Автоматика и телемеханика, № 11, 2008

Адаптивные и робастные системы

PACS 02.10.Ud

© 2008 г. **М.В. ХЛЕБНИКОВ, канд. физ.-мат. наук,**
П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЛЕММА ПИТЕРСЕНА О МАТРИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предлагаются различные обобщения и уточнения одной леммы о робастной матричной знакоопределенности, результат которой часто привлекается при решении задач квадратичной устойчивости, построении робастно квадратично стабилизирующих регуляторов, в робастной LQR-задаче и др. Одним из основных средств исследования является аппарат линейных матричных неравенств.

1. Введение

В [1] исследовалась следующая модель матричной неопределенности. Рассматривается вещественная симметричная матрица $G \in \mathbb{S}^{n\times n}$ (здесь и далее $\mathbb{S}^{n\times n}$ означает пространство таких матриц размера $n \times n$) и ее возмущение вида

$$G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

где $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$ – возмущающая матрица, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ – постоянные "обрамляющие" матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности. Подчеркнем, что здесь возмущение для симметричной матрицы G задается с помощью матрицы Δ, которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Такая форма задания неопределенности для симметричных матриц естественным образом возникает в задачах, связанных с построением квадратичной функции Ляпунова для динамической системы, матрица которой содержит произвольную, но ограниченную по норме матричную неопределенность Δ. Именно этим фактом прежде всего объясняется многообразие приложений, в которых встречается модель (1). Для такой модели в работе Я. Питерсена [1] было получено необходимое и достаточное условие того, что $G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant 0$ при всех ограниченных по норме возмущениях Δ; будем называть эти условия леммой Питерсена. Везде ниже запись $A \leqslant B$ для матриц означает отрицательную полуопределенность матрицы $A - B$, т.е. $x^{\mathrm{T}}(A - B)x \leqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

В исходной статье [1] обсуждаемая здесь лемма использовалась при решении робастной версии задачи о линейно-квадратичном регуляторе, а в [2, 3] она применялась в синтезе робастного H_∞-управления. В [4,5] этот результат привлекался для построения общей квадратичной функции Ляпунова для интервального матричного семейства; схожая модель неопределенности рассматривалась в [6] при выводе нового вершинного результата о квадратичной устойчивости интервальной системы.

Настоящая статья посвящена развитию и обобщениям леммы Питерсена, при этом основное внимание уделяется связи полученных результатов с линейными матричными неравенствами (LMI) и задачами полуопределенного программирования (SDP). Необходимость в таких обобщениях (на наш взгляд, имеющих, кроме всего прочего, и самостоятельный интерес) возникла у авторов при решении задачи о робастном подавлении внешних ограниченных возмущений в системах, содержащих ограниченную по норме матричную неопределенность (см. [7, 8]). Полученные результаты сформировались в отдельную работу, предварительная версия которой опубликована в [9].

2. Лемма Питерсена

В [1] в качестве вспомогательного решался вопрос о робастной знакоопределенности матрицы G в схеме (1) и был получен следующий результат.

Лемма Питерсена [1]. *Пусть $G = G^{\mathrm{T}}$, $M \neq 0$, $N \neq 0$ – матрицы соответствующих размерностей. Для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\|\Delta\| \leqslant 1$, неравенство*

$$G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant 0 \tag{2}$$

справедливо[1] *тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$G + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N \leqslant 0. \tag{3}$$

В формулировке леммы используется спектральная матричная норма $\|\Delta\| = \max_i \lambda_i^{1/2}(\Delta\Delta^{\mathrm{T}})$, где $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A.

Прежде чем перейти к изложению новых результатов, дадим простое доказательство леммы Питерсена, которое приведем в основном тексте статьи ввиду его значимости.

Доказательство. Пусть

$$G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

для всех $\|\Delta\| \leqslant 1$. Это эквивалентно выполнению

$$x^{\mathrm{T}}Gx + 2x^{\mathrm{T}}M\Delta Nx \leqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\|\Delta\| \leqslant 1$. Положим $x^{\mathrm{T}}M\Delta \doteq y^{\mathrm{T}}$. Тогда предыдущее условие запишется как

$$x^{\mathrm{T}}Gx + 2y^{\mathrm{T}}Nx \leqslant 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^q$ таких, что

$$y^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}M\Delta\Delta^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}x \leqslant x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x.$$

[1] В исходной формулировке леммы в [1] условие $M \neq 0$, $N \neq 0$ отсутствовало, поскольку рассматривалось строгое неравенство (2).

Обозначая

$$z \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q}, \quad A_0 \doteq \begin{pmatrix} G & N^{\mathrm{T}} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad A_1 \doteq \begin{pmatrix} -MM^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

(здесь и далее I и $\mathbf{0}$ – единичная и нулевая матрицы подходящих размерностей), перепишем его в матричном виде: $z^{\mathrm{T}} A_0 z \leqslant 0$ для всех z таких, что $z^{\mathrm{T}} A_1 z \leqslant 0$.

Используя S-процедуру с одним ограничением (например, см. [10]), заключаем, что для выполнения полученного условия необходимо и достаточно существование $\varepsilon \geqslant 0$ такого, что $A_0 \leqslant \varepsilon A_1$, т.е.

