

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ НИЗКОГО ПОРЯДКА ПО КРИТЕРИЮ H_∞ : ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД¹

Рассматривается задача описания всех стабилизирующих регуляторов заданной структуры (например, ПИД-регуляторов), удовлетворяющих критерию H_∞ . Регуляторы семейства определяются параметрами \mathbf{k} , и в пространстве параметров выделяется область, соответствующая требуемым критериям. Предлагаются два подхода: в первом искомая область представляется как пересечение допустимых множеств, а в другом аналитически находится ее граница. Случай двух параметров особенно важен, он позволяет использовать графические методы.

1. Введение

Задача синтеза регуляторов низкого порядка заключается в нахождении стабилизирующего регулятора, причем помимо устойчивости замкнутая система должна удовлетворять некоторым дополнительным критериям. Как правило, структура регулятора задана изначально и остается лишь должным образом выбрать параметры регулятора.

Несмотря на развитие аналитических теорий синтеза регуляторов, таких, как H_∞ -теория, l_1 -подход, QFT -подход, μ -синтез и других [1, 2, 3, 4, 5], в промышленных приложениях по-прежнему используются простые (если не сказать простейшие) регуляторы, такие, как, пропорционально-интегрирующие, пропорционально-интегрирующие-дифференцирующие, регуляторы первого порядка и пр. Эти регуляторы просты по своей структуре, их работа основана на понятных физических принципах, что, возможно, и обусловило их популярность и широкую применимость в задачах управления [6, 7, 8]. Важной проблемой остается синтез регуляторов, удовлетворяющих критериям качества.

В работе рассмотрены критерии типа H_∞ , которые возникают как в задаче синтеза робастных регуляторов, гарантирующих устойчивость несмотря на неопределенность объекта, так и в задаче стабилизации системы при заданном критерии качества.

Аналитическая теория синтеза H_∞ оптимальных регуляторов детально разработана, однако порядок получающихся регуляторов может быть весьма большим (и даже превышающим порядок исходной системы), см. [9]; кроме того, устойчивость замкнутой системы крайне чувствительна к параметрам регулятора, малое их изменение зачастую приводит к неустойчивости [10]. Теория H_∞ не позволяет ограничить порядок синтезируемого регулятора, поэтому прямое ее применение к задаче синтеза регуляторов заданной структуры сталкивается с существенными трудностями.

В статье описывается альтернативный подход для синтеза регуляторов заданной структуры, т.е. порядок регулятора фиксирован, свобода остается лишь в выборе параметров регулятора. В дальнейшем будем в основном предполагать, что имеется

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00114, № 05-08-01177) и Президиума РАН (программа № 22).

лишь два настраиваемых параметра регулятора, это позволяет широко использовать графические методы. Таким образом, задача заключается в нахождении области в пространстве параметров, такой, что соответствующие регуляторы, во-первых, стабилизируют систему, а во-вторых, гарантируют выполнение H_∞ -критерия.

Для нахождения стабилизирующих регуляторов низкого порядка в общем случае может быть применено D -разбиение Неймарка [11]; современное состояние техники D -разбиения описано в [12].

В ряде работ [13, 14, 15] показано, что H_∞ критерий может быть представлен как ограничение на поведение годографа Найквиста (он должен лежать вне некоторого круга). Исходя из этого авторы формулируют так называемое «ограничение на чувствительность», которое задает допустимую область в пространстве параметров, и ищут ПИ и ПИД-регуляторы, максимизирующие коэффициент интегрирующего звена.

В последнее время предложен подход к решению задачи с критерием H_∞ [16, 17, 18], в котором используется тот факт, что выполнение H_∞ -критерия эквивалентно устойчивости однопараметрического семейства полиномов с комплексными коэффициентами. Для каждого значения параметра решается задача стабилизации, и искомая область представляется как пересечение областей устойчивости. Альтернативой может служить использование случайных методов, в этом случае по части параметров задача может быть эффективно решена, а оставшиеся параметры набрасываются случайно, такие методы рассмотрены в [19].

В статье предлагаются два подхода. В первом искомая область характеризуется пересечением допустимых множеств, определяющих значения параметров, во втором с помощью идей D -разбиения находится ее граница. Оба метода позволяют найти интересующую область и применимы для широкого класса регуляторов, включающего ПИ-, ПИД-регуляторы, регуляторы первого порядка и т.п.

Изложение построено следующим образом: во втором разделе ставится и обосновывается задача, в третьем представлены основные результаты, касающиеся синтеза H_∞ регуляторов. Описываются два способа нахождения области в пространстве параметров, в которой замкнутая система устойчива и выполняются требования к робастности или качеству. Четвертый раздел содержит примеры, демонстрирующие эффективность обоих способов. Наконец, в заключении сформулированы выводы и обсуждаются некоторые аспекты применения предложенных методов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную одномерную систему, в которой объект задан скалярной передаточной функцией $G(s)$. Пусть система замкнута регулятором $C(s, \mathbf{k})$, (рис. 1). Параметры $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, $m \leq 3$ задают множество допустимых регуляторов низкого порядка. Структура регулятора известна, среди допустимых регуляторов в работе рассматриваются: ПИ-регулятор $k_p + \frac{k_i}{s}$, ПИД-регулятор $k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$, регулятор первого порядка $\frac{k_1 s + k_2}{s + k_3}$.

