Автоматика и телемеханика, № 4, 2010

**© 2010 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

НЕХРУПКИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предлагается подход к проблеме построения нехрупкого регулятора, т.е. допускающего вариации его параметров, в целях подавления ограниченных внешних возмущений в линейной динамической системе. Рассмотрен непрерывный и дискретный варианты задачи, а также ее робастный вариант. В качестве примера исследуется управление двойным осциллятором.

1. Введение

Впервые проблема *хрупкости* стабилизирующего регулятора для управляемых систем была поднята С. Бхаттачарией и Л. Килем в [1], а именно: на разнообразных примерах было показано, что даже при малом изменении параметров регулятора оптимальная система может стать неустойчивой (такие регуляторы в [1] были названы "хрупкими"). Впоследствии появилось большое число работ, развивающих эту тематику (см. [2, 3] и др.). Отметим, что вариация параметров регулятора может возникать, главным образом, по двум причинам: во-первых, по причине неточной реализации регулятора и, во-вторых, при дополнительной настройке параметров регулятора в процессе его использования.

Первой работой на русском языке, посвященной проблеме хрупкости регуляторов, является статья [4] (см. также [5]). В [4] использовался термин "грубый регулятор"; автор настоящей статьи считает более целесообразным использовать понятие "хрупкий" из [1], так как "грубость" обычно предполагает малое изменение свойств системы [6]. В [4] успешно использовался аппарат линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequalities, LMI*); при этом предполагалось, что внешние возмущения отсутствуют.

В настоящей работе освещается подход к проблеме построения *нехрупкого* регулятора, т.е. допускающего вариации его параметров, в целях подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов. Таким образом, здесь продолжается тематика [7, 8]. Главным инструментом при этом, как и ранее, является техника *LMI* [9, 10]. Рассматривается синтез нехрупкого регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов замкнутой динамической системы. Как будет видно из примеров, проблема хрупкости для оптимальных регуляторов достаточно существенна.

Предварительные результаты исследования докладывались на конференции [11].

2. Непрерывная система

Рассмотрим линейную непрерывную систему:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B_1u + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ &z = Cx + B_2u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $u \in \mathbb{R}^p$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению[1]

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2}$$

Пара (A, B_1) – управляема, пара (A, C) – наблюдаема.

Определим семейство инвариантных эллипсоидов данной системы.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n:\ x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P > 0, \tag{3}$$

называется инвариантным (*по состоянию*) *для замкнутой с помощью статической линейной обратной связи по состоянию динамической системы* (1), (2), *если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $t \geqslant 0$. *Матрицу* P *будем называть матрицей эллипсоида* $\mathcal{E}_x$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду. Ниже будет показано, что траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида $\mathcal{E}_x$, стремится к эллипсоиду с течением времени, т.е. инвариантный эллипсоид является и притягивающим.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В нашем случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы; в этой связи будем интересоваться минимальными в некотором смысле эллипсоидами, содержащими выход системы z.

Как известно, образом эллипсоида при линейном отображении является эллипсоид; в частности если $\mathcal{E}_x$ – инвариантный эллипсоид (3), то выход системы $z = Cx$, где C – матрица полного ранга, при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^l:\ z^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\}, \tag{4}$$

который будем называть *ограничивающим* (*по выходу*).

Минимальность ограничивающего эллипсоида можно понимать в разных смыслах; в работе выбран критерий следа

$$f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

соответствующий сумме квадратов полуосей эллипсоида $\mathcal{E}_z$. Итак, степень влияния внешних возмущений w на выход системы z сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (4), минимального по критерию (5). В частности, для скалярного выхода оценивается максимальное по модулю значение z.

Нехрупкий регулятор K будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \tag{6}$$

таким образом, чтобы возмущенный регулятор $K + \Delta_K(t)$ при всех $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K$ стабилизировал замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу) подавлял воздействие внешних возмущений w. Величина γ_K задает размер *области нехрупкости* регулятора K. Точнее,

[1] Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^{\mathrm{T}}$ – символ транспонирования, tr – след матрицы, I – единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

ищется такое K, чтобы для любых возмущений параметров регулятора $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \leqslant \gamma_K$ и для любых внешних возмущений w, удовлетворяющих (2), гарантировать малость выхода z в смысле критерия (5).

В рассматриваемой постановке задачи число γ_K задано; если γ_K слишком велико, то может оказаться, что система неравенств неразрешима. Это означает, что нельзя стабилизировать систему с таким запасом нехрупкости регулятора и величину γ_K следует уменьшить.

Т е о р е м а 1. *Решение (если оно существует)* $\widehat{R}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ *задачи минимизации* $\operatorname{tr} R \to \min$ *при ограничениях*:

$$
(7) \qquad \begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^{\mathrm{T}} + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D & P \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

$$
(8) \qquad \begin{pmatrix} -R + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^{\mathrm{T}} & -CP - B_2 Y & 0 \\ -(CP + B_2 Y)^{\mathrm{T}} & -P & P \\ 0 & P & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *скалярным переменным* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *и скалярному параметру* α, *определяет матрицу* $\widehat{R}$ *ограничивающего эллипсоида по выходу системы* (1), (2) *и статический регулятор по состоянию*

$$
\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},
$$

стабилизирующий систему с запасом нехрупкости γ_K.

