в момент  $T_{min}$  наихудшего сближения минимальное расстояние между судами гарантированно оказывается не меньше расстояния безопасного эшелонирования  $R_s$ . В трехмерном фазовом пространстве системы (1) терминальное множество  $M$  является плоскостью

$$\widetilde{M} = \{x(T_{trm}), z(T_{trm}), \psi(T_{trm}) \equiv \Psi_{Tr}\}, \quad (13)$$

параллельной плоскости  $x \times z$ .

В разработанном подходе для построения разрешающих маневров используется проекция  $M$  терминального множества  $\widetilde{M}$  на плоскость  $x \times z$ . Вид множества  $M$ , его границ  $L_s$ ,  $M$  и траектории разрешающих маневров увода на это множество рассматриваются в следующем разделе.

Маневры увода, удовлетворяющие условию по направлению  $\psi(T_{trm}) = \Psi_{Tr}$ , начинаются с оси трассы в разные моменты времени  $T_{bm}$ . Из всех допустимых маневров увода выбирается маневр, приводящий судно в специальную точку  $(x^*, z^*)$  терминального множества  $\widetilde{M}$  которая на минимальное расстояние отстоит от трассы маневрирующего судна. Этим по построению маневра обеспечиваются: условие (6) разрешения конфликтной ситуации, минимально необходимое боковое отклонение и минимальная длительность маневра увода.

Поскольку структура участка выдерживания и маневра возвращения гарантируют выполнение условия (6), то задача управления маневрирующим судном формулируется следующим образом:

**Задача 1.** Построить управление, которое выводит маневрирующее судно в точку  $(x^*, z^*) \in M$  проекции терминального множества (13).

## 4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 4.1. Прогноз наихудшего сближения

Следуя [1–6] прогноз ситуации в момент наихудшего сближения производим по системам (4) и (5). При этом полагается, что в начальный момент судно 1 находится на оси его трассы и имеет нулевой угол  $\psi_1 \equiv 0$  направления скорости  $V_1$ , и всё его дальнейшее движение происходит вдоль оси  $OX$ . О судне 2 также полагается, что его начальное положение находится на оси исходной трассы, и все его дальнейшее движение происходит вдоль оси этой трассы с постоянным углом  $\Psi_{Tr}$  (рис. 2). Для принятой модели равномерного и прямолинейного движения судов в прогнозе наихудшее сближение обнаруживается по равенству нулю первой производной расстояния между судами

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (x_{2o} + tV_2\text{Cos}\Psi_{Tr} - x_{1o} - V_1t)(V_2\text{Cos}\Psi_{Tr} - V_1) + \\ &\quad (z_{2o} + tV_2\text{Sin}\Psi_{Tr})V_2\text{Sin}\Psi_{Tr} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом вторая производная по времени расстояния между судами всегда положительна

$$d^2R/dt^2 = (V_2\text{Cos}\Psi_{Tr} - V_1)^2 + (V_2\text{Sin}\Psi_{Tr})^2 > 0. \quad (15)$$

Таким образом, по (14) находится момент глобального минимума расстояния между судами.

Параметры наихудшего сближения в прогнозе (рис. 2) рассчитываются по следующим формулам. Момент  $T_p$  наихудшего сближения

$$T_p = -[(x_{2o} - x_{1o})(V_2\text{Cos}\Psi_{Tr} - V_1) + z_{2o}V_2\text{Sin}\Psi_{Tr}] / [(V_2\text{Cos}\Psi_{Tr} - V_1)^2 + (V_2\text{Sin}\Psi_{Tr})^2]. \quad (16)$$

Расчетные положения судов в данный момент находятся

$$\begin{aligned} x_{1p} &= x_{1o} + V_1T_p, \quad z_{1p} \equiv 0, \\ x_{2p} &= x_{2o} + V_2T_p\text{Cos}\Psi_{Tr}, \quad z_{2p} = z_{2o} + V_2T_p\text{Sin}\Psi_{Tr}. \end{aligned} \quad (17)$$

Прогнозируемое минимальное расстояние  $R_p$

$$R_p = \sqrt{(x_{2p} - x_{1p})^2 + (z_{2p} - z_{1p})^2}. \quad (18)$$

Угол  $\varphi_1$  между направлением вектора скорости судна 1 и направлением линии визирования на судно 2 (от оси  $OX$  по часовой стрелке)

$$\varphi_1 = \begin{cases} \pi - \text{Arctg}(z_{2p}/(x_{1p} - x_{2p})), & \text{если } x_{1p} > x_{2p}, \quad z_{2p} > 0, \\ \pi - \text{Arctg}(z_{2p}/(x_{1p} - x_{2p})), & \text{если } x_{1p} > x_{2p}, \quad z_{2p} < 0, \\ \text{Arctg}(z_{2p}/(x_{2p} - x_{1p})), & \text{если } x_{1p} < x_{2p}, \quad z_{2p} > 0, \\ 2\pi + \text{Arctg}(z_{2p}/(x_{2p} - x_{1p})), & \text{если } x_{1p} < x_{2p}, \quad z_{2p} < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Угол  $\varphi_2$  между направлением вектора скорости судна 2 и направлением линии визирования на судно 1 (по часовой стрелке)

$$\varphi_2 = \begin{cases} \pi - (\Psi_{Tr} - \varphi_1), & \text{если } 0 < \Psi_{Tr} < \pi, \\ \pi + \Psi_{Tr} - \varphi_1, & \text{если } \pi < \Psi_{Tr} < 2\pi. \end{cases} \quad (20)$$



Через углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  условие (14) наихудшего сближения может быть записано в следующей полезной для анализа эквивалентной форме

$$V_1|\text{Cos}\varphi_1| = V_2|\text{Cos}\varphi_2|. \quad (21)$$

Точка схождения трасс имеет координаты

$$x_{\text{Tr}} = x_{20} - z_{20}/\text{tg}\Psi_{\text{Tr}}, \quad z_{\text{Tr}} \equiv 0. \quad (22)$$

**Замечание 4.1.** Соотношение (16) для расчета прогнозируемого момента наихудшего сближения надежно выделяет точку глобального минимума расстояния лишь для прямолинейных движений судов и при точно известных данных о их движениях. В случае наличия неопределенности в движении судов, неопределенности или неточности другой входной информации может потребоваться более тонкая пошаговая (по времени) процедура.

#### 4.2. Классификация типов ситуаций наихудшего сближения

Анализ показал, что формулы расчета параметров маневров, в разных конфликтных ситуациях и при разных картинах наихудших сближений, часто аналогичны друг другу или имеют одинаковые составляющие, или отдельные компоненты формул различаются знаками из-за разных углов схождения трасс, и разных направлений разворота маневрирующего судна, разных их относительных положений и направлений векторов скоростей и т.д.

Попытка построения единой группы расчетных формул (с внутренними логиками для учета особенностей каждого типа сближения) приводит к весьма сложной структуре алгоритмов. Поэтому с целью всестороннего изучения каждого типа ситуаций сближения был выбран следующий подход.

Для каждого типа сближения выписывается полный блок формул, учитывающих специфику этого типа сближения. Благодаря конкретности случая блок просто записывается, легко программируется и надежно отлаживается. Типы ситуаций сближения, схемы и расчет параметров соответствующих разрешающих маневров подробно исследованы в [1,2]

**Замечание 4.2.** Моделирование показало, что при численных расчетах для надежного выделения типов ситуаций наихудшего сближения в анализе логических условий целесообразно использовать количественные допуски на линейные величины (координаты, расстояния и т.д.), на угловые величины (курсовые углы, угол схождения трасс, углы ориентации линии визирования), на величины линейных и угловых скоростей.

#### 4.3. Расчет параметров S-маневра увода и условие существования разрешающего маневра

Необходимо проанализировать существование разрешающего маневра в следующих случаях.

**А.** Судно 1 назначается маневрирующим и выполняет маневр против часовой стрелки. (Здесь и в остальных вариантах другоу судно не маневрирует.)