Требуется описать множество параметров, соответствующих всем регуляторам, удовлетворяющих критерию качества

$$(1) \quad \|H(s, \mathbf{k})\|_\infty < \gamma.$$

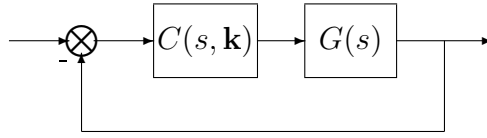


Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы.

Напомним, что H_∞ норма конечна только для функций с устойчивым знаменателем, и равна $\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |H(j\omega)|$.

Такой H_∞ критерий возникает сразу при нескольких постановках задач синтеза, приведем важные примеры:

- Нахождение регулятора $C(s)$, гарантирующего H_∞ -качество замкнутой системы,

$$(2) \quad \|W_1(s)T(s)\|_\infty \leq \gamma,$$

где $W_1(s)$ предполагается устойчивой дробно-рациональной функцией ($W_1 \in \mathbf{RH}_\infty$), $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ — передаточная функция замкнутой системы (дополнительная чувствительность), γ — заданный уровень качества.

- Нахождение регулятора, робастно стабилизирующего семейство объектов с аддитивной неопределенностью $G(s) = G_0(s) + \Delta G(s)$, где $G_0(s)$ — передаточная функция номинального объекта, частотная (в иностранной литературе называется непараметрической [1]) неопределенность $\Delta G(s)$ ограничена по взвешенной норме $\|W_2(s)\Delta G(s)\|_\infty \leq 1$. Задача сводится к выполнению критерия

$$(3) \quad \|W_2^{-1}(s)U(s)\|_\infty \leq 1,$$

где $U(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$ — передаточная функция по ошибке, $W_2 \in \mathbf{RH}_\infty$. Мультипликативной неопределенности $G(s) = G_0(s)(1 + \Delta G(s))$ соответствует критерий $\|W_2^{-1}(s)T(s)\|_\infty \leq 1$.

- В качественной теории обратной связи (QFT — Qualitative Feedback Theory) [20], замкнутая система должна удовлетворять следующим ограничениям:

$$(4) \quad \begin{aligned} m_1(\omega) &< |W(j\omega)T(j\omega)| < m_2(\omega), \omega \in [0, \omega_1], \\ |S(j\omega)| &< l_1(\omega), \omega \in [0, \omega_1], \\ |T(j\omega)| &< l_2(\omega), \omega \in [\omega_2, \infty), \end{aligned}$$

здесь $S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$ — чувствительность, m_1, m_2, l_1, l_2 — ограничительные функции. Выбор подходящей весовой функции позволяет перейти от конечных интервалов частот к интервалу $[0, \infty)$, однако предложенные в работе методы позволяют оперировать с интервалами напрямую, см. пример 2.

Отметим, что в большинстве подходов, таких, как H_∞ теория и робастная стабилизация, используется параметризация Юлы и ее аналоги, которые дают функциональные семейства регуляторов, не только удовлетворяющие условиям задачи, но и

оптимальные по критерию [4, 5]. Недостаток этих подходов заключается в сложности полученного семейства, неочевидной параметризации, ограничивающей включение оптимального регулятора в семейство заданных регуляторов, а также «хрупкости» полученных регуляторов [10].

Мы сосредоточимся на изучении параметрических семейств регуляторов, зададимся видом регулятора и будем искать подмножество, для которого выполняется критерий (1).

Оптимальный регулятор заданной структуры можно найти, уменьшая уровень γ до тех пор, пока множество подходящих регуляторов не станет пустым.

Из определения H_∞ нормы следует, что она имеет смысл только для аналитических в правой комплексной полуплоскости функций из \mathbf{RH}_∞ . Кроме того, нас интересуют только стабилизирующие регуляторы, поэтому должны выполняться следующие требования:

- 1) Замкнутая система устойчива, т.е. ее характеристический полином $\delta(s, \mathbf{k})$ гурвицев (все корни лежат в левой комплексной полуплоскости);
- 2) Функция H также устойчивая ($H(s) = W_1(s)T(s)$ в задаче о H_∞ -качестве (2), $H(s) = W_2(s)^{-1}U(s)$ в задаче о H_∞ -робастности (3) и т.д.): $H(s, \mathbf{k}) \in \mathbf{RH}_\infty$;
- 3) Для заданного числа $\gamma > 0$ выполняется неравенство $|H(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma, \omega \in [0, \infty)$.

Пересечение трех областей, в которых эти условия выполняются по-отдельности, даст искомое множество параметров (а значит, и регуляторов). Для краткости будем называть регуляторы, для которых выполняются все три условия, H_∞ регуляторами. На практике часто первые два требования совпадают, поскольку знаменатель функции H равен характеристическому полиному замкнутой системы. Это верно для всех перечисленных задач (2), (3) и (4), далее примем этот случай за основной.

Итак, основной задачей является описание множества H_∞ регуляторов. Его построение будем производить в два этапа. Сначала мы осуществим выделение областей в пространстве параметров регулятора, удовлетворяющих условию $|H(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma, \forall \omega \in [0, \infty)$ (это же условие косвенно определяет параметры, при которых функция $H(j\omega, \mathbf{k})$ неопределена). Затем среди этих областей остается выделить те, в которых функция $H(s, \mathbf{k})$ устойчива.

