Автоматика и телемеханика, № 1, 2009

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. **М.В. ХЛЕБНИКОВ, канд. физ.-мат. наук**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РОБАСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕСЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи робастной фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов; применение этой концепции позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации, легко решающихся численно. В равном объеме рассмотрен как непрерывный, так и дискретный вариант задачи. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного маятника.

1. Введение

Задача фильтрации (т.е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить *гарантированные* (а не вероятностные) оценки состояний. Такой подход был предложен в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века в работах американских ученых Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе [1]. Примерно в это же время подобные проблемы разрабатывались в семинаре Н.Н. Красовского такими исследователями как А.Б. Куржанский, А.И. Субботин, Ю.С. Осипов и другие, см. [2]. Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф.И. Черноусько [3]. В частности, в [1–3] была развита *эллипсоидальная* техника фильтрации. Обзор результатов в этой области можно найти в [4–8].

В [9] рассматривалась проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями, однако лишь для *стационарных* задач, когда все параметры модели не зависят от времени. Более того, искалась оценка состояния, такая что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид (*инвариантный эллипсоид*) для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной. Сам фильтр также искался в классе линейных стационарных фильтров. В этом суженном классе задач и оценок проблема оказалась полностью разрешимой, т.е. удалось построить *оптимальный* фильтр и оценку состояния. Этим данная постановка задачи отличается от упомянутых выше; там рассматривались более общие модели, однако получаемое решение было лишь субоптимальным, а равномерность оценок не имела места. С технической точки зрения в [9] применен аппарат линейных матричных неравенств [10, 11], который хорошо зарекомендовал себя в анализе и синтезе систем управления, но не очень широко применялся в задачах фильтрации.

Настоящая статья является продолжением работы [9]. В ней проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями рассматривается для системы с матричными ограниченными в норме неопределенностями. В равном объеме рассмотрен как непрерывный, так и дискретный вариант задачи.

2. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A(t))\, x + (D_1 + \Delta D_1(t))\, w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешние возмущения, удовлетворяющие ограничению[1]

$$\|w(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2}$$

а

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= F_A \Delta_A(t) H_A, \\ \Delta D_1(t) &= F_{D_1} \Delta_{D_1}(t) H_{D_1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где F_A, F_{D_1}, H_A, H_{D_1} – постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_A(t)$ и $\Delta_{D_1}(t)$ удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta(t)\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta(t)\|_F \leqslant 1 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4}$$

Таким образом, рассматриваются L_∞-ограниченные внешние возмущения. Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что матрица A гурвицева – действительные части ее собственных значений отрицательны, пара (A, D_1) управляема, а C – матрица максимального ранга; кроме того, будем полагать, что $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния $\widehat{x}$, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + F(y - C\widehat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}. \tag{5}$$

Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее – он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица F. Эта структура такая же, как в известном *наблюдателе Люенбергера*. Введем в рассмотрение *невязку* $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, она характеризует собой точность фильтрации; согласно (1), (5) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC)e + \Delta A x + (D_1 + \Delta D_1 - FD_2)w. \tag{6}$$

Таким образом, приходим к системе

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D_1 + \Delta D_1)w, \\ \dot{e} &= \Delta A x + (A - FC)e + (D_1 + \Delta D_1 - FD_2)w. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

[1] Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма матрицы, I – единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку e. Идеология инвариантных эллипсоидов для задач анализа и синтеза систем управления применялась в [10, 12–14]. Здесь она используется для задач фильтрации. Несколько изменим стандартное определение, чтобы включить случай больших начальных уклонений. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E} = \left\{ e \in \mathbb{R}^n : \quad e^{\mathrm{T}} P^{-1} e \leqslant 1 \right\}, \quad P > 0, \tag{8}$$

называется *инвариантным* для динамической системы (6), если:

1) из условия $e(0) \in \mathcal{E}$ (малые уклонения) следует $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$;

2) при $e(0) \notin \mathcal{E}$ (большие уклонения) будет $e(t) \to \mathcal{E}$, $t \to \infty$ (при этом, возможно, $e(t) \in \mathcal{E}$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$). Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых уклонениях и равномерная по t) точность фильтрации.