**Б.** Судно 1 назначается маневрирующим и выполняет маневр по часовой стрелке.

**В.** Судно 2 назначается маневрирующим и выполняет маневр против часовой стрелки.

**Г.** Судно 2 назначается маневрирующим и выполняет маневр по часовой стрелке.

Рассмотрим порядок решения поставленной задачи и расчетные соотношения на следующем простом примере конфликтной ситуации (рис. 3), когда маневрирующим назначается судно 2, и разрешающий маневр выполняется им влево от исходной трассы.

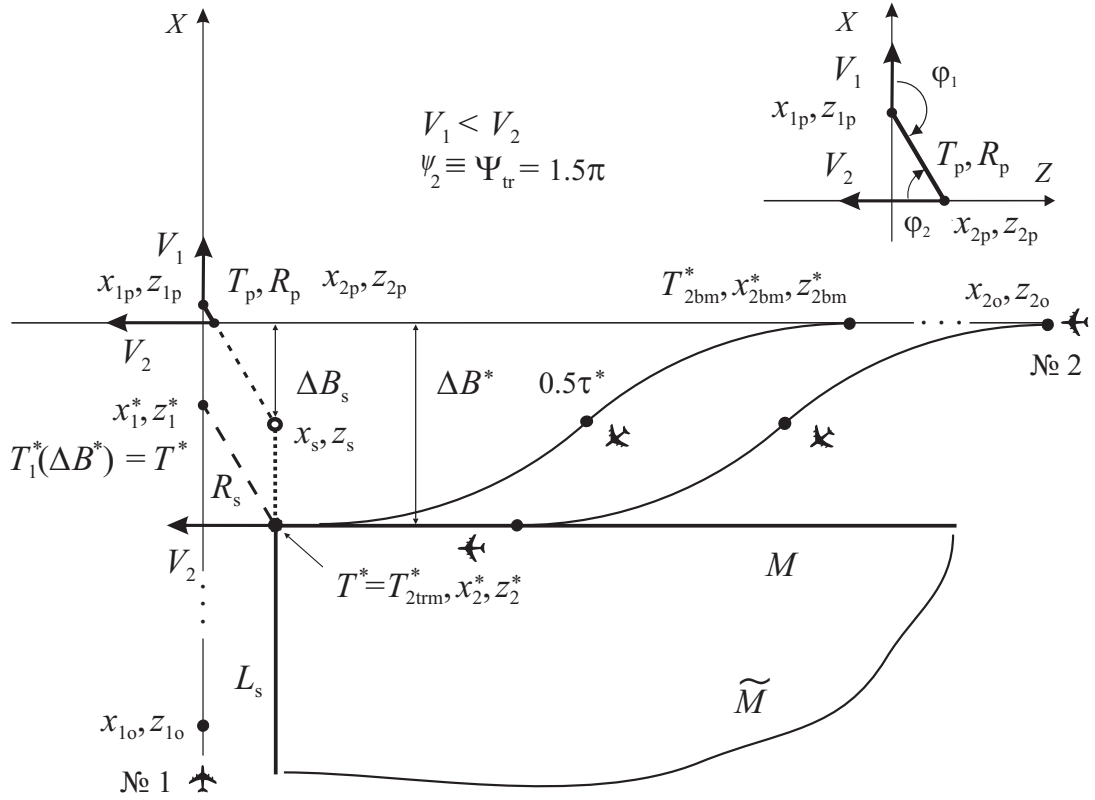


Рис. 3: Пример конфликтной ситуации и разрешающий маневр увода заданной структуры и минимальной длительности

**Пример 1.** Исходные численные данные:  $x_{1o} = -20830$  м,  $z_{1o} = 0$  м,  $V_1 = 100$  м/с,  $x_{2o} = 0$  м,  $z_{2o} = 32030$  м,  $V_2 = 152$  м/с,  $\Psi_{Tr} = 1.5\pi$  рад, максимальное боковое ускорение маневрирующего судна  $2k_2 = 3.04$  м/с<sup>2</sup>, максимальная угловая скорость изменения курса  $\omega_{\max} = 0.02$  рад/с, минимальный радиус разворота  $R_{1m} = 7600$  м; величина безопасного эшелонирования  $R_s = 3000$  м. Значение  $\Psi_{Tr} = 1.5\pi$  взято для наглядности изложения.

Результаты прогноза (рис. 3, увеличенный фрагмент):  $T_p = 209.9$  с,  $R_p = 202.4$  м,  $x_{1p} = 169.1$  м,  $z_{1p} = 0$  м,  $x_{2p} = 0$  м,  $z_{2p} = 111.2$  м, вспомогательные углы  $\varphi_1 = 2.55$  рад,  $\varphi_2 = 0.98$  рад. Таким образом, по результатам прогноза в момент  $T_p$  наихудшего сближения судно 2 находится сзади-справа от судна 1.

Данная конфликтная ситуация выделяется по следующим условиям (в соответствии с Замечанием 4.2 для надежного выделения ситуации условия содержат соответствующий допуск на линейные величины  $\Delta_d = 100$  м):

$$x_{1p} > x_{2p} + \Delta_d, \quad z_{2p} > \Delta_d, \quad \pi < \Psi_{Tr} < 2\pi. \quad (23)$$

Позиции судов в начальный момент  $t_0$  отмечены точками  $(x_{1o}, z_{1o})$  и  $(x_{2o}, z_{2o})$ . Векторы скоростей судов обозначены жирными стрелками,  $V_1 < V_2$ .

Поскольку минимальное расстояние  $R_p$  (жирная линия) между судами оказывается меньше величины безопасного  $R_s$ , то разрешающий маневр необходим. Для маневра назначено судно 2, находящееся в задней полусфере неманеврирующего судна 1.

На продолжении линии визирования от судна 1 за судно 2 (это продолжение отмечено жирными короткими штрихами) отложим вспомогательную точку  $(x_s, z_s)$  так, что длина линии  $(x_{1p}, z_{1p}) - (x_s, z_s)$  равна заданной величине безопасного эшелонирования  $R_s$ . При заданной величине  $R_s = 3000$  м координаты вспомогательной точки  $(x_s = -2337.1$  м,  $z_s) = 1648.8$  м.

Через точку  $(x_s, z_s)$  проведем линию  $L_s$ , параллельную оси трассы неманеврирующего судна 1, в данном случае – параллельно оси  $OX$ . Между осью трассы судна 1 и линией  $L_s$  нанесем наклонную линию (жирные штрихи), параллельную линии визирования  $(x_{1p}, z_{1p}) - (x_{2p}, z_{2p})$ . На левом конце этой наклонной линии черным кружком отмечено особое положение  $(x_1^*, z_1^*)$  судна 1 для такого момента времени  $T_2^*$ , когда судно 2 с курсом  $\Psi_{Tr}$  находится точно на правом конце  $(x_2^*, z_2^*)$  этой линии. Если такой момент существует, то при этом выполняется условие разрешения конфликтной ситуации, так как расстояние между указанными точками по построению будет равно  $R_s$ . Кроме того, в силу соотношений (14) и (21) это расстояние будет являться минимальным между судами в этот момент  $T_2^*$ , поскольку по заданной структуре маневра увода судно 2 приводится на линию  $L_s$  с направлением  $\Psi_{Tr}$  скорости  $V_2$ .

Заметим, что при отработке маневром увода заданной структуры некоторого бокового отклонения однозначно определены его длительность, момент и точка его начала на оси исходной трассы.