3. Синтез H_∞ регуляторов

Предположим, что регулятор стабилизирует систему, т.е. знаменатель $H(s)$ устойчив. Тогда $\|H(s, \mathbf{k})\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega, \mathbf{k})|$, где общая дробно-рациональная передаточная функция записана в виде

$$H(s, \mathbf{k}) = \frac{H_n(s, \mathbf{k})}{H_d(s, \mathbf{k})}.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что числитель H_n и знаменатель H_d линейно зависят от параметров \mathbf{k} . Это так для всех рассмотренных задач (2), (3), (4), если числитель и знаменатель регулятора также зависят от параметров линейно, что верно для ПИ-, ПИД-регуляторов, первого порядка и пр. Например, для ПИД-регулятора и функции чувствительности, $H_n(s, \mathbf{k}) = sD(s)$, $H_d(s, \mathbf{k}) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s)$, где $N(s)$ — числитель передаточной функции объекта $G(s)$, а $D(s)$ — ее знаменатель.

Отбросим требование к устойчивости знаменателя, и найдем вспомогательное множество в пространстве параметров

$$(5) \quad \mathcal{K} = \{\mathbf{k} : |H(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma, \forall \omega \in [0, \infty)\},$$

пересечение которого с областью устойчивостью определяет все H_∞ регуляторы. Наравне с определением (5) используем эквивалентную с точки зрения множества \mathcal{K} запись

$$(6) \quad \mathcal{K} = \{\mathbf{k} : |H_n(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma|H_d(j\omega, \mathbf{k})|, \forall \omega \in [0, \infty)\},$$

в которой снимается требование существования функции $H(j\omega, \mathbf{k})$ при всех ω и \mathbf{k} .

Оказывается, что находить область устойчивости необязательно, поскольку справедливо следующее утверждение (множество \mathcal{K} , как правило, многосвязное):

Утверждение 1. Если точка $\mathbf{k}^ \in \mathcal{K}$ соответствует H_∞ регулятору, то все точки односвязной компоненты \mathcal{K} , в которой лежит \mathbf{k}^* , также определяют H_∞ регуляторы.*

Доказательство немедленно следует из того факта, что граница области устойчивости входит в границы D -разбиения для характеристического полинома [11], которые описываются условием $H_d(j\omega, \mathbf{k}) = 0$, а по определению, напр. (6), эти границы не принадлежат множеству \mathcal{K} .

В работе применяются графические методы, а их использование эффективно лишь на плоскости, поэтому количество свободных (регулируемых) параметров должно быть мало. Если размерность вектора \mathbf{k} больше двух, то следует выбрать два параметра, по которым будет искаться стабилизирующий H_∞ регулятор, и зафиксировать все остальные. Как правило, в задаче синтеза регуляторов заданной структуры размерность \mathbf{k} не выше трех (ПИД-, первого порядка), см. пример 2.

3.1. Допустимые множества

Рассмотрим подробнее неравенство $|H_n(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma|H_d(j\omega, \mathbf{k})|$, входящее в определение множества \mathcal{K} . При каждой ω оно определяет в пространстве параметров \mathbf{k} множество \mathcal{K}^ω , которое назовем допустимым множеством. Согласно определению, \mathcal{K} является пересечением по ω допустимых множеств.

Перепишем рассматриваемое неравенство в виде

$$(7) \quad |H_n(j\omega, \mathbf{k})|^2 < \gamma^2 |H_d(j\omega, \mathbf{k})|^2.$$

Как уже отмечалось, мы рассматриваем случай двух свободных параметров $\mathbf{k} \doteq (k_1, k_2)$, причем числитель и знаменатель регулятора (а значит, и функции H) зависят от них линейно, остальные параметры зафиксированы. Тогда (7) принимает вид

$$|H_n^0(j\omega) + H_n^1(j\omega)k_1 + H_n^2(j\omega)k_2|^2 < \gamma^2 |H_d^0(j\omega) + H_d^1(j\omega)k_1 + H_d^2(j\omega)k_2|^2,$$

и допустимое множество описывается уравнением типа

$$(8) \quad \mathcal{K}^\omega = \{(k_1, k_2) : a(\omega)k_1^2 + b(\omega)k_1k_2 + c(\omega)k_2^2 + d(\omega)k_1 + e(\omega)k_2 + f(\omega) < 0\},$$

где $a(\omega), b(\omega), c(\omega), d(\omega), e(\omega), f(\omega)$ — полиномы с вещественными коэффициентами (предполагается, что коэффициенты весовой функции и передаточных функций объекта и регулятора также вещественные). Границей допустимого множества при каждой ω является кривая второго порядка относительно двух выбранных параметров k_1 и k_2 .

Классифицируя особенности параметризации регуляторов, получаем следующий результат:

Теорема 1. Множество \mathcal{K} является пересечением квадратичных множеств $\mathcal{K}^\omega, \omega \in [0, \infty)$. При этом:

а) *Если k_1, k_2 входят в числитель и знаменатель регулятора в виде $k_1 + k_2 s^2$ (случай ПИД-регулятора с фиксированным k_p), то \mathcal{K}^ω — внешность или внутренность полосы.*

б) *Если $C(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s + a}$ (регулятор первого порядка) или $C(s) = \frac{k_1 + k_2 s + a s^2}{s}$ (ПИ-регулятор), то \mathcal{K}^ω является внутренностью или внешностью эллипса.*

Справедливо более общее по сравнению с пунктом а) утверждение: допустимое множество будет полосой, если параметры k_1, k_2 появляются в числителе и знаменателе регулятора только в составе линейной комбинации $k_1 p(s^2) + k_2 q(s^2)$. Более того, в таком случае \mathcal{K} состоит из конечного числа выпуклых множеств.