Прежде всего отметим, что из условия управляемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида. Инвариантных эллипсоидов много, цель работы – при фиксированном стабилизирующем F найти минимальный из них, а затем добиться минимума этого эллипсоида по F. Минимальность можно понимать в разных смыслах, здесь будем считать тот эллипсоид *минимальным*, у которого сумма квадратов полуосей наименьшая, т.е. такой, для которого след матрицы P минимален. Другие критерии будут упомянуты ниже.

Пусть $g = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + \Delta A & 0 \\ \Delta A & A - FC \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 + \Delta D_1 \\ D_1 + \Delta D_1 - F D_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w. \tag{9}$$

Поступим следующим образом: заключим g в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид, порожденный матрицей P_2.

Т е о р е м а 1. *Решение $\widehat{Q}_2$ и $\widehat{Y}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr} H \to \min$$

при ограничениях

(10)

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ 0 & A^{\mathrm{T}} Q_2 + Q_2 A - YC - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_1 & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^{\mathrm{T}} H_{D_1} & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} Q_1 & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_1 & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{11}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$ и $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и числовому параметру $\alpha > 0$, определяет матрицу $\widehat{P}_2 = \widehat{Q}_2^{-1}$ минимального ограничивающего эллипсоида, а также соответствующую этому эллипсоиду матрицу наблюдателя

$$\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Отметим, что при фиксированном α данная задача сводится к минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой линейные матричные неравенства, т.е. к задаче полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming, SDP*), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации. Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности SeDuMi Toolbox, YALMIP Toolbox, а также LMI Toolbox системы MATLAB [15]. Одномерная минимизация по α всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта остается открытой задачей.

3. Дискретный случай

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k + (D_1 + \Delta D_{1k})w_k, \\ y_k = Cx_k + D_2 w_k, \end{array} \right. \tag{12}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным во все моменты времени:

$$\|w_k\| \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а

$$\begin{array}{l} \Delta A_k = F_A \Delta_{A\,k} H_A, \\ \Delta D_{1\,k} = F_{D_1} \Delta_{D_1\,k} H_{D_1}, \end{array} \tag{13}$$

где F_A, F_{D_1}, H_A, H_{D_1} – постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности $\Delta_{A\,k}$ и $\Delta_{D_1\,k}$ удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta_k\| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta_k\|_F \leqslant 1 \quad \forall k = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Таким образом, рассматриваются l_∞-ограниченные внешние возмущения. Будем полагать, что система (12) устойчива (т.е. матрица A шуровская – ее собственные значения лежат внутри единичного круга), пара (A, D_1) управляема, а C – матрица максимального ранга. Кроме того, будем полагать, что $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Построим фильтр, описываемый линейным уравнением с постоянной матрицей F относительно оценки состояния $\widehat{x}_k$:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + F(y_k - C\widehat{x}_k), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}. \tag{15}$$

Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее – он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица F. Эта структура такая же, как в известном *наблюдателе Люенбергера*. Введем в рассмотрение *невязку*

$e_k = x_k - \widehat{x}_k$, она характеризует собой точность фильтрации; согласно (12), (15) она будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - FC)e_k + \Delta A_k x_k + (D_1 + \Delta D_{1k} - FD_2)w_k. \tag{16}$$

Таким образом, приходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k + (D_1 + \Delta D_{1k})w_k, \\ e_{k+1} = (A - FC)e_k + \Delta A_k x_k + (D_1 + \Delta D_{1k} - FD_2)w_k. \end{array} \right. \tag{17}$$

Задача состоит в нахождении минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку e. Определение инвариантного эллипсоида остается по существу таким же, как и в непрерывном случае: эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ e_k \in \mathbb{R}^n : \quad e_k^{\mathrm{T}} P^{-1} e_k \leqslant 1 \right\}, \quad P > 0, \tag{18}$$

называется инвариантным для дискретной системы (16), если из условия $e_0 \in \mathcal{E}$ (малые уклонения) следует выполнение условия $e_k \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \ldots$, а из $e_0 \notin \mathcal{E}$ (большие уклонения) следует $e_k \to \mathcal{E}, k \to \infty$.