При этом оказывается, что если для отработки задана некоторая произвольная величина бокового отклонения, то выход судна на линию  $L_s$  может заканчиваться в момент, несовпадающий с требуемым моментом. Например, пусть выполнен маневр, выводящий судно 2 в точку  $(x_s, z_s)$ . При показанном угле схождения трасс  $\Psi_{Tr} = 1.5\pi$  соответствующее боковое отклонение  $\Delta B_s$  (рис. 3) судна 2 от его исходной трассы составляет

$$\Delta B_s = (R_s - R_p)\text{Sin}\varphi_2, \quad (24)$$

а координаты этой точки в рассматриваемом случае  $\Psi_{Tr} = 1.5\pi$  рассчитываются

$$x_s = x_{2p} - \Delta B_s, \quad z_s = z_{2p} + (R_s - R_p)\text{Cos}\varphi_2. \quad (25)$$

Прямая проверка показывает, что судно 2 выходит в точку  $(x_s, z_s)$  с опережением времени выхода судна 1 на левый конец  $(x_{1p}, z_{1p})$  линии визирования  $(x_s, z_s) - (x_{1p}, z_{1p})$

$$T_{2\text{trm}}(x_s, z_s) < T_1(x_{1p}, z_{1p}) = T_p. \quad (26)$$

При дальнейшем движении судна 2 такое опережение приводит к минимальному расстоянию между судами менее требуемой безопасной величины  $R_s$ .

Если точка выхода  $(x_{2\text{trm}}, z_{2\text{trm}} \equiv z_s)$  судна 2 на линию  $L_s$  выбирается все ниже и ниже точки  $(x_s, z_s)$ , то отмеченный эффект опережения все еще сохраняется. Но при увеличении отклонения  $\Delta B$  бокового отклонения растет время  $\tau$  маневра, уменьшается момент времени начала маневра и уменьшается величина опережения по времени выхода. Эта часть линии  $L_s$  на рис. 3 отмечена вертикальным жирным пунктиром. Для разных величин  $\Delta B$  значения времени (завершения маневра увода)  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  выхода судна 2 в точку  $x_{2\text{trm}}, z_{2\text{trm}}$  на линии  $L_s$  и времени  $T_1(\Delta B)$  положения судна 1, показаны в Таблице 1 для числовых данных конфликтной ситуации Примера 1. На рис. 4 приведены графики зависимостей времени  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  (кружки, сплошная кривая) и времени  $T_1(\Delta B)$  (крестики, пунктирная прямая).

Таблица 1. Решение уравнения баланса времени,  $R_s = 3000$  м.

$\Delta B$ , м	2500	2600	2700	2800	2900	3000
$T_{2\text{trm}}(\Delta B)$ , с	202.8	203.1	203.4	203.7	203.9	204.3
$T_1(\Delta B)$ , с	208.2	207.2	206.2	205.2	204.2	203.2

$$T^* = 204.0, \text{ с}; \quad \Delta B^* = 2936.0, \text{ м}$$

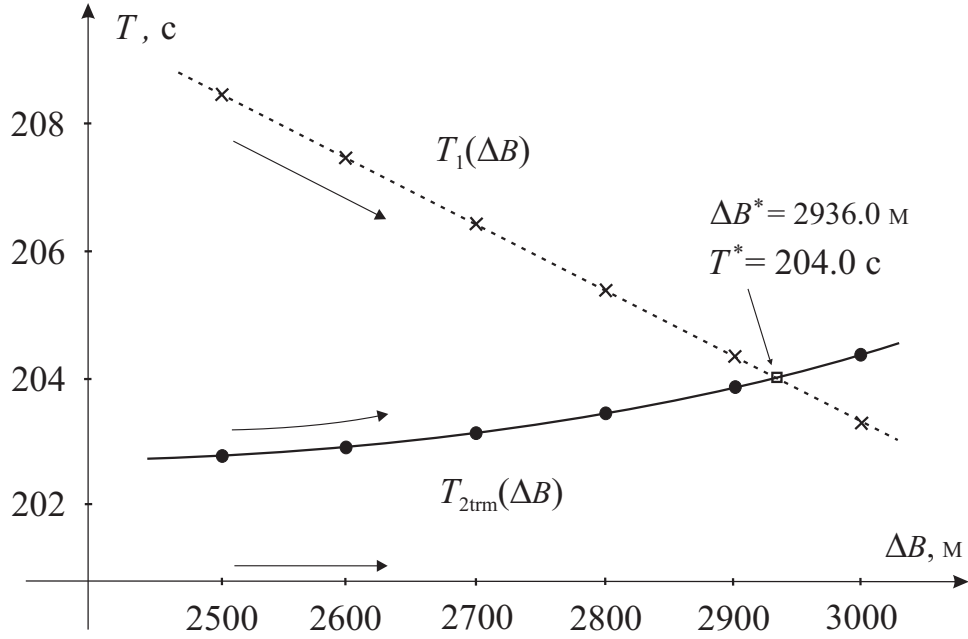


Рис. 4: Графики момента  $T_1(\Delta B)$  выхода судна 1 (пунктир) и момента  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  окончания маневра судна 2 (сплошная линия)

Вспомогательные переменные

$$\begin{aligned}
 x_{\text{Tr}} &= x_{2o} - z_{2o}/\text{tg}\Psi_{\text{Tr}}, \quad z_{\text{Tr}} = 0, \\
 x_s &= x_{1p} + R_s \text{Cos}\varphi_1, \quad z_s = R_s \text{Sin}\varphi_1, \\
 \Delta\tilde{x} &= (x_{1p} - x_{\text{Tr}})(R_s - R_p)/R_p, \\
 \tilde{x}_2 &= x_s + \Delta\tilde{x}, \quad \tilde{z}_2 = z_s.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь  $(x_{\text{Tr}}, z_{\text{Tr}})$  – точка пересечения трасс;  $(x_s, z_s)$  – вспомогательная точка;  $\Delta\tilde{x}, \tilde{x}_2, \tilde{z}_2$  – вспомогательные величины.

Момент  $T_1(\Delta B)$  прихода судна 1 на левый конец соответствующей линии визирования определяется

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \Delta B / \text{Cos}(3\pi/2 - \Psi_{\text{Tr}}), \quad x_2(\Delta B) = \tilde{x}_2 - \Delta x, \\
 T_1(\Delta B) &= T_p - (x_s - x_2(\Delta B))/V_1.
 \end{aligned} \tag{28}$$

По входной величине  $\Delta B$  маневра заданной структуры его длительность  $\tau$ , момент  $T_{2\text{bm}}(\Delta B)$  начала, координаты  $(x_{2\text{bm}}, z_{2\text{bm}})$  точки его начала на исходной трассе и момент окончания  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  рассчитываются по соотношениям

$$\begin{aligned}
 \text{Cos}\psi_m &= 1 - \Delta B / (2R_{2m}), \quad \text{Sin}\psi_m = \sqrt{1 - (\text{Cos}\psi_m)^2}, \\
 \psi_m &= \text{Arctg}(\text{Sin}\psi_m / \text{Cos}\psi_m), \quad \tau = 2\psi_m / \omega_{2\text{max}}, \\
 \Delta L_{2m} &= 2R_{2m} \text{Sin}\psi_m, \\
 \tilde{z}_2 &= z_s - \Delta B \text{Sin}(3\pi/2 - \Psi_{\text{Tr}}), \\
 z_{2\text{bm}} &= \tilde{z}_2 + \Delta L_{2m} \text{Cos}(3\pi/2 - \Psi_{\text{Tr}}), \\
 T_{2\text{bm}} &= (z_{2o} - z_{2\text{bm}}) / (V_2 |\text{Sin}\Psi_{\text{Tr}}|), \\
 T_{2\text{trm}}(\Delta B) &= T_{2\text{bm}} + \tau,
 \end{aligned} \tag{29}$$

где  $R_{2m} = V_2 / \omega_{2\text{max}}$  – минимальный радиус разворота маневрирующего судна 2; причем для сохранения заданной структуры  $S$ -маневра величина бокового отклонения ограничена условием  $\Delta B \leq 2R_{2m}$ , а вариация курса маневрирующего судна ограничена условием  $|\psi_2 - \Psi_{\text{Tr}}| \leq \pi/2$ ;  $\tilde{z}_2$  – вспомогательная переменная;  $(x_{2\text{bm}} \equiv 0, z_{2\text{bm}})$  – точка начала маневра судна 2 (рис. 3).