Для регулятора первого порядка с другим зафиксированным коэффициентом, например, $C(s) = \frac{k_1 s + a}{s + k_2}$, равно как ПД-регуляторов, границы допустимых множеств будут эллипсами, как в пункте б).

Для специального семейства регуляторов вида $C(s, k_1, k_3) = \frac{k_1 + k_2 s + k_3 s^2}{d k_1 + s + d k_3 s^2}$ (d, k_2 зафиксированы) подобный метод впервые был предложен Бланкини и др. [21]. В таком случае множество \mathcal{K} может не быть односвязным, там же приводится оценка максимального количества его односвязных компонент.

Построение \mathcal{K} через его дополнение $\bar{\mathcal{K}}$ имеет много общего с робастным D -разбиением для эллиптических неопределенностей [22].

3.2. Аналог D -разбиения

Второй способ нахождения множества H_∞ регуляторов основан на вычислении границы множества $\mathcal{K} = \{\mathbf{k} : |H_n(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma |H_d(j\omega, \mathbf{k})|, \forall \omega \in [0, \infty)\}$ в явном виде. Аналогично подходу D -разбиения рассмотрим переход точки из \mathcal{K} в $\bar{\mathcal{K}}$. Могут произойти два существенно различных случая: функция $|H(j\omega, \mathbf{k})|$ достигнет значения γ , либо ее числитель и знаменатель одновременно обратятся в нуль. Точки, где нулю равен только знаменатель, не принадлежат границе, поскольку в их малой окрестности нет ни одной точки, в которой бы выполнялось неравенство $|H_n(j\omega, \mathbf{k})| < \gamma |H_d(j\omega, \mathbf{k})|$.

Там, где H определена, можно записать необходимое условие экстремума по ω , в результате получим удобную для использования теорему:

Теорема 2. Граница множества \mathcal{K} содержится в решениях систем

$$(9) \quad \begin{cases} H_n(j\omega, \mathbf{k}) = 0, \\ H_d(j\omega, \mathbf{k}) = 0, \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty),$$

$$(10) \quad \begin{cases} |H(j\omega, \mathbf{k})|^2 = \gamma^2, \\ \frac{\partial |H(j\omega, \mathbf{k})|^2}{\partial \omega} = 0, \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty),$$

и уравнения

$$(11) \quad |H(j\infty, \mathbf{k})| = \gamma.$$

Доказательство. Точки границы, в которых функция H не определена, охватываются решениями системы (9). Система (10) и уравнение (11) включают все точки границы множества \mathcal{K} , для которых $\sup_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega, \mathbf{k})| = \gamma$. Взяв квадрат модуля

функции H , поскольку он является дробно-рациональной функцией от ω и его производная определена. Тогда конечные значения ω , в которых функция $|H(j\omega, \mathbf{k})|^2$ принимает значения γ^2 , должны быть точками максимума, значит, в них выполняется необходимое условие экстремума — равенство нулю производной по ω . Все точки \mathbf{k} , такие что максимум $|H(j\omega, \mathbf{k})|$ равен γ , содержатся в решениях системы (10). Достижение точной верхней грани функции $|H(j\omega, \mathbf{k})|$ на бесконечности описывается уравнением (11). Теорема доказана.

Для двух переменных (k_1, k_2) решением системы (10) будет совокупность точек. Первое уравнение при каждой ω задает либо одномерную кривую, либо пустое множество. Второе уравнение системы позволяет выделить на кривой те точки \mathbf{k} , на которых функция $|H|^2$ достигает своего экстремума (при данном ω). Поскольку условие равенства производной нулю не позволяет нам различить, достигается ли в этой точке максимум или минимум, среди решений могут появиться точки, не принадлежащие искомой границе, однако такие \mathbf{k} лежат вне допустимых областей.

С учетом того, что нас интересуют только те связные компоненты множества \mathcal{K} , которые лежат внутри области устойчивости, то, согласно утверждению 1, достаточно выбрать в каждой из компонент по точке и проверить выполнение H_∞ критерия.

В ряде случаев система (10) допускает явное решение. Приведем его для случая ПИД-регулятора с фиксированным k_p , замкнутая система должна удовлетворять критерию (2).

Функция $|H(j\omega, k_i, k_d)|^2 = |W(j\omega)T(j\omega, k_i, k_d)|^2$ записывается в виде

$$\begin{aligned} & |W(j\omega)|^2 \frac{|(k_i + j\omega k_p - \omega^2 k_d)N(j\omega)|^2}{|j\omega D(j\omega) + (k_i + j\omega k_p - \omega^2 k_d)N(j\omega)|^2} = \\ & = |W(j\omega)|^2 \frac{((k_i - \omega^2 k_d)^2 + \omega^2 k_p^2) |N(j\omega)|^2}{(-\omega \operatorname{Im}[D(j\omega) + k_p N(j\omega)] + (k_i - \omega^2 k_d) \operatorname{Re} N(j\omega))^2 + (\omega \operatorname{Re}[D(j\omega) + k_p N(j\omega)] + (k_i - \omega^2 k_d) \operatorname{Im} N(j\omega))^2}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований и приведения к компактному виду система (10) принимает вид

$$\begin{cases} t^2 P(\omega) + 2tQ(\omega) + R(\omega) = 0, \\ t^2 \frac{dP(\omega)}{d\omega} + 2t \frac{dQ(\omega)}{d\omega} + \frac{dR(\omega)}{d\omega} + 2(t^2 P(\omega) + Q(\omega)) \frac{\partial t(\omega, k_i, k_d)}{\partial \omega} = 0, \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty),$$