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{4}$$

Применяя к этому нестрогому матричному неравенству лемму Шура ([10], с. 257), получаем, что оно эквивалентно

$$G + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N \leqslant 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 1. В приведенном доказательстве существенно использование S-процедуры; это значительно упрощает вывод по сравнению с выкладками в [1], где для доказательства *необходимости* условия (3) требовалось формулировать несколько вспомогательных утверждений о свойствах квадратичных форм. Ниже *достаточность* условия (3) будет доказана отдельно.

Замечание 2. Лемма Питерсена сводит проверку робастности семейства (1) к условию (3), т.е. к простому одномерному поиску. Обратим внимание на то, что эквивалентной формой записи условия (3) является линейное матричное неравенство (4) относительно одной скалярной переменной ε. Такая форма будет неоднократно использоваться в дальнейшем, значительно упрощая вычисления.

3. Радиус матричной знакоопределенности

Лемма Питерсена решает задачу анализа, предоставляя необходимое и достаточное условие робастной знакоопределенности семейства (1) при фиксированном уровне неопределенности. Естественным обобщением этого результата является отыскание максимально допустимого уровня возмущений Δ в (2), сохраняющего знакоопределенность – *радиуса знакоопределенности* семейства

$$G(\Delta, \gamma) = G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}}, \quad \|\Delta\| \leqslant \gamma, \tag{5}$$

определяемого как

$$\gamma_{\max} \doteq \sup \left\{ \gamma \colon G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} < 0 \ \text{ для всех } \ \|\Delta\| \leqslant \gamma \right\},$$

при этом всюду ниже считаем, что $G < 0$.

Кроме того, в этом разделе характеризуем *наихудшее возмущение* $\Delta = \Delta_{cr}$, $\|\Delta_{cr}\| = \gamma_{\max}$, – то, на котором неравенство $G(\Delta, \gamma_{\max}) < 0$ нарушается, т.е. $\lambda_{\max}\left(G(\Delta_{cr}, \gamma_{\max})\right) = 0$.

Прежде, чем сформулировать результат о радиусе знакоопределенности, заметим, что величина $\gamma_{\max}$ равна максимальному значению γ, при котором справедливо

$$G + \gamma \left(M\Delta N + N^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} \right) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \ \|\Delta\| \leqslant 1. \tag{6}$$

С другой стороны, согласно лемме Питерсена выполнение (6) при фиксированном $\gamma > 0$ эквивалентно существованию $\varepsilon > 0$ такого, что

$$G + \gamma\left(\varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N\right) \leqslant 0. \tag{7}$$

Эти выражения будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть λ^* – решение задачи полуопределенного программирования*

$$\min \lambda \quad \textit{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} \lambda G + \varepsilon M M^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ N & -\varepsilon I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{8}$$

относительно двух скалярных переменных ε, λ. Тогда $\gamma_{\max} = 1/\lambda^*$.

Полученный результат сводит нахождение радиуса робастности к задаче полуопределенного программирования, которая легко решается численно с использованием, например, таких пакетов как SeDuMi и Yalmip в среде Matlab.

Теорема 1 дает удобное средство для вычисления радиуса робастности, но не проясняет "физического смысла" входящих величин. Домножим неравенство (7) слева и справа на $(-G)^{-1/2} > 0$ и запишем его в эквивалентной форме:

$$\gamma\left(\varepsilon \widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right) \leqslant I,$$

где обозначено $\widetilde{M} = (-G)^{-1/2}M$, $\widetilde{N} = N(-G)^{-1/2}$; иными словами, без ограничения общности в схеме Питерсена можно рассматривать $G = -I$. Отсюда максимальное значение γ, сохраняющее последнее неравенство при фиксированном ε, равно

$$\gamma_{\max}(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_{\max}\left(\varepsilon \widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right)}, \tag{9}$$

и, максимизируя по $\varepsilon > 0$, получаем

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\min\limits_{\varepsilon>0}\lambda_{\max}\left(\varepsilon \widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right)}; \tag{10}$$

это то максимальное γ, при котором найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено (7). В силу эквивалентности (7) и (6) это и есть радиус робастности. Таким образом, согласно (10) для решения λ^* задачи (8) имеем

$$\lambda^* = \min_{\varepsilon>0}\lambda_{\max}\left(\varepsilon \widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right). \tag{11}$$

Далее, для нахождения наихудшего возмущения домножим теперь неравенство (6) слева и справа на $(-G)^{-1/2} > 0$ и запишем его в эквивалентной форме:

$$\gamma\left(\widetilde{M}\Delta\widetilde{N} + \widetilde{N}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant I \quad \text{для всех} \quad \|\Delta\| \leqslant 1$$

или

$$\gamma\, x^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{M}\Delta\widetilde{N} + \widetilde{N}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right)x \ \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad \|\Delta\| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \text{всех} \quad \|x\| = 1,$$

т.е.

$$2\gamma\, x^{\mathrm{T}}\widetilde{M}\Delta\widetilde{N}x \leqslant 1 \quad \text{при всех} \quad \|\Delta\| \leqslant 1 \quad \text{и всех} \quad \|x\| = 1. \tag{12}$$