В силу линейного убывания величины  $T_1(\Delta B)$  и монотонного роста величины  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  (рис. 4) обязательно находятся упомянутые выше (рис. 3) точка  $(x_1^*, z_1^*)$  и точка  $(x_2^*, z_2^*)$ , на которых впервые выполнится баланс времен

$$T_{2\text{trm}}(\Delta B) = T_1(\Delta B) = T^* = T_{\min}. \quad (30)$$

На рис. 4 это – точка пересечения двух зависимостей; минимальное по величине боковое отклонение, необходимое для разрешения данной конфликтной ситуации, отмечено как  $\Delta B^*$ , отмечен также момент  $T^* = T_{2\text{trm}}^*(\Delta B^*)$  окончания разрешающего маневра.

Параметры построенного разрешающего маневра, оптимального по минимальной длительности (при заданной его структуре):  $\Delta B^* = 2936.0$  м,  $T^* = T_{2\text{trm}}^*(\Delta B^*) = T_1(\Delta B^*) = T_{\min} = 204.0$  с,  $x_1^* = -429.8$  м,  $z_{1p} = 0$  м,  $x_2^* = -2936.0$  м,  $z_{2p} = 1648.8$  м, длительность маневра увода  $\tau^* = 63.2$  с, максимальная вариация курса судна 2 равна  $0.632$  рад ( $36.2$  градуса), момент начала маневра  $T_{2\text{bm}}^* = 140.8$  с, координаты судна 2 в этот момент  $x_{2\text{bm}}^* = 0$  м,  $z_{2\text{bm}}^* = 10628.3$  м.

При увеличении бокового отклонения  $\Delta B$ , реализуемого судном 2, происходит запаздывание (Таблица 1 и рис.4) выхода судна 2 на линию  $L_s$ . Это означает, что фактический момент наихудшего сближения наступает во внутренней точке множества  $\widetilde{M}$  и раньше момента  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  выхода судна 2 на линию  $L_s$ , т.е., фактически расстояние  $R_{\min}$  при наихудшем сближении будет *гарантированно больше* заданной величины безопасного эшелонирования  $R_s$ .

Заметим, что соответствующие боковые отклонения маневрирующего судна от трассы в этом случае будут превышать минимально необходимую величину  $\Delta B^*$ .

Таким образом, в рассмотренной конфликтной ситуации вспомогательная линия

$$L_s = \{x_2 \leq x_2^*, z_2 \equiv z_2^*\} \quad (31)$$

может использоваться в качестве левой границы множества  $\widetilde{M}$  (рис. 3). В силу построения эта линия является совокупностью позиций и моментов времени с гарантированным выполнением безопасного эшелонирования.

Для условий движения Примера 1 (рис. 3) с учетом графиков рис. 4 уравнение баланса моментов  $T_1(\Delta B^*)$  и  $T_{2\text{trm}}(\Delta B^*)$  имеет вид

$$T_p + |x_s|/V_1 - \Delta B/V_1 = (2R_{2m} \text{ArcCos}(1 - \Delta B/(2R_{2m}))) / V_2 + (z_{2o} - z_s) / V_2 - (2R_{2m} \sqrt{1 - (1 - \Delta B/(2R_{2m}))^2}) / V_2, \quad \Delta B \leq 2R_{2m}, \quad (32)$$

где  $R_{2m} = V_2/\omega_{2\text{max}}$  – минимальный радиус разворота маневрирующего судна 2.

Хотя это уравнение является трансцендентным, оно быстро решается за малое число шагов с нужной точностью, например, методом половинного деления или методом расчета нулевой точки. В результате находится минимально необходимая величина  $\Delta B^*$  бокового отклонения маневрирующего судна от его исходной трассы. Остальные параметры маневра в системе координат, центрированной направлением и трассой неманеврирующего судна 1 рассчитываются:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\psi_m^* &= 1 - \Delta B^*/(2R_{2m}), \quad \text{Sin}\psi_m^* = \sqrt{1 - (\text{Cos}\psi_m^*)^2}, \\ \psi_m^* &= \text{Arctg}(\text{Sin}\psi_m^*/\text{Cos}\psi_m^*), \quad \tau^* = 2\psi_m^*/\omega_{2\text{max}}, \\ \Delta L_m^* &= 2R_{2m} \text{Sin}\psi_m^*, \quad T_{\text{bm}}^* = T^* - \tau^*, \\ x_{2\text{bm}}^* &= x_{2o} + V_2 T_{\text{bm}}^* \text{Cos}\Psi_{\text{Tr}}, \quad z_{2\text{bm}}^* = z_{2o} + V_2 T_{\text{bm}}^* \text{Sin}\Psi_{\text{Tr}}, \\ x_2^* &= -\Delta B^*, \quad z_2^* = z_{2s}, \\ x_1^* &= x_{1o} + V_1 T^*, \quad z_1^* = 0, \\ x_{1\text{bm}}^* &= x_{1o} + V_1 T_{\text{bm}}^*, \quad z_{1\text{bm}}^* = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

**Замечание 4.3.** Отметим интересный факт: при дальнейшем увеличении обрабатываемого бокового отклонения  $\Delta B > \Delta B^*$  зависимость  $T_{2\text{trm}}(\Delta B)$  сходится к линейной

и ее скорость роста приближается (с обратным знаком) к скорости изменения величины  $T_1(\Delta B)$ .

**Замечание 4.4.** Рассматриваемые построения имеют смысл при выполнении условия (8), то есть при достаточном запасе начального расстояния и времени на начало применяемого  $S$ -образного маневра. Если при вариации точки выхода  $(x_{2\text{trm}}, z_{2\text{trm}} \equiv z_s)$  вниз по линии  $L_s$  от точки  $(x_s, z_s)$  выполнение равенства (30) не достигается, это означает, что данная конфликтная ситуация обнаружена слишком поздно и стандартным  $S$ -образным маневром она не разрешается. Ее разрешение возможно односторонним маневром увода на экстремальном управлении (аналогично тому, как это делается, например, в [9]).

**Замечание 4.5.** Формулы определения величин  $\Delta B^*$ ,  $T^*$  и расчета параметров  $S$ -маневра увода имеют смысл до некоторой разумной величины вариации угла  $\psi_{2\text{max}}$  направления движения маневрирующего судна, набираемого к точке переключения маневра. Например, рис. 5, при  $\psi_{2\text{max}} = \pi$  в момент переключения маневра увода, судно 2 разворачивается на направление, противоположное направлению движения неманеврирующего судна 1. При этом если нужное равенство (30) моментов еще не достигнуто, то маневр можно дополнить прямолинейным отрезком движения маневрирующего судна параллельно линии  $L_s$ . Однако это равносильно изменению структуры стандартного маневра увода и приводит к изменению формул расчета времени маневра  $\tau^*$ , точки  $(x_1^*, z_1^*)$ , точки  $(x_2^*, z_2^*)$  и момента  $T^*$ . Данный вопрос выходит за рамки настоящего исследования.

Построим теперь верхнюю границу  $M$  множества  $\widetilde{M}$ . Из точек  $(x_2, z_2)$ , лежащих правее точки  $(x_{2\text{bm}}^*, z_{2\text{bm}}^*)$  на трассе судна 2 (рис. 3, рис. 5 и 6) для моментов времени  $T_{\text{bm}} < T_{\text{bm}}^*$ , будем выпускать маневр с параметрами  $\Delta B^*$  и  $\tau^*$ . Точки окончания этих маневров в моменты  $T_{2\text{trm}}(x_2, z_2)$  в силу условия

$$\psi_2(T_{2\text{trm}}) \equiv \Psi_{\text{Tr}}$$

образуют линию  $M$ , исходящую из точки  $(x_2^*, z_2^*)$  вправо. Данная линия обладает следующими важными свойствами:

- все дальнейшие прямолинейные движения судна 2 по этой линии заканчиваются в точке  $(x_2^*, z_2^*)$ ;
- моменты выхода судна 2 в точку  $(x_2^*, z_2^*)$  всегда равны  $T^*$  (рис. 3, рис. 5 и 6) и по построению всегда совпадают с моментом  $T_{\text{min}}$  наихудшего сближения судов;
- минимальное расстояние между судами по построению совпадает с заданной величиной эшелонирования  $R_s$ .