где

$$\begin{aligned} t(\omega, k_i, k_d) &= k_i - \omega^2 k_d, \\ P(\omega) &= (|W(j\omega)|^2 - \gamma^2) |N(j\omega)|^2, \\ Q(\omega) &= -\omega \gamma^2 \operatorname{Im}[D(-j\omega)N(j\omega)], \\ R(\omega) &= \omega^2 (|W(j\omega)|^2 |k_p N(j\omega)|^2 - \gamma^2 |D(j\omega) + k_p N(j\omega)|^2). \end{aligned}$$

Вещественные решения первого уравнения равны

$$(12) \quad t_{1,2}(\omega) = \frac{-Q(\omega) \pm \sqrt{Q^2(\omega) - P(\omega)R(\omega)}}{P(\omega)},$$

и существуют только при неотрицательном дискриминанте. Условие $Q^2(\omega) \geq P(\omega)R(\omega)$ позволяет выделить соответствующие интервалы ω .

Из второго уравнения можно явно выразить k_d , а следом и $k_i = t + \omega^2 k_d$. В результате получим две параметрические по ω кривые:

$$(13) \quad k_d^{1,2}(\omega) = \frac{t_{1,2}^2(\omega)P'(\omega) + 2t_{1,2}(\omega)Q'(\omega) + R'(\omega)}{4\omega(t_{1,2}(\omega)P(\omega) + Q(\omega))},$$

$$(14) \quad k_i^{1,2}(\omega) = t_{1,2}(\omega) + \omega \frac{t_{1,2}^2(\omega)P'(\omega) + 2t_{1,2}(\omega)Q'(\omega) + R'(\omega)}{4(t_{1,2}(\omega)P(\omega) + Q(\omega))}.$$

или, в развернутом виде,

$$k_d^{1,2}(\omega) = \frac{Q'(\omega)P(\omega) - P'(\omega)Q(\omega)}{2\omega P^2(\omega)} \pm \frac{2Q(\omega)(Q(\omega)P'(\omega) - Q'(\omega)P(\omega)) + P(\omega)(R'(\omega)P(\omega) - P'(\omega)R(\omega))}{4\omega P^2(\omega)\sqrt{(Q^2(\omega) - P(\omega)R(\omega))}},$$

$$k_i^{1,2}(\omega) = \frac{-Q(\omega) \pm \sqrt{Q^2(\omega) - P(\omega)R(\omega)}}{P(\omega)} + \frac{1}{4\omega P^2(\omega)} \left(2(Q'(\omega)P(\omega) - P'(\omega)Q(\omega)) \pm \frac{P(\omega)(R'(\omega)P(\omega) - P'(\omega)R(\omega)) - 2Q(\omega)(Q'(\omega)P(\omega) - P'(\omega)Q(\omega))}{\sqrt{(Q^2(\omega) - P(\omega)R(\omega))}} \right).$$

Отметим, что система (10) эквивалентна уравнению огибающей семейства кривых, заданных уравнением $|H(j\omega, k_1, k_2)|^2 - \gamma^2 = 0$, в пространстве (k_1, k_2) .

Систему (9) также можно выписать явно для ПИД-регулятора. Так, для задачи H_∞ качества (2), если числители и знаменатели весовой функции $W(s)$ и передаточной функции объекта $G(s)$ не имеют чисто мнимых (включая нуль) корней, то решением системы (9) является плоскость $k_i = 0$ при $\omega = 0$.

4. Примеры

Пример 1. [8] Рассмотрим использование предложенных методов на примере синтеза ПИД-регулятора с фиксированным коэффициентом усиления. Объект задан передаточной функцией $G(s) = \frac{s-1}{s^2+0,8s-0,2}$, регулятор $C(s, k_i, k_d) = \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s}$, $k_p = -0,35$. Требуется найти все регуляторы, удовлетворяющие H_∞ критерию качества (2) с $\gamma = 1$ и фильтром высоких частот $W(s) = \frac{s+0,1}{s+1}$.

Область устойчивости в плоскости (k_i, k_d) — треугольник с вершинами в точках $(0; 0,4507)$, $(0; -1)$, $(-0,15; -1)$.

Найдем область \mathcal{K} в пространстве параметров, такую, что для всех точек внутри нее выполняется условие $|W(j\omega)T(j\omega, k_i, k_d)| < 1$, $\omega \in [0, \infty)$. Сначала построим ее с помощью допустимых множеств.

Допустимые множества \mathcal{K}^ω суть внешняя часть полос при $\omega \in \{0\} \cup [0, 2085, 0, 506] \cup [1, 375, \infty)$, для остальных частот они совпадают со всей плоскостью и потому не рассматриваются. Последний интервал представляет интерес только на предельном значении $\omega = \infty$, где неравенство (7) задает допустимое множество как полуплоскость $k_d > -0,5$, в которой ограничено построение остальных допустимых множеств.

Для первого интервала частот на рис. 2 изображены пары прямых, ограничивающих полосы. Множество \mathcal{K} состоит из четырех несвязных компонент, та из них, которая соответствует H_∞ регуляторам, помечена «x».