Обозначим $a = \widetilde{M}^{\mathrm{T}}x$, $b = \widetilde{N}x$. Нетрудно показать, что для любых векторов a, b и матрицы Δ соответствующих размерностей справедливо

$$\max_{\|\Delta\|\leqslant 1} a^{\mathrm{T}}\Delta b = \|a\|\,\|b\|$$

(здесь матричная норма – спектральная или фробениусова), причем максимум достигается на

$$\Delta^* = \frac{ab^{\mathrm{T}}}{\|a\|\,\|b\|}.$$

Поэтому при фиксированном x максимум по $\|\Delta\| \leqslant 1$ в левой части (12) достигается на матрице ранга один

$$\Delta^*(x) = \frac{\widetilde{M}^{\mathrm{T}}xx^{\mathrm{T}}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}}{\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}x\right\|\,\left\|\widetilde{N}x\right\|}, \tag{13}$$

и этот максимум равен $2\gamma\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}x\right\|\,\left\|\widetilde{N}x\right\|$. Теперь остается взять максимум по $\|x\| = 1$ и получить

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2\max\limits_{\|x\|=1}\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}x\right\|\,\left\|\widetilde{N}x\right\|}, \tag{14}$$

такая форма записи будет использоваться в дальнейшем.

Обозначим через ε^* то значение параметра ε, на котором достигается минимум в (11); тогда λ^* – соответствующее ему максимальное собственное значение, и пусть e – нормированный собственный вектор матрицы $\varepsilon^*\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\varepsilon^*}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}$, отвечающий собственному значению λ^*. Имеем

$$\lambda^* = e^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon^*\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon^*}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right)e = \varepsilon^*\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^*}\left\|\widetilde{N}e\right\|^2 \geqslant 2\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|\,\left\|\widetilde{N}e\right\|,$$

причем равенство достигается при $\varepsilon^* = \left\|\widetilde{N}e\right\| / \left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|$. В соответствии с (13) рассмотрим допустимое возмущение

$$\Delta = \frac{\widetilde{M}^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}}{\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|\,\left\|\widetilde{N}e\right\|}, \quad \|\Delta\| = 1;$$

для него справедливо $-I + \dfrac{1}{\lambda^*}\left(\widetilde{M}\Delta\widetilde{N} + \widetilde{N}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{M}\Delta\widetilde{N} + \widetilde{N}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right)e &= \left(\widetilde{M}\frac{\widetilde{M}^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}}{\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\|\,\|\widetilde{N}e\|}\widetilde{N} + \widetilde{N}^{\mathrm{T}}\frac{\widetilde{N}ee^{\mathrm{T}}\widetilde{M}}{\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\|\,\|\widetilde{N}e\|}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right)e = \\
&= \left(\frac{\|\widetilde{N}e\|}{\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\|}\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\|}{\|\widetilde{N}e\|}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right)e = \\
&= \left(\varepsilon^*\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon^*}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right)e = \\
&= \lambda^* e
\end{aligned}$$

по определению величин ε^*, λ^* и e, что означает

$$\lambda_{\max}\left(-I+\frac{1}{\lambda^*}\left(\widetilde{M}\Delta\widetilde{N}+\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}\right)\right)=0,$$

т.е. указанное возмущение – наихудшее.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть λ^*, ε^* – решения задачи* (8), *тогда*

$$\lambda^*=\lambda_{\max}\left(\varepsilon^*\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon^*}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}\right).$$

Пусть e – собственный вектор матрицы $\varepsilon^*\widetilde{M}\widetilde{M}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon^*}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\widetilde{N}$, отвечающий собственному значению λ^*, тогда наихудшее возмущение равно

$$\Delta_{cr}=\frac{1}{\lambda^*}\frac{\widetilde{M}^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}}{\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|\,\left\|\widetilde{N}e\right\|}, \tag{15}$$

и справедливо соотношение

$$\varepsilon^*=\left\|\widetilde{N}e\right\|/\left\|\widetilde{M}^{\mathrm{T}}e\right\|. \tag{16}$$

Величина $\gamma_{\max}$ может вычисляться исходя из других соображений – с использованием понятия граничного оракула (см. [11]). Действительно, неравенство (7) можно рассматривать как определение области отрицательной полуопределенности матричного семейства $W(\gamma,\varepsilon)=G+\gamma\left(\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N\right)$ в пространстве параметров γ,ε (при ограничениях $\gamma,\varepsilon>0$). При любом фиксированном $\varepsilon>0$ имеем $W(0,\varepsilon)=G<0$, и минимальное $\gamma>0$, при котором знакоопределенность $W(\gamma,\varepsilon)$ теряется, равно минимальному обобщенному собственному значению (все они положительны) (см. лемму 1 в [11]):

$$\gamma(\varepsilon)=\min_i\lambda_i\left(G,-\left(\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N\right)\right). \tag{17}$$

Напомним, что число λ и вектор e называются обобщенным собственным значением и соответствующим ему обобщенным собственным вектором пары матриц A и B, если $Ae=\lambda Be$.