Линия  $M$  ограничивает множество  $\widetilde{M}$  сверху. При разной величине бокового отклонения  $\Delta B$  вид маневра увода показан на рис. 5 и рис. 6. Здесь на трассе судна 2 отмечена позиция  $(x_2^{**}, z_2^{**})$  и момент  $T_{2\text{bm}}^{**}$  начала маневра, реализующего боковое отклонение  $\Delta B^{**}$ , равное двум минимальным радиусам  $R_{2\text{m}}$  разворота маневрирующего судна 2. Соответствующая траектория (тонкая кривая) является предельной с сохранением структуры  $S$ -маневра. На этой траектории достигается наибольшее изменение угла  $\psi_2$  направления движения маневрирующего судна 2.

Видно (рис. 5 и рис. 6), что маневр заданной структуры по своим возможностям обеспечивает отработку бокового отклонения судна от трассы не более величины  $\Delta B \leq \Delta B^{**} = 2$  (см. Замечание 3.3). Технический анализ [1,2] показывает, что величина  $\Delta B^{**}$  реально может достигать несколько километров, что оказывается достаточным для разрешения практически всех типов конфликтных ситуаций.

Прямая проверка показывает, что любой  $S$ -образный маневр указанной структуры с длительностью  $\tau^* \leq \tau \leq \tau^{**}$ , начинающийся из точек  $(x_2, z_2)$ , лежащих правее точки

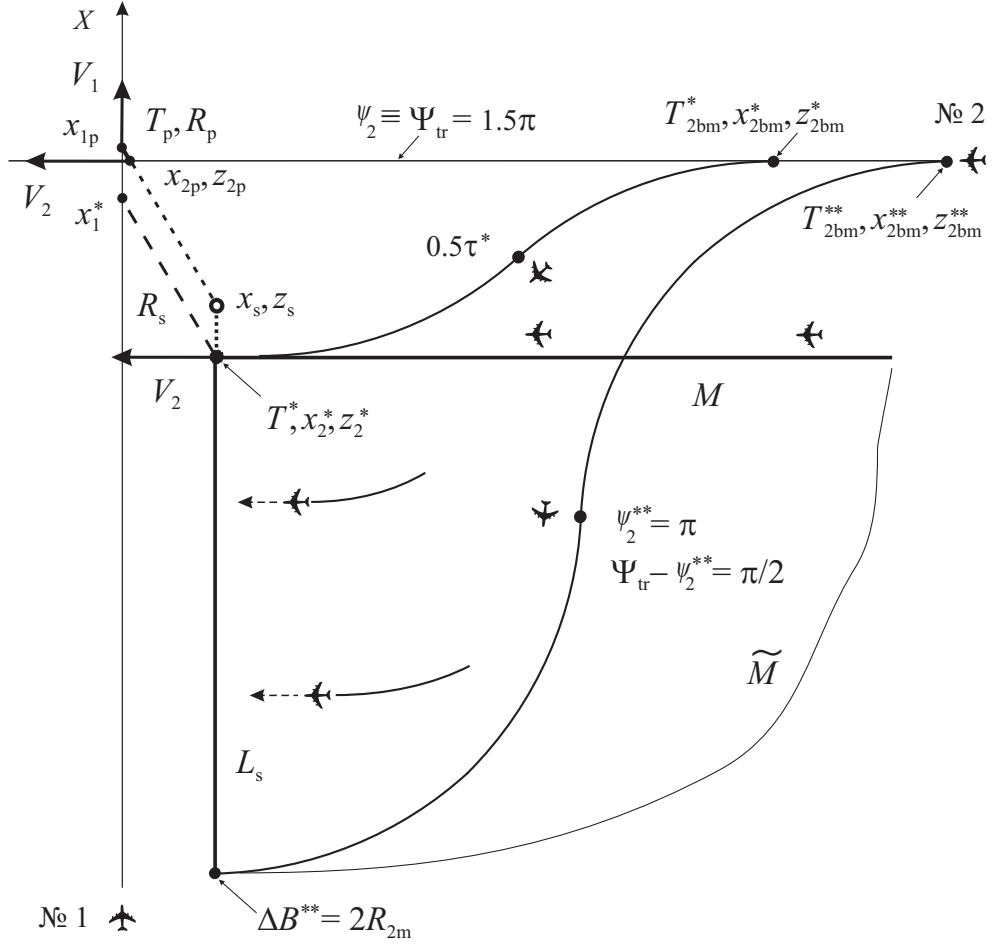


Рис. 5: Ближние границы проекции терминального множества

$(x_2^{**}, z_2^{**})$  на оси трассы судна 2 для моментов времени  $T_{\text{bm}} < T_{\text{bm}}^{**}$ , всегда заканчивается внутри множества  $\tilde{M}$ . Это, при дальнейшем прямолинейном движении судна 2 гарантированно обеспечивает выдерживание безопасного расстояния  $R_s$  при его выходе на границу  $L_s$  данного терминального множества.

Таким образом, предельная точка  $(x_2^*, z_2^*)$  и соответствующий маневр увода по построению удовлетворяют всем технологическим требованиям, сформулированным в разделе 2.

Отметим полезное для практики свойство маневра судна 2 в предельную точку. При маневре судна 2 навстречу неманеврирующему судну 1 разрешение конфликтной ситуации наступает раньше момента  $T_p$  наихудшего сближения в прогнозе, так как имеет место соотношение  $T^* < T_p$ .

Теперь формируется структура *оптимального разрешающего маневра увода*: судно 2 с исходным направлением  $\Psi_{\text{Tr}}$  скорости  $V_2$  движения с помощью стандартного  $S$ -образного маневра минимальной длительности  $\tau^*$ , начинающегося в самый поздний момент  $T_{2\text{bm}}^*$  из особой точки  $(x_{2\text{bm}}^*, z_{2\text{bm}}^*)$  на оси его трассы, приводится в предельную точку  $(x_2^*, z_2^*)$  множества  $\tilde{M}$  с направлением  $\Psi_{\text{Tr}}$  и в момент времени  $T^* = T_{2\text{trm}}^* = T_1(x_1^*, z_1^*)$ , при котором судно 1 находится на другом конце линии визирования в точке  $(x_1^*, z_1^*)$ . Момент  $T_{2\text{bm}}^*$  начала маневра на минимальное время  $\tau^*$  отстоит от момента  $T^*$ .

Рис. 6 представляет полный вид проекции терминального множества  $\tilde{M}$  на плоскость  $x \times z$ . На оси трассы судна 2 между позициями в момент  $T_{2\text{bm}}^*$  и момент  $T_{2\text{bm}}^{**}$  отмечены особые позиции начала маневра увода, в которых допустимая длительность  $\tau^* \leq \tilde{\tau}(\Delta B) \leq \tau^{**}$  маневра зависит от обрабатываемого бокового отклонения выхода судна 2 на линию  $L_s$ .