На рис. 3 показаны границы \mathcal{K} , полученные с применением второго метода, при различных уровнях $\gamma = \{1, 0,82, 0,68, 0,56, 0,52\}$. Для $\gamma = 1$, используя условие положительности дискриминанта (12), можно вычислить концы двух приведенных выше интервалов как корни уравнения

$$Q^2(\omega) - P(\omega)R(\omega) = \omega^8 - 2,19\omega^6 + 0,5778\omega^4 - 0,02106225\omega^2 = 0$$

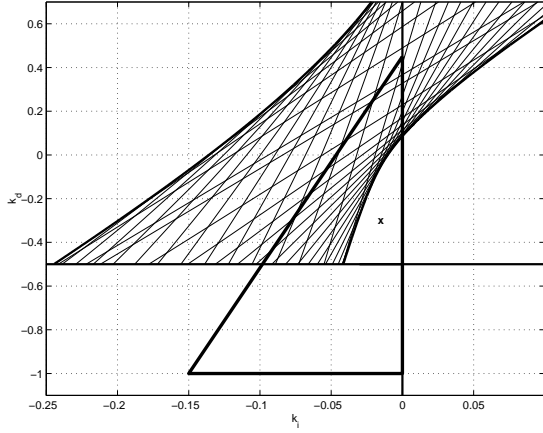


Рис. 2. Пример 1, построение \mathcal{K} с помощью допустимых множеств.

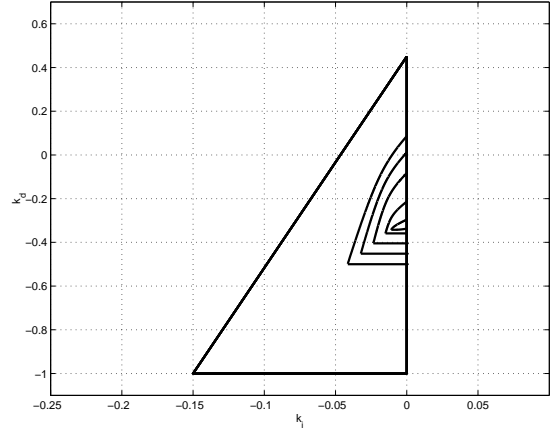


Рис. 3. Пример 1, границы H_∞ -регуляторов для различных уровней γ .

Пример 2. Впервые этот пример был рассмотрен в работе [4]. Задача состоит в нахождении стабилизирующего регулятора, такого, что на низких частотах чувствительность мала. Значение критерия $F = \max_{\omega < 0,01} |S(j\omega, \mathbf{k})|$ не должно превосходить 0,1.

Объект задан своей передаточной функцией $G(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s^2+s+1)}$. В H_∞ -теории для решения предлагается выбрать весовую функцию $W(s) \in \mathbf{RH}_\infty$, по смыслу являющуюся фильтром низких частот, и провести H_∞ оптимизацию. В [4] была выбрана функция $W(s) = \frac{s+1}{10s+1}$. Для полученного методом Неванлинны-Пика регулятора 4 порядка значение критерия равно $F = 0,1202$. Позже в [9] подбором был найден ПИ-регулятор, на котором достигается значение $F = 0,0373$. Этот пример отчетливо демонстрирует, что процедура H_∞ -оптимального синтеза вкупе с использованием весовой функции вместо использования прямого критерия может давать неудовлетворительные результаты, и поэтому синтез регулятора заданной структуры и низкого порядка вполне может конкурировать с более сложными схемами синтеза.

Рассмотрим только ПИД-регуляторы. Сразу скажем, что для приведенной выше весовой функции никакой ПИД-регулятор не удовлетворяет H_∞ критерию $\|W(s)S(s, k_i, k_p, k_d)\|_\infty < 0,1$. При другой весовой функции $W(s) = \frac{s+1}{100s+1}$ на рис. 4 приведено сечение H_∞ ПИД-регуляторов для $k_p = 0,16$. Рядом на рис. 5 показано сечение множества регуляторов, удовлетворяющих прямому критерию $F(k_i, k_d) < 0,1$

(серый треугольник), для сравнения внешний треугольник — область устойчивости. Видно, что использование весовой функции приводит к консерватизму в построении множества допустимых регуляторов.

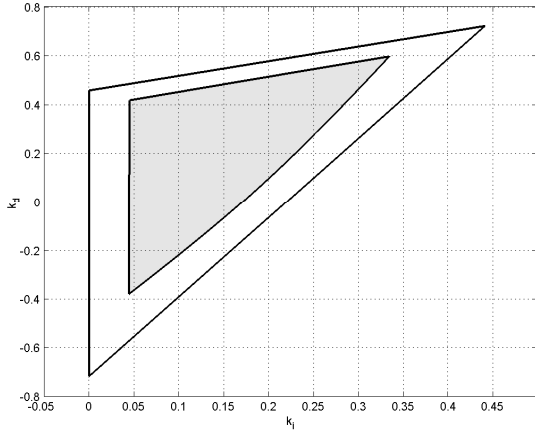


Рис. 4. Пример 2, H_∞ ПИД-регуляторы при использовании весовой функции.