Пусть $g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix}$ является решением разностного уравнения

$$g_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + \Delta A_k & 0 \\ \Delta A_k & A - FC \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g_k + \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 + \Delta D_{1k} \\ D_1 + \Delta D_{1k} - FD_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w_k. \tag{19}$$

Поступим следующим образом: заключим g_k в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид, порожденный матрицей P_2.

Теорема 2. Решение $\widehat{Q}_2$ и $\widehat{Y}$ задачи минимизации

$$\operatorname{tr} H \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -Q_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 A & 0 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ 0 & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & 0 & Q_2 A - Y C & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_1 & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I + \varepsilon_2 H_{D_1}^{\mathrm{T}} H_{D_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}} Q_1 & 0 & 0 & -\alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} Q_2 - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} Q_1 & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_1 & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{21}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и числовому параметру

$0 < \alpha < 1$, *определяет матрицу* $\widehat{P}_2 = \widehat{Q}_2^{-1}$ *минимального ограничивающего эллипсоида, а также соответствующую этому эллипсоиду матрицу наблюдателя*

$$\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

4. Возможные обобщения

В некоторых случаях имеется *априорная информация о начальном состоянии* системы $x(0) \in E_0$, где $E_0 = \{x : x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\}$. Тогда, выбирая $\widehat{x}(0) = 0$, можно гарантировать, что $e(0) \in E_0$. Если потребовать, чтобы $E_0 \subset \mathcal{E}$, то можно гарантировать, что $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех t. Итак, если к системе линейных матричных неравенств в теореме 1 (или 2) добавить еще одно $Q \leqslant P_0^{-1}$, то получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности фильтрации.

Нередко нужно оценивать качество фильтрации *не всех координат* состояния x, а лишь некоторых. Пусть имеется выход $y_1 = C_1 x$ (например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки $e_1 = y_1 - \widehat{y}_1 = C_1(x - \widehat{x})$ возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации $\operatorname{tr} C_1 P C_1^{\mathrm{T}}$ вместо $\operatorname{tr} P$, что легко может быть записано в форме, аналогичной теоремам 1 и 2.

Отметим также, что можно воспользоваться и *иными критериями оптимальности* вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, можно минимизировать L_∞ норму невязки (как это сделано в [12]), т.е. радиус шара, содержащего эллипсоид $\mathcal{E}$. Для этого потребуем $r \to \max$ при дополнительном ограничении $Q \geqslant rI$.

5. Примеры

1. Продемонстрируем предложенный подход к робастной фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния *двойного пружинного маятника*, движущегося в вязкой среде. Вектор состояния системы выберем в форме $x = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} & x_2^{\mathrm{T}} & v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, где x_1, x_2 – координаты “левого” и “правого” грузика, а v_1, v_2 – их скорости. Пусть наблюдаемый выход системы имеет вид $y = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} & x_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а минимизируемый выход равен $y_1 = \begin{pmatrix} v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Будем полагать, что на скорости левого и правого грузиков влияет внешнее возмущение $w = \begin{pmatrix} w_1^{\mathrm{T}} & w_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{pmatrix} w,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Случай, когда параметры системы единичны, коэффициент сопротивления среды равен 0,2, а неопределенность заключена в коэффициенте жесткости левой пружины системы:

$$k_1 = 1 + \delta\Delta(t), \quad \delta = \mathrm{const}\,,$$

приводит к системе

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (A + F_A\Delta(t)H_A)\,x + Dw,\\ &y = Cx, \end{aligned}$$

с матричной неопределенностью $\Delta(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -0{,}2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -\delta\\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_A = (\ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ).$$