Оптимизируя (17) по ε, получаем

$$\gamma_{\max}=\max_{\varepsilon>0}\lambda_{\min}\left(G,-\left(\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N\right)\right); \tag{18}$$

это наибольшее из всех γ, для которых существует такое $\varepsilon>0$, что матрица (7) отрицательно полуопределена.

Соответственно результаты теоремы 2 могут быть сформулированы в терминах обобщенных собственных значений. Именно:

$$\gamma_{\max}=\lambda_{\min}\left(G,-\left(\varepsilon^*MM^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon^*}N^{\mathrm{T}}N\right)\right)\doteq\lambda^*_{\min},$$

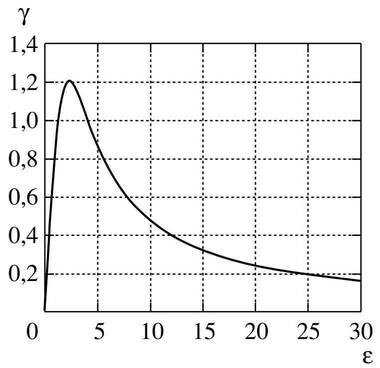

Рис. 1. Вычисление радиуса робастности в схеме Питерсена.

и если e – обобщенный собственный вектор, отвечающий указанному обобщенному собственному значению, то наихудшее возмущение равно $\Delta_{cr} = \dfrac{\lambda^*_{\min} M^{\mathrm{T}} e e^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}}{\|M^{\mathrm{T}} e\| \, \|Ne\|}$ и справедливо соотношение $\varepsilon^* = \dfrac{\|Ne\|}{\|M^{\mathrm{T}} e\|}$.

Отметим еще, что поскольку $G < 0$ (невырождена), то можно искать обычные (не обобщенные) собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ матрицы $G^{-1}\left(\varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N\right)$ и выбирать из них минимальное (все они неположительны). Тогда $\gamma(\varepsilon) = -1/\lambda_{\min}(\varepsilon)$ и $\gamma_{\max} = \max\limits_{\varepsilon>0} \gamma(\varepsilon)$.

Приемы, использованные для вывода формул (10) и (18), будут применяться ниже. Небольшой недостаток этих формул состоит в том, что интервал $(0,\ \overline{\varepsilon}]$ варьирования параметра ε заранее неизвестен.

Пример 1. Рассмотрим $G = -\mathrm{diag}\,(1\ \ 2\ \ 3)$ и квадратные M, N вида

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}1822 & 0{,}0450 & 0{,}3062 \\ -0{,}2952 & 0{,}3110 & 0{,}1072 \\ -0{,}3844 & -0{,}1084 & -0{,}2866 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} -0{,}3328 & 0{,}4952 & -0{,}6984 \\ 0{,}3360 & 0{,}2248 & -0{,}4464 \\ 0{,}7896 & 0{,}6108 & -0{,}2980 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 изображена кривая $\gamma(\varepsilon)$ (17), которая вместе с прямой $\gamma = 0$ ограничивает область отрицательной определенности семейства $G + \gamma\left(\varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N\right)$, $\gamma, \varepsilon > 0$. График функции $\gamma(\varepsilon)$, разумеется, совпадает с $\gamma_{\max}(\varepsilon)$ (9); максимальное значение по всем $\varepsilon > 0$ равно 1,2044. Решение задачи (8) дает то же значение $\gamma_{\max} = 1{,}2044$.

4. Радиус невырожденности

Следующее обобщение леммы Питерсена относится к отысканию *радиуса невырожденности* в задаче (6), когда матрица G симметрична, но незнакоопределена. Рассуждения, аналогичные использовавшимся в предыдущем разделе, приводят к следующему результату, который сформулируем в терминах обобщенных собственных значений.

Теорема 3. Пусть $G \in \mathbb{S}^{n\times n}$ и невырождена; тогда радиус невырожденности

$$\rho(G, M, N) \doteq \sup\left\{\|\Delta\| \colon G + M\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} \quad \textit{невырождена}\right\}$$

равен

$$(19) \qquad \rho(G,M,N) = \max_{\varepsilon>0}\min_i |\lambda_i(\varepsilon)|,$$

где

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i\left(G, -\left(\varepsilon M M^{\mathrm T} + \frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm T}N\right)\right)$$

– обобщенные собственные значения пары матриц G *и* $-\left(\varepsilon M M^{\mathrm T} + \frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm T}N\right)$. *При этом наихудшее возмущение*

$$\Delta_{cr} = \overline{\lambda}\frac{M^{\mathrm T}ee^{\mathrm T}N^{\mathrm T}}{\|M^{\mathrm T}e\|\,\|Ne\|},$$

где $\overline{\lambda}$ *– то обобщенное собственное значение, на котором достигается оптимум в* (19), *а* e *– соответствующий ему обобщенный собственный вектор.*

Заметим, что отличие (19) от формулы (18) для радиуса знакоопределенности заключается лишь в наличии знака модуля для собственных значений. Этот результат ожидаем, так как в этом случае невырожденность теряется на "ближайшем к нулю" собственном значении.

Теорема 3 является обобщением леммы Питерсена на случай симметричных, но незнакоопределенных матриц – при $G < 0$ получаем теорему 1. С другой стороны, для специального случая, когда обрамляющие матрицы в (2) отсутствуют ($M = N = I$), а возмущение Δ предполагается симметричной матрицей, известен следующий результат о *симметрическом* радиусе невырожденности.