Правая граница  $L_0$  (кривая отмечена жирной линией) множества  $\tilde{M}$  образована точ-

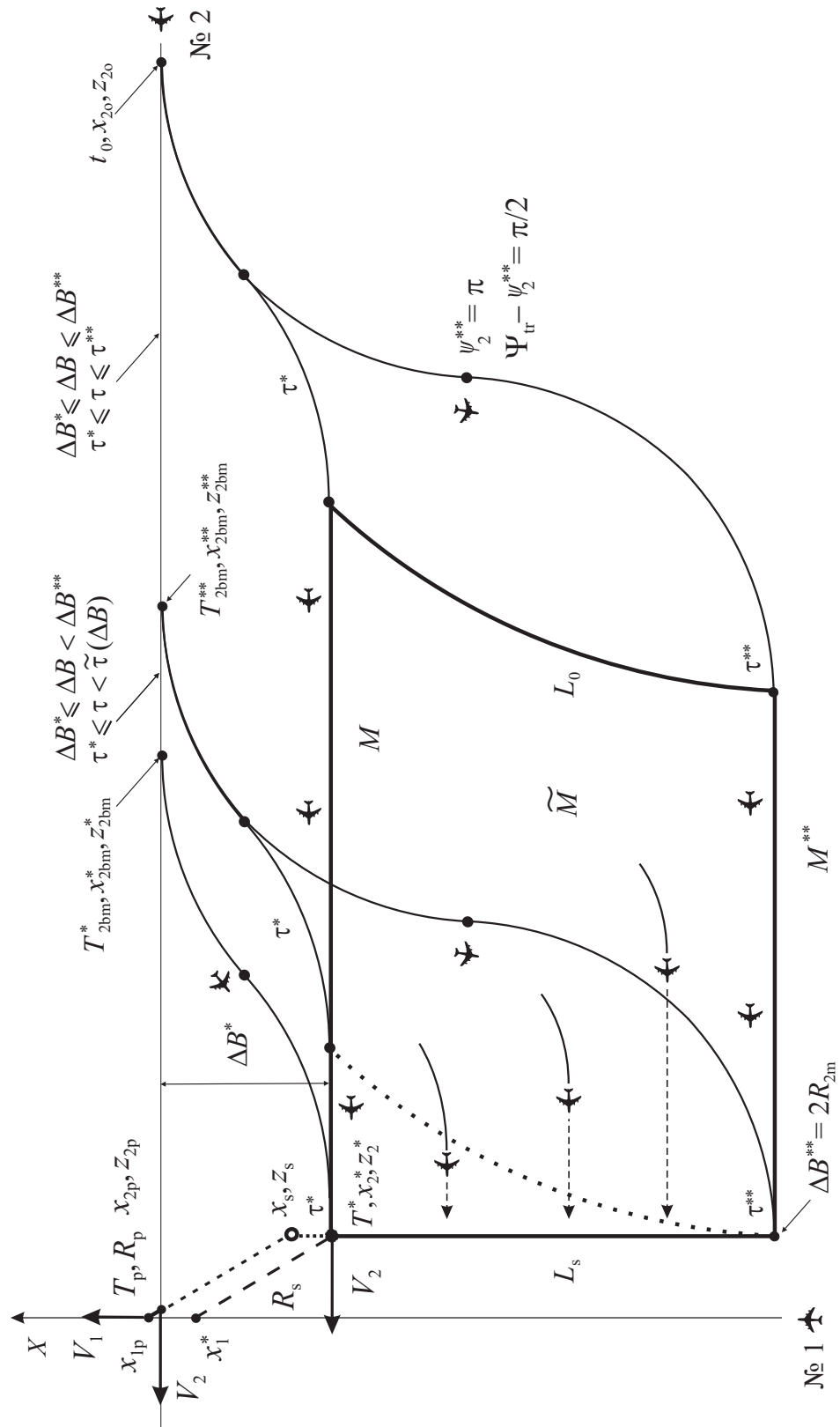


Рис. 6: Общий вид проекции  $\widetilde{M}$  терминального множества на плоскости  $x, z$

ками окончания  $S$ -маневра из начальной точки  $t_0, (x_{20}, z_{20})$  при разной величине реализуемого бокового отклонения  $\Delta B$ . Подобная кривая (пунктирная линия около левой границы  $L_s$ ) может быть реализована впервые из начальной точки  $T_{2bm}^{**}, (x_{2bm}^{**}, z_{2bm}^{**})$ . Нижняя граница  $M^{**}$  составляется из точек окончания маневров с оси трассы судна 2 при максимальном реализуемом значении бокового отклонения  $\Delta B^{**}$  и отрезков последующего



прямолинейного движения судна 2 до линии  $L_s$ .

Рис. 5 и рис. 6 позволяют заключить, что действительно, по построению, для всех точек множества  $\widetilde{M}$  при  $\psi_{2\text{trim}} \equiv \Psi_{\text{Tr}}$  минимальное расстояние в момент наихудшего сближения гарантированно будет не менее  $R_s$ . Это облегчает нагрузку на диспетчера: конфликтная ситуация заведомо разрешается, если диспетчер выводит маневрирующее судно в любую внутреннюю точку множества  $\widetilde{M}$ . Если необходимо “не слишком далеко” отводить маневрирующее судно от его трассы, то достаточно реализовать вывод судна в “угол” множества  $\widetilde{M}$ , т.е., в район предельной точки  $(x^*, z^*)$ .

**Пример 2.** Для иллюстрации свойств разработанного подхода рассмотрим содержательный пример конфликтной ситуации, в которой анализ условия разрешимости позволяет прямо указать все допустимые маневры конфликтующих судов. Выбраны следующие численные данные:  $x_{1o} = -20002$  м,  $z_{1o} = 0$  м,  $x_{2o} = 0$  м,  $z_{2o} = 19998$  м,  $V_1 = V_2 = 100$  м/с,  $\Psi_{\text{Tr}} = 1.5\pi$  рад, суда одноптипы, при этом максимальное боковое ускорение  $k = 4.87$  м/с<sup>2</sup>, максимальная угловая скорость изменения курса  $\omega_{\text{max}} = 0.0487$  рад/с, минимальный радиус разворота  $R_{1\text{m}} = 2050$  м; величина безопасного эшелонирования задана  $R_s = 1000$  м.

Результаты прогноза:  $T_p = 220.2$  с,  $R_p = 2.8$  м,  $x_{1p} = -2$  м,  $z_{1p} = 0$  м,  $x_{2p} = 0$  м,  $z_{2p} = 2$  м,  $\varphi_1 = 3\pi/4$  рад,  $\varphi_2 = \pi/4$  рад. Видно, что при этих исходных данных происходит фактическое столкновение и маневр необходим, так как  $R_p < R_s$ .

Пусть теперь маневрирующим назначено судно 1, а судно 2 не маневрирует. Рассмотрим случай, когда разрешающий маневр реализуется судном 1, а судно 2 полагается неманеврирующим. Вспомогательная точка  $(x_s, z_s)$  имеет координаты  $x_s = -353$  м,  $z_s = -351$  м, соответствующее боковое отклонение  $\Delta B_s = 353$  м.

Поскольку в данном примере судно 1 имеет запасы (8) по расстоянию и времени для разрешающего маневра, то условие разрешимости (условие существования этого маневра) для разрешающего маневра судна вправо-навстречу судну 2 выполняется (рис. 7).

Рассмотрим случай, когда разрешающий маневр реализуется судном 1, а судно 2 полагается неманеврирующим. Здесь показаны: траектории маневра (сплошные тонкие кривые), в предельную угловую точку  $(x_1^*, z_1^*)$  и в правую предельную точку  $(x_1^{**}, z_1^{**})$  терминального множества  $\widetilde{M}$ , его границы  $M$  и  $L_s$  и возможные положения линии визирования при разной длительности разрешающих маневров. Напомним, величина безопасного эшелонирования задана  $R_s = 1000$  м, а минимальный радиус разворота судна 1  $R_{1\text{m}} = 2050$  м.

При таком маневре судно 1 вправо разрешает конфликтную ситуацию заходом в заднюю полусферу неманеврирующего судна 2. Полезно проанализировать связь величины безопасного эшелонирования  $R_s$  и отрабатываемого бокового отклонения  $\Delta B^*$ , минимально необходимого для разрешения этой конфликтной ситуации. В Таблице 2 показаны положения предельной точки  $(x_1^*(R_s), z_1^*(R_s))$  разрешающего  $S$ -маневра при разной величине  $R_s$  безопасного эшелонирования. В этом маневре решение уравнения баланса (30) и (32) времен существует вплоть до величины  $R_s^{**}$ , при которой требуется максимально большее боковое отклонение  $\Delta B^{**} = 2R_{1\text{m}}$ . Отметим, что при сохранении заданной структуры маневра увода максимальное боковое отклонение судна 1 равно  $\Delta B^{**} = 4100$  м, что при заданной структуре разрешающего маневра позволяет обеспечивать максимальную величину безопасного эшелонирования  $R_s^{**} = 4552$  м.