Полагая $P_0 = 0{,}01I$, $\delta = 0{,}03$, воспользовавшись теоремой 1 и минимизируя по α, находим матрицы фильтра

$$\widehat{F} \approx \begin{pmatrix} 42{,}5872 & 0{,}2432\\ 0{,}1613 & 53{,}4678\\ 389{,}2948 & 26{,}7180\\ 24{,}3808 & 839{,}3557 \end{pmatrix}$$

и инвариантного эллипсоида

$$\widehat{P}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}0013 & 0{,}0000 & 0{,}0092 & 0{,}0004\\ 0{,}0000 & 0{,}0013 & 0{,}0004 & 0{,}0147\\ 0{,}0092 & 0{,}0004 & 0{,}2577 & 0{,}0260\\ 0{,}0004 & 0{,}0147 & 0{,}0260 & 0{,}6593 \end{pmatrix},$$

обеспечивающего минимум эллипса, содержащего невязку e_1.

На рис. 1 изображен этот эллипс, а также две траектории $e_1(t)$ (для больших и малых уклонений). На рис. 2 показаны траектории $v_2(t)$ (сплошной линией) и $\widehat{v}_2(t)$ (пунктиром). Видно, что точность фильтрации весьма высока (для координаты $v_1(t)$ она еще выше).

2. Рассмотрим дискретную систему с матричной неопределенностью $\Delta(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9393 & 0{,}0303 & 0{,}2388 & 0{,}0025\\ 0{,}0303 & 0{,}9696 & 0{,}0025 & 0{,}2413\\ -0{,}4751 & 0{,}2363 & 0{,}8916 & 0{,}0298\\ 0{,}2363 & -0{,}2388 & 0{,}0298 & 0{,}9213 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0{,}0002\\ 0{,}0306\\ 0{,}0025\\ 0{,}2413 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -\delta\\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_A = (\ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ).$$

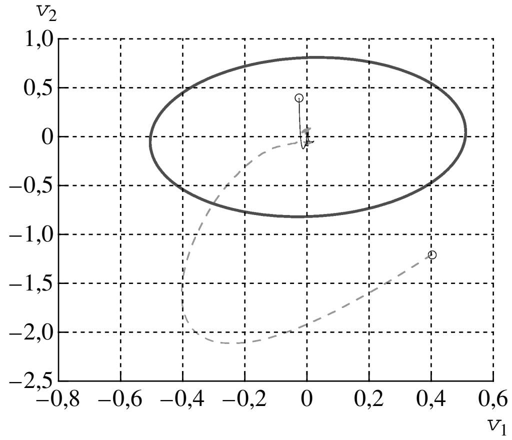

Рис. 1. Оценка (эллипс) и траектории невязок.

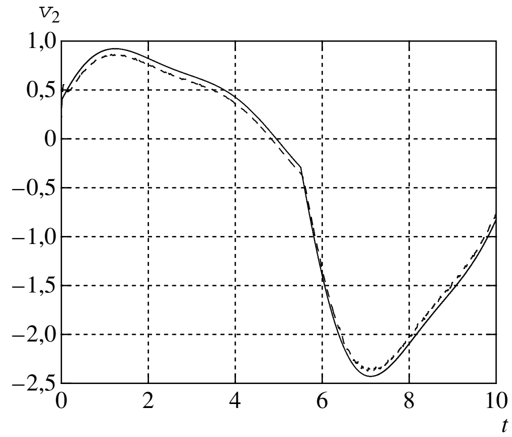

Рис. 2. Фильтрация координаты v_2.

Полагая $P_0 = 0{,}01I$, $\delta = 0{,}0075$, воспользовавшись теоремой 2 и минимизируя по α, находим матрицы фильтра

$$\widehat{F} \approx \begin{pmatrix} 1{,}8224 & 0{,}4577 \\ 0{,}0419 & 2{,}8372 \\ 2{,}8219 & 1{,}9888 \\ 0{,}3554 & 6{,}9255 \end{pmatrix}$$

и инвариантного эллипсоида

$$\widehat{P}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}1600 & 0{,}0035 & 0{,}5979 & 0{,}0290 \\ 0{,}0035 & 0{,}0911 & 0{,}1686 & 0{,}7032 \\ 0{,}5979 & 0{,}1686 & 5{,}2427 & 1{,}3321 \\ 0{,}0290 & 0{,}7032 & 1{,}3321 & 5{,}4924 \end{pmatrix},$$

обеспечивающего минимум эллипса, содержащего невязку e_1.