Лемма [11]. *Для невырожденной матрицы* $G \in \mathbb{S}^{n\times n}$ *симметрический радиус невырожденности*

$$\rho(G) \doteq \sup\left\{\|\Delta\|\colon \Delta\in\mathbb{S}^{n\times n}, \quad G+\Delta \ \ \text{невырождена}\right\}$$

равен

$$\rho(G) = 1/\|G^{-1}\| = \min_i |\lambda_i(G)|.$$

При этом критическое значение Δ *равно* $\Delta_{cr} = -\lambda ee^{\mathrm T}$, *где* λ *– минимальное по абсолютной величине собственное значение* G, *а* e *– отвечающий ему собственный вектор.*

Таким образом, теорема 3 является обобщением этого результата на более общую схему неопределенности (2). При $M = N = I$ получаем $G + (\Delta + \Delta^{\mathrm T})/2$ и, обозначая $\Delta_1 = (\Delta+\Delta^{\mathrm T})/2 \in \mathbb{S}^{n\times n}$, оказываемся в условиях приведенной выше леммы; при этом $\rho(G) = 2\rho(G,I,I)$.

5. Несколько неопределенностей

Результаты этого раздела относятся к анализу леммы Питерсена в случае нескольких неопределенностей. Рассматриваем в (6) $\ell > 1$ независимых возмущений $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p_i\times q_i}$; матрицы M_i, N_i имеют размерности $n\times p_i$ и $q_i\times n$ соответственно. Задача заключается в проверке условия

$$(20) \qquad G + \sum_{i=1}^{\ell}\left(M_i\Delta_i N_i + N_i^{\mathrm T}\Delta_i^{\mathrm T}M_i^{\mathrm T}\right) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \ \|\Delta_i\| \leqslant \gamma, \quad i = 1,\ldots,\ell,$$

для заданного уровня γ и нахождении радиуса робастности $\gamma_{\max}$ – максимального значения γ, при котором (20) остается справедливым. Ясно, что размах γ можно считать общим для всех Δ_i, вводя скалярный масштабный множитель в матрицы M_i (или N_i).

Результат леммы Питерсена в этом случае оказывается верным лишь в части достаточности.

Т е о р е м а 4. *Для данного $\gamma > 0$ условие* (20) *выполнено, если существуют положительные $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$ такие, что*

$$G + \gamma \sum_{i=1}^{\ell} \left(\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i \right) \leqslant 0. \tag{21}$$

Максимальное значение γ, при котором (21) *выполнено при некоторых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell >$ > 0, равно $\gamma_{est} = 1/\lambda^*$, где λ^* – решение задачи полуопределенного программирования*

$$\min \lambda \quad \textit{при} \quad \begin{pmatrix} \lambda G + \sum\limits_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} & N_1^{\mathrm{T}} & \ldots & N_\ell^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ N_1 & -\varepsilon_1 I & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \\ N_\ell & & & -\varepsilon_\ell I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{22}$$

относительно скалярных переменных $\lambda, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$.

Теорема 4 дает простой способ вычисления нижней оценки γ_{est} для радиуса робастности $\gamma_{\max}$ в случае нескольких неопределенностей – сведе́нием к задаче полуопределенного программирования. Ниже обсудим вопрос точности этой оценки.

5.1. Специальные случаи

Тот факт, что (21) является лишь достаточным условием выполнения (20), объясняется ущербностью S-процедуры для $\ell \geqslant 2$ ограничений [10]. В некоторых частных случаях это препятствие можно обойти.

Первый такой случай – когда все входящие величины определены над полем комплексных чисел. Тогда, как известно [12], S-процедура неущербна для двух ограничений, и лемма Питерсена дает *необходимое и достаточное* условие робастной знакоопределенности при наличии $\ell = 2$ независимых возмущений.

Второй случай относится к ситуации, когда в (20) на возмущения наложены более жесткие ограничения. Именно: обозначим через $\Delta = (\Delta_1 \, \ldots \, \Delta_\ell)$ составную матрицу размера $p \times \widehat{q}$, где $\widehat{q} = \sum\limits_{i=1}^{\ell} q_i$, и считаем выполненным совместное ограничение $\|\Delta\| \leqslant 1$. Кроме того предположим, что $M_i \equiv M$. Тогда имеем следующий результат.

Л е м м а 1. *Пусть в схеме* (20) $M_1 = \ldots = M_\ell = M$. *Тогда*

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} \left(M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}} \right) \leqslant 0 \quad \forall \quad \Delta_i \colon \; \|(\Delta_1 \quad \ldots \quad \Delta_\ell)\| \leqslant 1$$

тогда и только тогда, когда найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$G + \varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\ell} N_i^{\mathrm{T}} N_i \leqslant 0.$$

Очевидно, аналогичное утверждение справедливо для случая $N_1 = \ldots = N_\ell = N$.