**Замечание 4.6.** Разработанный тип разрешающего маневра, выводящего маневрирующее судно на указанное специальное терминальное множество  $\widetilde{M}$ , или на его проекцию  $\widetilde{M}$ , или в его предельную точку  $(x_2^*, z_2^*)$  в момент  $T^*$  представляется новым. Обычно при построении разрешающего маневра при обеспечении безопасного эшелонирования, исследователи допускают варьирование большого числа параметров наихудшего сближения: момент, координаты судов, ориентацию линии визирования и т.д. Как результат, это приводит к большому числу свободных переменных, усложнению формулировки задачи

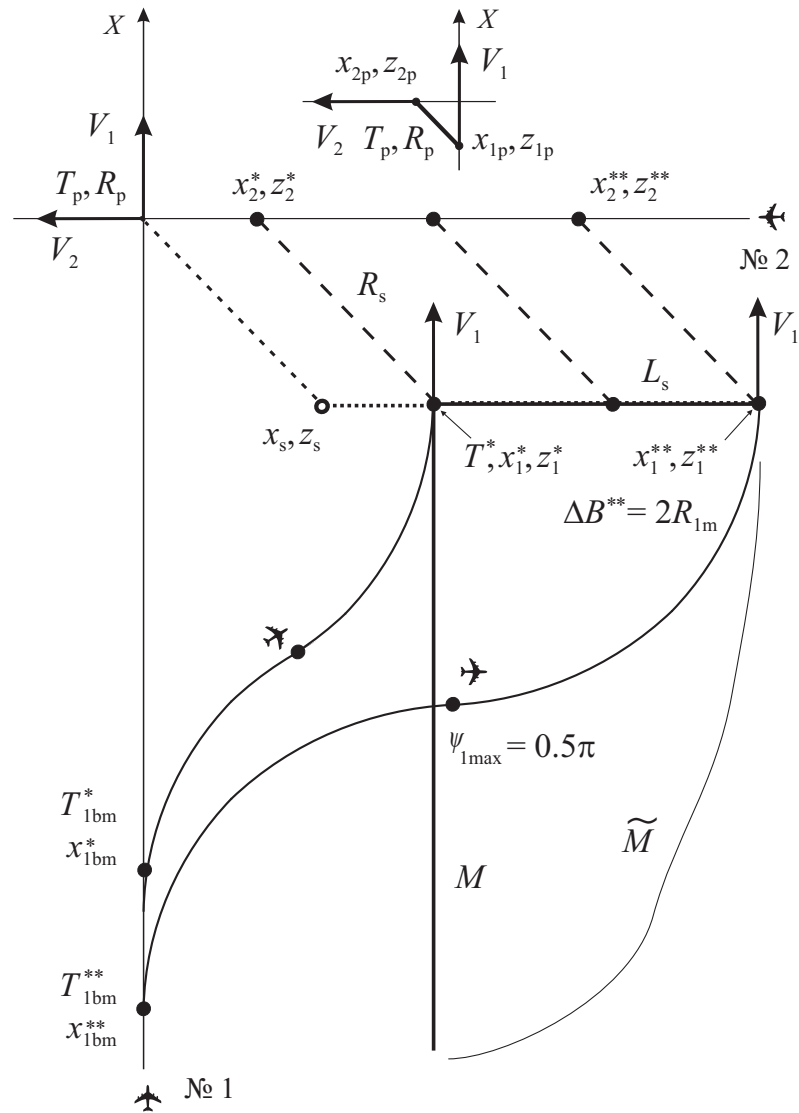


Рис. 7: Разрешающий маневр судна 1 вправо – навстречу судну 2; суда однотипны и  $V_1 = V_2$

оптимального управления и построения разрешающего маневра. Например, именно поэтому в работах [10 – 12] с целью строгой постановки задачи разрешения конфликтной ситуации и получения ее строгого математического решения, авторы допускают изменение структуры воздушного пространства в зоне пересечения трасс и фиксируют схемы движения конфликтующих воздушных судов. Подобным же образом, подходы, основанные на простых инженерных соображениях [3 – 6] могут приводить к сложным

Таблица 2. Связь величины безопасного эшелонирования  $R_s$  и обрабатываемого минимального бокового отклонения  $\Delta B^*$

$R_s, \text{ м}$	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4250	4552
$\Delta B^* = z_1^*, \text{ м}$	596	1123	1612	2071	2567	2925	3320	3700	3884	4100
$x_1^*, \text{ м}$	-353	-707	-1060	-1414	-1767	-2121	-2474	-2828	-3005	-3219

$$\Delta B^{**} = 2R_{1m} = 4100 \text{ м}; \quad \max: R_s^{**} = 4552 \text{ м}$$

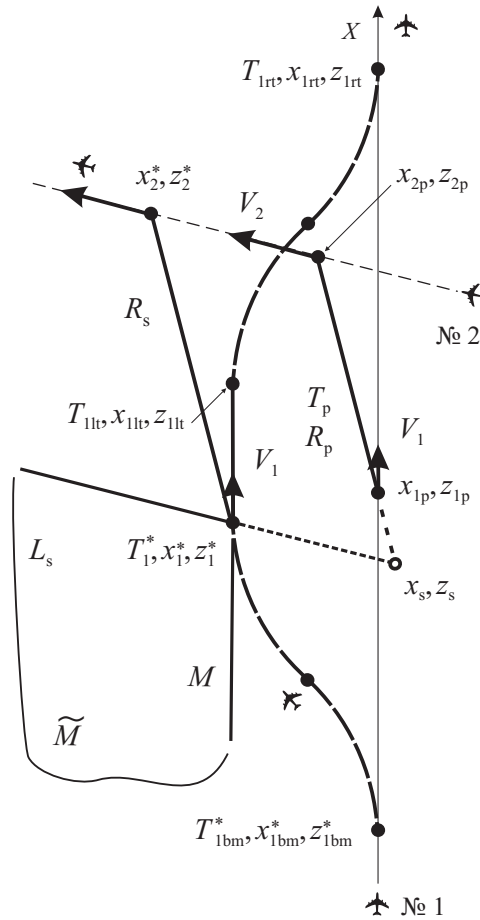


Рис. 8: Разрешающий маневр судна 1 влево

вычислительным процедурам. Во всех упомянутых подходах в построении разрешающих маневров технологические требования учитываются не полностью. В отличие от этого, разработанный подход (раздел 2) прямо учитывает требования Технологий работы диспетчеров [7] в постановке задачи разрешения конфликтных ситуаций.

Как показано в Примере 2, разрешающий маневр судна 1 вправо–навстречу судну 2 существует. И напротив, уравнение баланса времени (30) не имеет решения для маневра судна 1 влево по направлению движения неманеврирующего судна 2; причем решение не существует ни для каких значений отработываемого бокового отклонения и ни для каких величин безопасного эшелонирования. Этот факт имеет естественное объяснение для однотипных судов и угла пересечения их трасс  $\Psi_{2Tr} = 1.5\pi$  рад, как задано в исходных данных Примера 2.

Но для конфликтных ситуаций, подобных ситуации, показанной на рис. 7, при других исходных данных разрешающий маневр судна 1 влево может существовать. Рисунок 8 показывает картину, где при моделировании конфликтная ситуация разрешается при превосходстве неманеврирующего судна 2 по скорости ( $V_2 > V_1$ ) и при большом угле  $\Psi_{2Tr}$  пересечения трасс.

#### 4.4. Расчет участка выдерживания и параметров S-маневра возвращения

Для надежного обеспечения безопасного расхождения маневр возвращения не должен приводить в уменьшению текущего расстояния между судами ниже чем заданная безопас-



–2936.0 м,  $z_{2lt}^* = 128.8$  м, расстояние между судами на момент окончания выдерживания  $R_{1-2}^*(T_{2lt}^*) = 3508.4$  м. Напомним, что в момент наихудшего сближения реализованное расстояние было  $R_{\min} = R_s = 3000$  м. Участок выдерживания давал увеличение этого расстояния (вследствие того, что производная расстояния по времени здесь строго положительна), и как на самом отрезке, так и на его конце безопасное эшелонирование не нарушается.