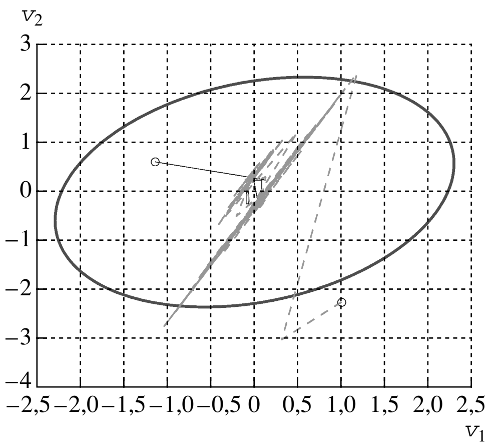

Рис. 3. Оценка (эллипс) и траектории невязок.

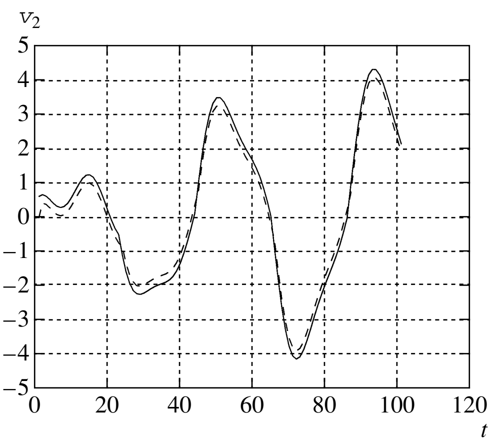

Рис. 4. Фильтрация координаты v_2.

На рис. 3 изображен этот эллипс, а также две траектории $e_1(t)$ (для больших и малых уклонений). На рис. 4 показаны траектории $v_2(t)$ (сплошной линией) и $\widehat{v}_2(t)$ (пунктиром). Видно, что точность фильтрации весьма высока (для координаты $v_1(t)$ она еще выше).

6. Заключение

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи робастной фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов; применение этой концепции позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации, легко решающихся численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного маятника.

Автор искренне признателен Б.Т. Поляку за полезные обсуждения и внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть M, N, Δ – матрицы соответствующих размерностей. Тогда

$$M\Delta N + (M\Delta N)^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon M M^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon} N^{\mathrm{T}} N$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех Δ таких, что $\|\Delta\| \leqslant 1$ или $\|\Delta\|_F \leqslant 1$.

Доказательство леммы П.1. Положим $L = \begin{pmatrix} M & N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, тогда утверждение леммы примет вид

$$L^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} L \leqslant L^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} L,$$

или

$$L^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \varepsilon I & -\Delta \\ -\Delta^{\mathrm{T}} & \dfrac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} L \geqslant 0.$$

Остается заметить, что по формуле Шура матрица $\begin{pmatrix} \varepsilon I & -\Delta \\ -\Delta^{\mathrm{T}} & \dfrac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix}$ неотрицательно определена при $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I$, т.е. при $\|\Delta\| \leqslant 1$.