5.2. *Точность оценки* γ_{est}

В [4] было, по существу, предложено обобщение леммы Питерсена: выполнение (20) эквивалентно существованию положительных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$ таких, что выполнено (21). Позже в доказательстве была найдена ошибка, и в работе [5] тех же авторов приведен численный контрпример, показывающий лишь достаточность условия (21) для робастной знакоопределенности семейства (20); полученные значения составляли $\gamma_{\max} \approx 2{,}696$ и $\gamma_{est} \approx 2{,}663$. Построим содержательный контрпример, в котором разница более ощутима.

Поскольку в (20) возмущения Δ_i независимы, то, действуя как при выводе формулы (14), получаем

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2 \max\limits_{\|x\|=1} \sum\limits_{i=1}^{\ell} \left\| \widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} x \right\| \left\| \widetilde{N}_i x \right\|}, \tag{23}$$

а для величины γ_{est} аналогично (10) имеем

$$\gamma_{est} = \frac{1}{\min\limits_{\varepsilon_i > 0} \lambda_{\max} \left(\sum\limits_{i=1}^{\ell} \left(\varepsilon_i \widetilde{M}_i \widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} \widetilde{N}_i^{\mathrm{T}} \widetilde{N}_i \right) \right)}, \tag{24}$$

где, как и выше, обозначено $\widetilde{M} = (-G)^{-1/2} M$, $\widetilde{N} = N(-G)^{-1/2}$. Укажем конкретные G, M_i, N_i, для которых $\gamma_{est} < \gamma_{\max}$.

П р и м е р 2. Как и в [4, 5], рассмотрим случай двух *скалярных* неопределенностей $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$, тогда матрицы M_1, M_2 есть векторы-столбцы, а матрицы N_1, N_2 – векторы-строки, и возьмем $G = -I$; тогда формулы (23) и (24) принимают вид:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2 \max\limits_{\|x\|=1} \left(|M_1^{\mathrm{T}} x| \, |N_1 x| + |M_2^{\mathrm{T}} x| \, |N_2 x| \right)}, \tag{25}$$

$$\gamma_{est} = \frac{1}{\min\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \lambda_{\max} \left(\varepsilon_1 M_1 M_1^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_1} N_1^{\mathrm{T}} N_1 + \varepsilon_2 M_2 M_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_2} N_2^{\mathrm{T}} N_2 \right)}. \tag{26}$$

Возьмем следующие числовые значения коэффициентов:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что векторы M_1, N_1^{T} и M_2, N_2^{T} нормированы, попарно ортогональны, и угол между парами составляет $\pi/4$.

Для знаменателя в (25) имеем $2 \max\limits_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \left(|x_1 x_2| + \dfrac{1}{2} |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \right)$ и, представляя $x_1 = \cos\,\alpha$, $x_2 = \sin\,\alpha$, элементарными преобразованиями получаем $\max\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} (|\sin 2\alpha| + |\cos 2\alpha|)$, что равно $\sqrt{2}$, откуда

$$\gamma_{\max} = \sqrt{2}/2.$$

В этом примере с двумя скалярными неопределенностями радиус робастности можно найти иным способом. Неопределенная матрица (20) в данном случае записывается как

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \Delta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Delta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

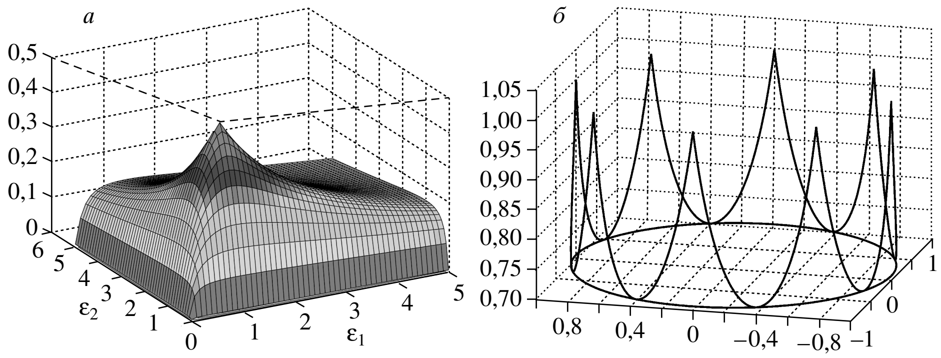

Рис. 2. Вычисление величин $\gamma_{\max}, \gamma_{est}$ при двух неопределенностях по формулам (23) и (24).

и для нее несложно найти *всю область* знакоопределенности на плоскости параметров Δ_1, Δ_2, – это единичный круг $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \leqslant 1$ (например см. [11]), а искомое $\gamma_{\max}$ определяется стороной максимального вписанного в него квадрата и равно $\sqrt{2}/2$.

Теперь посчитаем γ_{est} (26). Матрица в знаменателе (26) имеет вид

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2 + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2 - \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2 - \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right) & \varepsilon_1 + \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2 + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right) \end{pmatrix},$$

характеристический полином которой

$$\lambda^2 - \left[\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right]\lambda + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) + 2,$$

а максимальное собственное значение равно

$$\lambda_{\max}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)^2 - 8}.$$

Видим, что минимальное значение $\lambda_{\max}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ достигается при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и равно 2, так что

$$\gamma_{est} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На рис. 2,*а* изображен график функции

$$\gamma_{est}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\lambda_{\max}\left(W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\right)},$$

построенный с шагом 0,01 по $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; максимальное значение равно 1/2. На рис. 2,*б* приведен график функции

$$\gamma_{\max}(x) = \frac{1}{2\left(|M_1^{\mathrm{T}} x|\,|N_1 x| + |M_2^{\mathrm{T}} x|\,|N_2 x|\right)}$$

для x на единичной окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$; минимальное значение равно $\sqrt{2}/2$.