Дальнейший маневр возвращения выполняется минимальным по времени с длительностью, равной длительности  $\tau^*$  выполняемого ранее маневра увода.

Момент  $T_{2rt}$  и координаты точки  $(x_{2rt}, z_{2rt})$  возвращения маневрирующего судна 2 на его исходную трассу рассчитываются

$$\begin{aligned} T_{2rt} &= T_{2lt} + \tau^*, \quad \tilde{x} = x_{2lt} + \Delta B^* / |\sin \Psi_{Tr}|, \\ x_{2rt} &= \tilde{x} - (x_{2bm} - x_2^*), \quad z_{2rt} = z_{2lt} - (z_{2bm} - z_2^*). \end{aligned} \quad (36)$$

Для исходных данных Примера 1 параметры на момент окончания маневра возвращения: длительность маневра возвращения  $\tau_{2rt}^* = \tau^* = 63.2$  с,  $T_{2rt}^* = 277.2$  с,  $x_{2rt}^* = 0$  м,  $z_{2rt}^* = -8850.8$  м. Суммарная длительность всего маневра разрешения конфликтной ситуации (т.е. полное время пребывания маневрирующего судна 2 вне его трассы) составляет 136.4 с и минимальна по построению.

#### 4.5. Выбор маневрирующего судна

Как отмечалось выше, принципиально возможны четыре варианта разрешающих некооперативных маневров (маневрирует только одно из судов) в горизонтальной плоскости:

- судно 1, влево от его исходной трассы – с изменением своего курса против часовой стрелки;

- судно 1, вправо от его исходной трассы – с изменением своего курса по часовой стрелке;

- судно 2, влево от его исходной трассы – с изменением своего курса против часовой стрелки;

- судно 2, вправо от его исходной трассы – с изменением своего курса по часовой стрелке.

Конфликтная ситуация обнаруживается по соотношениям (16)–(22) если минимальное расстояние между судами в прогнозе наихудшего сближения меньше заданной величины безопасного эшелонирования, и определяется тип конфликтной ситуации (по соотношениям, аналогичным (23)).

По соотношениям, аналогичным выражениям (27)–(30), (32) на основе описанной итерационной процедуры анализируется условие существования маневра, разрешающего эти варианты маневрирования. Заметим, что данный анализ носит конструктивный характер, так как оптимальный разрешающий маневр, в случае его существования, прямо строится самой процедурой.

Для каждого варианта с выполненным условием разрешимости по соотношениям, аналогичным (33), (35), (36), рассчитываются все параметры разрешающего маневра:

- минимально необходимая величина  $\Delta B^*$  бокового отклонения маневрирующего судна от его исходной трассы;

- длительность  $\tau^*$  маневров увода и возвращения;

- знак  $Sign(u^*)$  экстремального управления  $u^*$  на первом фрагменте маневра увода;

- знак  $-Sign(u^*)$  экстремального управления на втором фрагменте маневра увода;

- знак  $-Sign(u^*)$  экстремального управления на первом фрагменте маневра возвращения;

- знак  $Sign(u^*)$  экстремального управления на втором фрагменте маневра возвращения;

- момент начала  $T_{bm}^*$  маневра увода;

- момент переключения  $T_{bm}^* + 0.5\tau^*$  управления маневра увода;

- момент  $T^*$  окончания маневра увода;

- момент  $T_{lt}^*$  окончания участка выдерживания и начала маневра возвращения;

- момент переключения  $T_{lt}^* + 0.5\tau^*$  управления маневра возвращения;
- момент  $T_{rt}^*$  окончания маневра возвращения маневрирующего судна на его исходную трассу.

Рассчитанные данные по реализуемым вариантам маневров выдаются диспетчеру. На основании этих данных выбирается такое судно и такой вариант его маневра, который, например, является минимальным по суммарной длительности  $2\tau^* + \tau_{lt}$ , или обеспечивает наименьшую величину  $\Delta B^*$  минимально необходимого бокового отклонения от его исходной трассы, или исключает возникновение наведенных (с другими воздушными судами) конфликтных ситуаций. Критерием назначения маневрирующего судна может быть (что часто делается на практике) нахождение данного судна при прогнозируемом наихудшем сближении в задней полусфере относительно другого судна.

Именно по последнему критерию в рассмотренном Примере 1 для маневрирования влево против часовой стрелки предпочтительно назначать именно судно 2, а в специальном Примере 2 вообще существуют только такой разрешающий маневр судна 1 по часовой стрелке навстречу судну 2 и аналогичный разрешающий маневр судна 2 против часовой стрелки навстречу судну 1.

## 5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим конструктивность и универсальность рассмотренного подхода. Анализ условий существования, построение разрешающего маневра и расчет его параметров может выполняться для любых параметров конфликтующих судов по скорости движения, ограничений на боковое ускорение и максимальную угловую скорость изменения курса, начальных положений и углов схождения их трасс.

Разработанный подход успешно работает в ситуациях очевидного столкновения судов (например, как в [9, Fig. 1, Fig. 2]), при вырожденности или неопределенности расчетных параметров наихудшего сближения.

Благодаря прямому включению основных требований Технологий по управлению воздушным движением [7] в формулировку задачи разрешения конфликтных ситуаций, разработанные алгоритмы оказываются представительными и практически значащими.

Использование стандартных структур при построении разрешающего маневра позволяет разработать достаточно простые алгоритмы и программное обеспечение, работающее в реальном времени.

В случаях, когда система (1) может быть применена для описания управляемого движения воздушных судов в вертикальной плоскости, разработанный подход и соответствующие алгоритмы успешно работают в задачах разрешения конфликтных ситуаций маневром в вертикальной плоскости [2].

### Список литературы

1. Кумков С.И. Алгоритмы разрешения конфликтной ситуации (маневр на терминальное множество специального вида). Отчет о научно-исследовательской работе по контракту НИТА № 39/2001. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2002.
2. Кумков С.И. Конфликтные ситуации в пространстве, маневр по вертикали. Отчет о научно-исследовательской работе по контракту НИТА № 39/2001. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2002.
3. Липин А.В., Олянюк П.В. Бортовые системы предотвращения столкновений воздушных судов. Учебное пособие. –СПб.: Академия гражданской авиации, 1999.
4. Анодина Т.Г., Кузнецов А.А., Маркович Е.Д. Автоматизация управления воздушным движением. –М.: Транспорт, 1992.
5. Белкин А.М., Миронов Н.Ф., Рублев Ю.И., Сарайский Ю.Н. Воздушная навигация: справочник. –М.: Транспорт, 1988.

6. Пятко С.Г. Методы повышения точности прогнозирования траекторий полета самолетов в автоматизированных системах управления воздушным движением. Дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. –Л.: ОЛАГА, 1985.
7. Технологии работы диспетчеров управления воздушным движением. Королев Е.Н. (ред.). –М.: Воздушный транспорт, 2000.
8. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. –М.: Госстандарт, 1980.
9. Miele A. and T. Wang. New Approach to the Collision Avoidance Problem for a Ship. // International Game Theory Review, Vol.6, No.1 (2004) 137-155.
10. Mitchel I.N. Application of Level Set Methods to Control and Reachability Problems in Continuous and Hybrid Systems. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Stanford University, USA, 2002.
11. Tomlin C., Lygeros J., and S. Sastry. Conflict Resolution for Air Traffic Management: a Study in Multi-Agent Hybrid Systems. Report of the Research under NASA Grant NAG-2-1039. University of California, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences. 1998.
12. Tomlin C., Lygeros J., and S. Sastry. Synthesizing Controllers for Nonlinear Hybrid Systems. Report of the Research under NASA Grant NAG-2-1039. University of California, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, 1997.