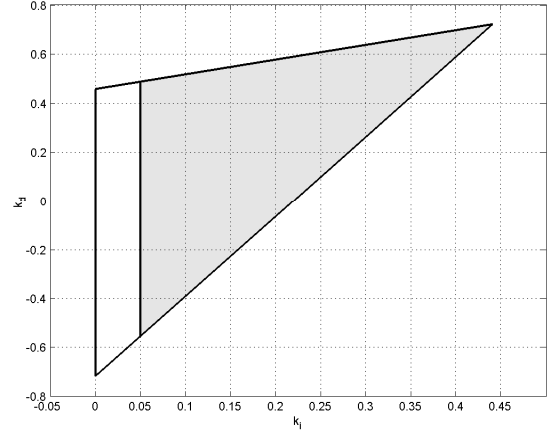


Рис. 5. Пример 2, ПИД-регуляторы, удовлетворяющие прямому критерию $F < 0,1$.

Для прямого критерия на рис. 6 в пространстве k_i, k_p, k_d изображено множество всех ПИД-регуляторов, для которых выполняется $F(k_i, k_p, k_d) < 0,1$.

Пример 3. [18] Проиллюстрируем особенности построения областей устойчивости с помощью допустимых множеств. Рассмотрим тот же объект, что и в Примере 1: $G(s) = \frac{s-1}{s^2+0,8s-0,2}$, но замкнутый регулятором первого порядка $C(s, \mathbf{k}) = \frac{k_1s+k_2}{s+k_3}$. Для той же весовой функции $W(s) = \frac{s+0,1}{s+1}$ нас интересует выполнение критерия $\|W(s)T(s)\|_\infty < \gamma$.

Зафиксируем $k_3 = 2,5$ и построим область устойчивости с помощью обычного D -разбиения (внешняя жирная линия на рис. 7). Для $\gamma = 1$ при всех ω допустимыми множествами будут внешние части эллипсов, результат построения искомого множества \mathcal{K} изображен на рис. 7. Однако при $\gamma < 1$, например, $\gamma = 0,66$, для некоторых ω допустимые множества — внутренняя часть эллипса. Если проанализировать уравнения (2), (7), (8), то для таких ω необходимым и достаточным условием будет выполнение неравенства $|W(j\omega)| > \gamma$. Для этого примера $|W(j\omega)| > \gamma$ при $\omega \in (0,868, \infty)$. Таким образом, при изменении ω надо сначала брать пересечение внешних частей эллипса, а затем внутренних частей. Переходная частота (в общем случае их несколько) находится из уравнения $|W(j\omega)| = \gamma$.

Выделенная прямая на рис. 8 соответствует «эллипсу» при $\omega = 0,868$, вырожденному в полуплоскость.

Когда оба регулируемых параметра регулятора находятся в его числителе, получим подобные условия для отличных от (2) постановок задач. Если используется H_∞ критерий вида (4), в который входит чувствительность, то все допустимые множества — внешние части эллипсов (полос). В случае робастной устойчивости, (в критерий (3) входит передаточная функция по ошибке) условием того, что допустимое множество — внешняя часть, будет $|W(j\omega)| < \gamma|G(j\omega)|$.

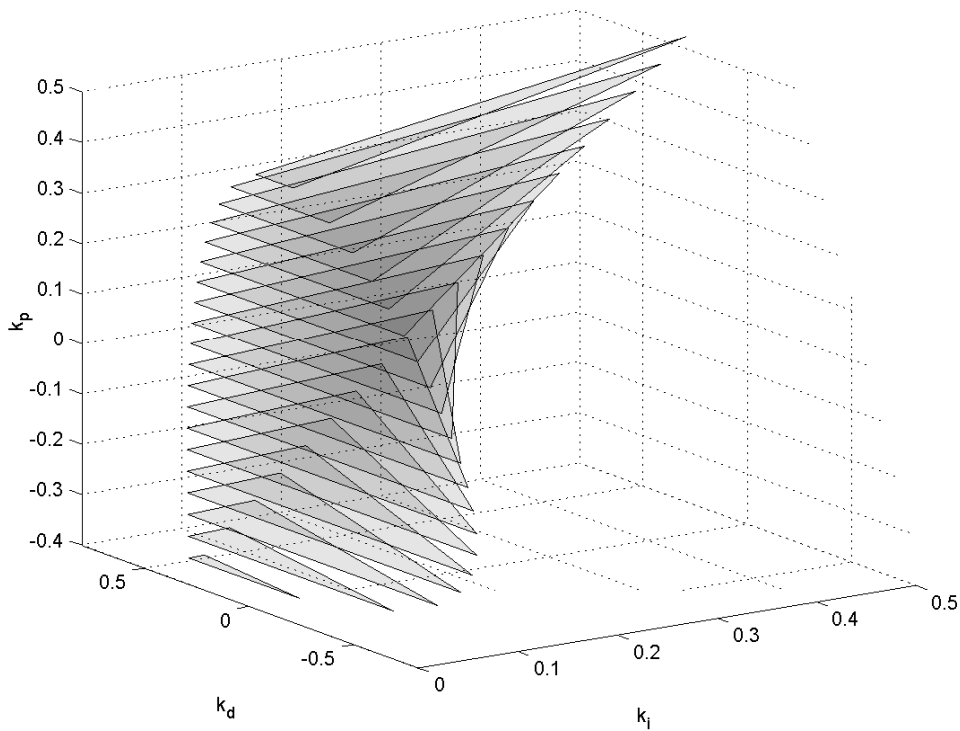


Рис. 6. Множество H_∞ ПИД-регуляторов.