Аналогичные примеры, в которых $\gamma_{est} < \gamma_{\max}$, несложно построить для $\ell > 2$ скалярных неопределенностей, например, выбирая двумерные векторы в виде

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos(\omega + (i-1)\delta) \\ \sin(\omega + (i-1)\delta) \end{pmatrix},$$
$$N_i = \begin{pmatrix} \sin(\omega + (i-1)\delta) & -\cos(\omega + (i-1)\delta) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, \ell, \ \delta = \pi/2\ell,$$

где ω произвольно. С другой стороны, просто построить и примеры, в которых $\gamma_{est} \approx \approx \gamma_{\max}$; при этом величину $\gamma_{\max}$ можно вычислять с помощью (23) на сетке.

В настоящий момент в общем случае не удается ответить на вопрос о том, насколько грубой может быть оценка γ_{est}, т.е. каково максимальное значение отношения $\gamma_{\max}/\gamma_{est}$ по всем M_i, N_i при фиксированных ℓ и размерностях $\dim M_i$, $\dim N_i$.

Проанализировать качество оценки γ_{est} можно следующим образом. Поскольку возмущения Δ_i варьируются независимо друг от друга, то нетрудно видеть, что имеют место аналогичные (16) соотношения для оптимальных ε_i^* – решений задачи (22) для ε_i. Именно: $\varepsilon_i^* = \left\|\widetilde{N}_i e\right\| / \left\|\widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} e\right\|$, где e – собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению λ^* матрицы $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \left(\varepsilon_i^* \widetilde{M}_i \widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\varepsilon_i^*} \widetilde{N}_i^{\mathrm{T}} \widetilde{N}_i\right)$. Поэтому по аналогии с (15) в качестве кандидатов на наихудшие возмущения рассмотрим

$$\Delta_{cr,i} = \gamma_{est} \frac{\widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} e e^{\mathrm{T}} \widetilde{N}_i^{\mathrm{T}}}{\left\|\widetilde{M}_i^{\mathrm{T}} e\right\| \left\|\widetilde{N}_i e\right\|}, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Тогда если

$$\lambda_{\max}\left(G + \sum_{i=1}^{\ell} \left(M_i \Delta_{cr,i} N_i + N_i^{\mathrm{T}} \Delta_{cr,i}^{\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}}\right)\right) \approx 0,$$

то $\gamma_{\max} \approx \gamma_{est}$.

5.3. Скалярные возмущения

Этот случай соответствует задаче о робастной устойчивости интервальной симметричной матрицы $A + \gamma\Delta$, где $A = A^{\mathrm{T}} < 0$, $\Delta = \Delta^{\mathrm{T}}$, $|\Delta_{ij}| \leqslant r_{ij}$. Теорема 2 из [13] сводит эту задачу к проверке отрицательной определенности 2^{n-1} матриц $G + \gamma S_i R S_i$, где $R = (r_{ij})$ – симметричная матрица из положительных чисел r_{ij}, а $S_i = \operatorname{diag}(1, s_1, \ldots, s_{n-1})$, где $s_j = \pm 1$. При очень больших n решение затруднено – матрица ограничений в соответствующей задаче SDP имеет порядок $n 2^{n-1}$. Вместо этого теорема 4 предлагает очень просто вычисляемую оценку – как решение задачи SDP с $n(n+1)/2 + 1$ скалярными переменными и матрицей LMI-ограничений размерности $n + n(n+1)/2 + 1$.

Как говорилось выше, аналитически качество оценки γ_{est} не удается характеризовать сколько-нибудь удовлетворительно. Даже для случая скалярных неопределенностей удается получить лишь очевидную очень грубую оценку $\gamma_{est}/\gamma_{\max} \leqslant \ell$. Однако как показывает моделирование, “в среднем” фактическая величина γ_{est} незначительно отличается от $\gamma_{\max}$. Так, для 100 000 случайно сгенерированных 4×4 интервальных матриц ($\ell = 10$ независимых скалярных неопределенностей в схеме Питерсена) максимальное отличие составляло $\gamma_{\max}/\gamma_{est} \approx 1{,}15$, а в 95% случаев оно не превышало 1,01.

6. Заключение

В работе получены некоторые результаты, полезные как для понимания природы рассматриваемого критерия робастной знакоопределенности, так и для вычисления радиуса робастности или его оценки. К таким результатам относятся простое содержательное доказательство леммы Питерсена, LMI-форма условия робастности, а также задача полуопределенного программирования, к которой сводится нахождение радиуса робастности или его оценки γ_{est} для случая многих неопределенностей. Численные эксперименты свидетельствуют в пользу высокой точности этой оценки для случая многих скалярных возмущений, однако представляется важным получить аналитическое выражение для качества γ_{est}.