Второе утверждение леммы вытекает из того, что $\|\Delta\| \leqslant \|\Delta\|_F$. Лемма доказана. $\square$

Лемма П.2. Пусть G – симметрическая матрица, $M_1, \ldots, M_r$ и $N_1, \ldots, N_r$ – матрицы соответствующих размерностей. Тогда если

$$\exists\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r > 0\colon \quad G + \sum_{i=1}^{r} \left(\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i \right) \leqslant 0,$$

то

$$G + \sum_{i=1}^{r} \left(M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}} \right) \leqslant 0, \ \forall \Delta_i\colon \|\Delta_i\| \leqslant 1 \text{ или } \|\Delta_i\|_F \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, r.$$

Доказательство леммы П.2. Применяя лемму П.1 к M_i, Δ_i, N_i и ε_i, $i = 1, \ldots, r$, имеем:

$$M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Складывая полученные матричные неравенства, находим, что

$$G + \sum_{i=1}^{r} \left(M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^{\mathrm{T}} \right) \leqslant G + \sum_{i=1}^{r} \left(\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i \right) \leqslant 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(g) = g^{\mathrm{T}} Q g, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях уравнения (9). Тогда

$$\dot V(g) = \left(\widetilde{A} g + \widetilde{D} w\right)^{\mathrm{T}} Q g + g^{\mathrm{T}} Q \left(\widetilde{A} g + \widetilde{D} w\right) = g^{\mathrm{T}} \left(\widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q + Q\widetilde{A}\right) g + 2 g^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} w.$$

Чтобы траектории системы (9) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}_g$, потребуем, чтобы при $V(g) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1$ выполнялось $\dot V(g) \leqslant 0$. Итак,

$$\text{(П.1)} \qquad g^{\mathrm{T}} \left(\widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q + Q\widetilde{A}\right) g + 2 w^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q g \leqslant 0, \quad \forall (g,w): \quad g^{\mathrm{T}} Q g \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1.$$

Применим теперь S-теорему для двух квадратичных форм [16], тогда (П.1) эквивалентно следующему линейному матричному неравенству при некоторых значениях α, β таких, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q + Q\widetilde{A} + \alpha Q & Q\widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0$$

или

$$\begin{pmatrix} (A+\Delta A)^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1 (A+\Delta A) + \alpha Q_1 & (\Delta A)^{\mathrm{T}} Q_2 & Q_1 (D_1 + \Delta D_1) \\ Q_2 \Delta A & (A - FC)^{\mathrm{T}} Q_2 + Q_2 (A - FC) + \alpha Q_2 & Q_2 (D_1 + \Delta D_1 - F D_2) \\ (D_1 + \Delta D_1)^{\mathrm{T}} Q_1 & (D_1 + \Delta D_1 - F D_2)^{\mathrm{T}} Q_2 & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P = Q^{-1} > 0$ эквивалентно выполнению последнего линейного матричного неравенства при некоторых $\alpha \geqslant \beta > 0$. Поскольку ищутся минимальные эллипсоиды, то $\beta = \beta_{\max} = \alpha$.

Пусть существует $\alpha > 0$ такое, что полученное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей.

Вводя матричную переменную $Y = Q_2 F$, исключаем F:

$$\begin{pmatrix} (A+\Delta A)^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1 (A+\Delta A) + \alpha Q_1 & (\Delta A)^{\mathrm{T}} Q_2 & Q_1 (D_1 + \Delta D_1) \\ Q_2 \Delta A & A^{\mathrm{T}} Q_2 + Q_2 A - YC - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2 & Q_2 (D_1 + \Delta D_1) - Y D_2 \\ (D_1 + \Delta D_1)^{\mathrm{T}} Q_1 & (D_1 + \Delta D_1)^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Пусть существует $\alpha > 0$ такое, что полученное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей. Тогда

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 & 0 & Q_1 D_1 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} Q_2 + Q_2 A - YC - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_1 & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} Q_1 F_A \\ Q_2 F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} Q_1 & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} Q_1 F_{D_1} \\ Q_2 F_{D_1} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{D_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{D_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{D_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \Delta_{D_1}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_1 & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