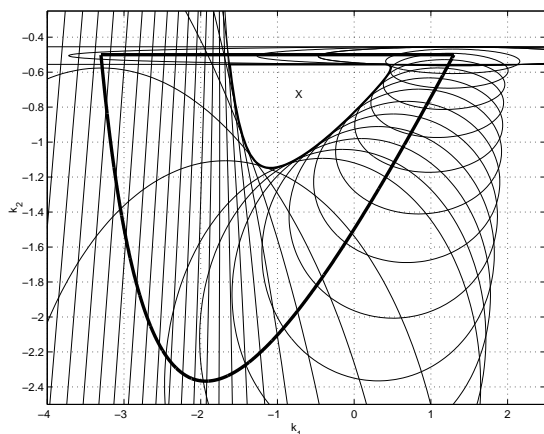


Рис. 7. Допустимые множества для регулятора первого порядка ($\gamma = 1$).

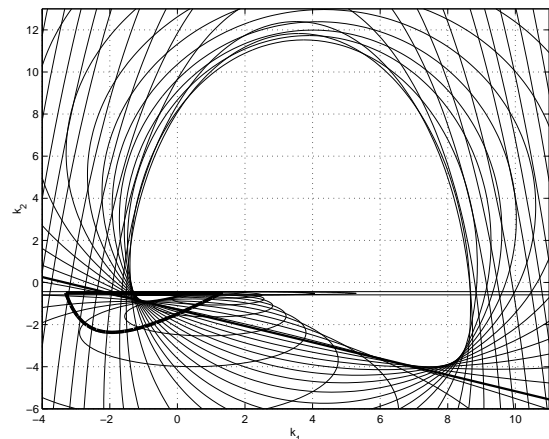


Рис. 8. Допустимые множества для $\gamma = 0,66$.

5. Заключение

В статье предложены два подхода для нахождения множества регуляторов заданной структуры, которые удовлетворяют H_∞ критерию. В первом подходе это множество представлено в пространстве параметров как пересечение допустимых множеств, в то время как во втором подходе с помощью идей D -разбиения можно найти его границу. Оба подхода позволяют получить удобное графическое представление и не требуют трудоемких вычислений. Основное ограничение состоит в том, что рассматриваются только системы с одним входом и одним выходом. Тем не менее,

эти методы работают как в задачах с H_∞ критериями, включающих функции чувствительности, дополнительной чувствительности или чувствительности по входу, так и в задачах стабилизации объекта с частотной неопределенностью. Существенным отличием предложенных подходов является возможность одновременного учета нескольких критериев.

Вследствие доминирования на практике регуляторов низкого порядка полученные результаты представляют собой важный шаг к использованию регуляторов, удовлетворяющих критерию H_∞ , в промышленности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.* Robust control: the parametric approach. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
2. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. *Горовиц И.* Синтез систем с обратной связью. М.: Сов. радио, 1970.
4. *Francis B. A.*, A Course in H_∞ Control Theory, vol. 88 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York, 1987.
5. *Zhou K., Doyle J. C., Glover K.*, Robust and optimal control, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
6. *Åström K. J., Hägglund T.* Advanced PID control, Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, 2006.
7. *Рогач В. Я.* Теория автоматического управления. М.: МЭИ, 2004,
8. *Datta A., Ho M. T., Bhattacharyya S. P.* Structure and Synthesis of PID Controllers, Springer-Verlag, 2002.
9. *Киселев О. Н., Поляк Б. Т.*, Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности, Автоматика и телемеханика, 1999, № 3, 119–130.
10. *Keel L., Bhattacharyya S. P.* Robust, fragile or optimal?// IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 6. P. 1098–1105.
11. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
12. *Gryazina E. N., Polyak B. T.*, Stability regions in the parameter space: D -decomposition revisited, Automatica, vol. 42, no. 1, 2006, pp. 13–26.
13. *Åström K. J., Panagopoulos H., Hägglund T.* Design of PI controllers based on non-convex optimization //Automatica, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 585–601.

14. *Panagopoulos H., Åström K. J., Hägghund T.* Design of PID controllers based on constrained optimization, Proc. of American Control Conference, 1999, pp. 3858–3862.
15. *Panagopoulos H., Åström K. J.* PID control design and H_∞ loop shaping //International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000, vol. 10, no. 15, pp. 1249–1261.
16. *Ho M. T.*, Synthesis of H_∞ PID controllers: a parametric approach//Automatica, 2003, Vol. 39, pp. 1069-1075.
17. *Ho M. T., Lin C. Y.*, PID controller design for robust performance, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 8, 2003, pp. 1404–1409.
18. *Keel L. H., Bhattacharyya S. P.*, H_∞ design with first order controllers, Proc. of the 42nd CDC, 2003, pp. 2282–2287.
19. *Fujisaki Y., Oishi Y., Tempo R.* A mixed probabilistic/deterministic approach to fixed order H_∞ controller design, Proc. of the 45th CDC, 2006.
20. *Horowitz I.* Survey on qualitative feedback theory (QFT)// Intern. J. Control. 1991. No. 53, pp. 255–291.
21. *Blanchini F., Lepschy A., Miani S., Viaro U.* Characterization of PID and lead/lag compensators satisfying given H_∞ specifications// IEEE Trans. Automat. Control. 2004. Vol. 49, No. 5, pp. 736–740.
22. *Тремба А. А.*, Робастное D -разбиение при эллипсоидальной параметрической неопределенности, Автоматика и телемеханика, (принята к печати).