Авторы признательны Б.Т. Поляку за интерес к работе и плодотворные обсуждения, а также анонимному рецензенту за указание на ошибочность некоторых результатов, приведенных в первоначальной версии статьи, и на возможность обобщения леммы Питерсена на комплексный случай (подраздел 5.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Запишем условие (7) как

$$\frac{1}{\gamma}G + \varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N \leqslant 0$$

или в блочном виде, используя лемму Шура:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}G + \varepsilon M M^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Обозначим $\lambda = 1/\gamma$ и, поскольку ищем $\gamma > 0$, добавим это условие, расширив матрицу:

$$\text{(П.1)} \qquad \begin{pmatrix} \lambda G + \varepsilon M M^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ N & -\varepsilon I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Отрицательная полуопределенность исходной матрицы (7) при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ эквивалентна разрешимости линейного матричного неравенства (П.1) относительно ε, λ. Решая задачу полуопределенного программирования

$$\text{(П.2)} \qquad \min \lambda \quad \text{при ограничениях} \quad \text{(П.1)},$$

получаем искомое максимальное значение $\gamma_{\max} = 1/\lambda^*$, где λ^* – решение задачи (П.2).

Доказательство теоремы 4. Составим блочные матрицы

$$E(\varepsilon_i) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I/\varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad D_i(\Delta_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Delta_i \\ \Delta_i^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad L_i = \begin{pmatrix} M_i^{\mathrm{T}} \\ N_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, \ell,$$

блочно-диагональные матрицы

$$E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell) = E(\varepsilon) = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1) & & \\ & \ddots & \\ & & E(\varepsilon_\ell) \end{pmatrix}, \quad D(\Delta) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_1 \end{pmatrix}$$

и блочную матрицу

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_\ell \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях (20) запишется как

$$G + L^{\mathrm{T}} D(\Delta) L \leqslant 0, \tag{П.3}$$

а матрица в (21) – как

$$G + \gamma L^{\mathrm{T}} E(\varepsilon) L \doteq W(\gamma, \varepsilon).$$

Пусть при данном γ существуют $\varepsilon_i > 0$ такие, что $W(\gamma, \varepsilon) \leqslant 0$; покажем, что (П.3) выполнено при всех $\|\Delta_i\| \leqslant \gamma$. Имеем

$$W(\gamma, \varepsilon) - \big(G + L^{\mathrm{T}} D(\Delta) L\big) = L^{\mathrm{T}} \left(\gamma E(\varepsilon) - D(\Delta)\right) L,$$

и блочно-диагональная $\gamma E(\varepsilon) - D(\Delta)$ положительно определена при всех $\|\Delta_i\| \leqslant \gamma$ тогда и только тогда, когда положительно определены блоки, т.е.

$$\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_i I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I/\varepsilon_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Delta_i \\ \Delta_i^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \geqslant 0 \text{ для всех } \Delta_i \Delta_i^{\mathrm{T}} \leqslant \gamma^2 I, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Применяя лемму Шура к последнему соотношению, убеждаемся в его справедливости.

Вычисление величины γ_{est} сводится к задаче полуопределенного программирования (22) аналогично теореме 1.

Доказательство леммы 1. Имеем следующую запись:

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} \left(M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= G + M \left(\Delta_1 \ldots \Delta_\ell\right) \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_\ell \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\Delta_1 \ldots \Delta_\ell\right)^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}}.$$

Обозначая $\widehat{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\widehat{q} \times n}$, приходим к обычной схеме Питерсена $G + M\Delta\widehat{N} + \widehat{N}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
2. *Xie L.* Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty // Int. J. Control. 1996. V. 63. P. 741–750.
3. *Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H^∞ control theory // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. 35. № 3. P. 356–361.

4. *Mao W.-J., Chu J.* Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. V. 48. № 6. P. 1007–1012.
5. *Mao W.-J., Chu J.* Correction to "Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems" // IEEE Trans. Automat. Control. 2006. V. 51. № 8. P. 1404–1405.
6. *Alamo T., Tempo R., Ramirez D.R., Camacho E.F.* A new vertex result for robustness problems with interval matrix uncertainty // Proc. Eur. Control Conf., Kos, Greece, 2007. Paper ThC07.3.
7. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant ellipsoids approach to robust rejection of persistent disturbances // Proc. 17th World Congr. IFAC, Seoul, Jul. 6–11, 2008. P. 3976–3981.
8. *Polyak B.T., Topunov M.V., Shcherbakov P.S.* Robust rejection of exogenous disturbances via invariant ellipsoid technique // Proc. XIV Int. Workshop on Dynamics and Control, Zvenigorod, Russia, May 28 – June 2, 2007. P. 59.
9. *Topunov M.V., Shcherbakov P.S.* Ramifications of Petersen's lemma on uncertain matrices // Proc. XIV Int. Workshop on Dynamics and Control, Zvenigorod, Russia, May 28 – June 2, 2007. P. 66.
10. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
11. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 11. С. 159–174.
12. *Brickman L.* On the field of values of a matrix // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. № 12. P. 61–66.
13. *Rohn J.* Positive definiteness and stability of interval matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. № 1. P. 175–184.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 09.07.2007