что, по лемме П.2, выполняется, если существуют ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm T}Q_1 + Q_1A + \alpha Q_1 & 0 & Q_1D_1 \\ 0 & A^{\mathrm T}Q_2 + Q_2A - YC - C^{\mathrm T}Y^{\mathrm T} + \alpha Q_2 & Q_2D_1 - YD_2 \\ D_1^{\mathrm T}Q_1 & D_1^{\mathrm T}Q_2 - D_2^{\mathrm T}Y^{\mathrm T} & -\alpha I \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\begin{pmatrix} Q_1F_A \\ Q_2F_A \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_A^{\mathrm T}Q_1 & F_A^{\mathrm T}Q_2 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} H_A^{\mathrm T} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_A & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2}\begin{pmatrix} Q_1F_{D_1} \\ Q_2F_{D_1} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{D_1}^{\mathrm T}Q_1 & F_{D_1}^{\mathrm T}Q_2 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{D_1}^{\mathrm T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{D_1} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

По лемме Шура полученное матричное неравенство эквивалентно неравенству (10).

Чтобы свести задачу минимизации $\operatorname{tr} P_2 = \operatorname{tr} Q_2^{-1}$ к линейной, введем матрицу $H = H^{\mathrm T}$ такую, что $Q_2^{-1} \leqslant H$; последнее неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству (11). В результате пришли к задаче минимизации

$$\operatorname{tr} H \to \min$$

при ограничениях (10), (11). □

Доказательство теоремы 2. Для функции Ляпунова

$$V(g_k) = g_k^{\mathrm T} Q g_k, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q > 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} V(g_{k+1}) &= \left(\widetilde{A}g_k + \widetilde{D}w_k\right)^{\mathrm T} Q \left(\widetilde{A}g_k + \widetilde{D}w_k\right) = \\ &= g_k^{\mathrm T}\widetilde{A}^{\mathrm T}QAg_k + w_k^{\mathrm T}\widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{D}w_k + 2g_k^{\mathrm T}\widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{D}w_k. \end{aligned}$$

Чтобы траектории системы (19) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}_g$, потребуем, чтобы при $V(g_k) \leqslant 1$ и $w^{\mathrm T}w \leqslant 1$ выполнялось $V(g_{k+1}) \leqslant 1$. Итак,

$$\begin{aligned} &g_k^{\mathrm T}\widetilde{A}^{\mathrm T}QAg_k + w_k^{\mathrm T}\widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{D}w_k + 2g_k^{\mathrm T}\widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{D}w_k \leqslant 1, \\ &\forall (g_k, w_k) : g_k^{\mathrm T}Qg_k \leqslant 1, \quad w_k^{\mathrm T}w_k \leqslant 1. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Применим теперь S-теорему для двух квадратичных форм, тогда (П.2) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{A} - \alpha Q & \widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{A} & \widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{D} - \beta I \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{П.3}$$

при некоторых значениях $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta \leqslant 1$. С использованием леммы Шура неравенство (П.3) перепишется в виде

$$\widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{A} - \alpha Q \leqslant \widetilde{A}^{\mathrm T}Q\widetilde{D}\left(\widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{D} - \beta I\right)^{-1}\widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{A}.$$

Поскольку ищутся *минимальные* эллипсоиды, т.е. с наибольшей матрицей Q, а с другой стороны, должно быть $\widetilde{D}^{\mathrm T}Q\widetilde{D} - \beta I \leqslant 0$, то

$$\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha.$$

Применяя лемму об обращении матриц [17], приходим к LMI

$$P \geqslant \frac{1}{\alpha}\widetilde{A}P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{1-\alpha}\widetilde{D}\widetilde{D}^{\mathrm{T}},$$

или

$$\begin{pmatrix} -P & \widetilde{D} & \widetilde{A} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I & 0 \\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}} & 0 & -\alpha Q \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1+\Delta D_{1k} & A+\Delta A_k & 0 \\ 0 & -P_2 & D_1+\Delta D_{1k}-FD_2 & \Delta A_k & A-FC \\ (D_1+\Delta D_{1k})^{\mathrm{T}} & (D_1+\Delta D_{1k}-FD_2)^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ (A+\Delta A_k)^{\mathrm{T}} & \Delta A_k^{\mathrm{T}} & 0 & -\alpha Q_1 & 0 \\ 0 & (A-FC)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Домножая слева и справа на матрицу $\mathrm{diag}\{\, I \quad Q_2 \quad I \quad I \quad I \,\}$, получаем:

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1+\Delta D_{1k} & A+\Delta A_k & 0 \\ 0 & -Q_2 & Q_2(D_1+\Delta D_{1k}-FD_2) & Q_2\Delta A_k & Q_2(A-FC) \\ (D_1+\Delta D_{1k})^{\mathrm{T}} & (D_1+\Delta D_{1k}-FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ (A+\Delta A_k)^{\mathrm{T}} & \Delta A_k^{\mathrm{T}}Q_2 & 0 & -\alpha Q_1 & 0 \\ 0 & (A-FC)^{\mathrm{T}}Q_2 & 0 & 0 & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} \leqslant 0;$$

вводя матричную переменную $Y = Q_2F$, исключаем F:

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1+\Delta D_{1k} & A+\Delta A_k & 0 \\ 0 & -Q_2 & Q_2(D_1+\Delta D_{1k})-YD_2 & Q_2\Delta A_k & Q_2A-YC \\ (D_1+\Delta D_{1k})^{\mathrm{T}} & (D_1+\Delta D_{1k})^{\mathrm{T}}Q_2-D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ (A+\Delta A_k)^{\mathrm{T}} & \Delta A_k^{\mathrm{T}}Q_2 & 0 & -\alpha Q_1 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}}Q_2-C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Пусть существует $\alpha > 0$ такое, что полученное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей. Тогда

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1 & A & 0 \\ 0 & -Q_2 & Q_2D_1-YD_2 & 0 & Q_2A-YC \\ D_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}}Q_2-D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_1 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}}Q_2-C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} F_A \\ Q_2F_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{Ak} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H_A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{Ak}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} & F_A^{\mathrm{T}}Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} F_{D_1} \\ Q_2F_{D_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{D_1k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{D_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{D_1}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{D_1k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_{D_1}^{\mathrm{T}} & F_{D_1}^{\mathrm{T}}Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

что, по лемме П.2, выполняется, если существуют ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1 & A & 0 \\ 0 & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & 0 & Q_2 A - YC \\ D_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha) I & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_1 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} Q_2 - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_A^{\mathrm{T}} H_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{D_1}^{\mathrm{T}} H_{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} F_A \\ Q_2 F_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} F_{D_1} \\ Q_2 F_{D_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{D_1}^{\mathrm{T}} & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -P_1 & 0 & D_1 & A & 0 & F_A & F_{D_1} \\ 0 & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & 0 & Q_2 A - YC & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ D_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} Q_2 - D_2^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha) I + \varepsilon_2 H_{D_1}^{\mathrm{T}} H_{D_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} Q_2 - C^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\alpha Q_2 & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} & F_A^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_{D_1}^{\mathrm{T}} & F_{D_1}^{\mathrm{T}} Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

После домножения слева и справа на матрицу $\operatorname{diag} \{ Q_1 \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \}$ приходим к LMI (20).

Чтобы свести задачу минимизации $\operatorname{tr} P_2 = \operatorname{tr} Q_2^{-1}$ к линейной, введем матрицу $H = H^{\mathrm{T}}$ такую, что $Q_2^{-1} \leqslant H$; последнее неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству (21). В результате пришли к задаче минимизации

$$\operatorname{tr} H \to \min$$

при ограничениях (20), (21). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.

5. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006.
6. *Фурасов В.Д.* Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005.
7. *Овсеевич А.И., Тарабанько Ю.В.* Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 33–44.
8. *Chernousko F., Polyak B.* (*eds*) Special issue: Set-membership Modelling of Uncertainty in Dynamical Systems // Math. Comput. Modelling Dynam. Syst. 2005. V. 11. № 2.
9. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
10. *Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
12. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 899–927.
13. *Blanchini F.* Set invariance in control – a survey // Automatica. 1999. V. 35. P. 1747–1767.
14. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
15. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.
16. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана – Попова – Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.
17. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 16.10.2007