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Отметим, что при фиксированном α приходим к задаче полуопределенного программирования (*Semidefinite Programming, SDP*).

Результаты, предоставленные теоремой 1 (и последующими теоремами), обладают определенным консерватизмом: полученный регулятор обладает бóльшим запасом нехрупкости, чем гарантируемый теоремой; это компенсируется наличием следующей оценки.

Пусть из каких-либо соображений выбран стабилизирующий регулятор K, т.е. такой, что матрица $A + B_1 K$ устойчива. Назовем *радиусом нехрупкости* этого регулятора величину

$$
\gamma^0 = \sup\{\gamma\colon\; A + B_1(K + \Delta_K) - \text{устойчива} \;\; \forall \Delta_K\colon \|\Delta_K\| \leqslant \gamma\}.
$$

Оценка $\underline{\gamma}$ радиуса нехрупкости регулятора снизу получена в [4] в терминах *LMI*.

Наличие ненулевой компоненты $B_2 u$ в выходе системы (1) позволяет одновременно с минимизацией выхода избежать появления больших значений управления; альтернативой этому подходу является явное введение ограничения на величину управления. А именно потребуем, чтобы

$$
(9) \qquad \|u(t)\| \leqslant \mu, \quad \mu > 0, \quad \forall t \geqslant 0.
$$

Следующая лемма сохраняет силу и в дискретном случае.

Л е м м а 1. *Ограничение* (9) *гарантируется выполнением матричного неравенства*

$$
(10) \qquad \begin{pmatrix} -P & -Y^{\mathrm{T}} & P \\ -Y & (\gamma_K^2 \varepsilon_3 - \mu^2) I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

где P – матрица инвариантного эллипсоида системы, ε_3 – скалярный параметр, а $Y = KP$.

При наложении ограничений на управление вида (9), как будет видно из примеров, отчетливо проявляется эффект хрупкости регуляторов.

3. Дискретная система

Приведем дискретный аналог рассуждений раздела 2. Рассмотрим линейную дискретную систему:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2 u_k \end{aligned} \tag{11}$$

с некоторым начальным условием x_0, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $u_k \in \mathbb{R}^p$ – управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Пара (A, B_1) – управляема, пара (A, C) – наблюдаема.

Нехрупкий регулятор K будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k \tag{13}$$

таким образом, чтобы возмущенный регулятор $K + \Delta_K$ стабилизировал замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу) подавлял воздействие внешних возмущений w_k при всех $\|\Delta_K\| \leqslant \gamma_K$.

Дискретным аналогом теоремы 1 является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Решение* (*если оно существует*) $\widehat{R}, \widehat{P}, \widehat{Y}$ *задачи минимизации* $\mathrm{tr}R \to \min$ *при ограничениях*:

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & (AP + B_1 Y)^{\mathrm{T}} & 0 & P \\ AP + B_1 Y & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D & 0 \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha) I & 0 \\ P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} -R + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^{\mathrm{T}} & -CP - B_2 Y & 0 \\ -(CP + B_2 Y)^{\mathrm{T}} & -P & P \\ 0 & P & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{15}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, скалярным переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и параметру α, определяет матрицу $\widehat{R}$ ограничивающего эллипсоида по выходу системы (11), (12) *и статический регулятор по состоянию*

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},$$

стабилизирующий систему с запасом нехрупкости γ_K.

Заметим, что теоремы 1 и 2 переходят при $\gamma_K = 0$ в теоремы 3 и 4 из [7], т.е. получаем регулятор, оптимально подавляющий внешние возмущения.

4. Робастный вариант

Рассмотрим линейную непрерывную управляемую систему:

$$
(16)\qquad \begin{aligned} &\dot{x} = (A + F_A\Delta_A(t)H_A)\,x + B_1u + Dw, \quad x(0) = x_0,\\ &z = Cx + B_2u, \end{aligned}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $z \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $u \in \mathbb{R}^p$ – управление, $w \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), матричная неопределенность $\Delta_A(t)$ удовлетворяет соотношению

$$
(17)\qquad \|\Delta_A(t)\| \leqslant \gamma_A,
$$

F_A, H_A – матрицы соответствующих размерностей; пара (A, B_1) – управляема, пара (A, C) – наблюдаема.

Задача о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений рассматривалась в [12]; основная используемая при этом техника предложена в [13]. Ниже этот подход обобщается на проблему нехрупкости.

Регулятор K будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию (6) таким образом, чтобы возмущенный регулятор $K + \Delta_K(t)$ при всех $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K$ и всех $\|\Delta_A(t)\| \leqslant \gamma_A$ стабилизировал замкнутую систему и, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу системы, подавлял воздействие внешних возмущений w. Заданная величина γ_K задает размер *области нехрупкости* регулятора K. Точнее, ищется такое K, чтобы при любых возмущениях параметров регулятора $\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K$, при любых матричных неопределенностях $\|\Delta_A(t)\| \leqslant \gamma_A$ и при любых допустимых внешних возмущениях w гарантировать малость выхода z в смысле критерия (5).

Теорема 3. *Решение $\widehat{R}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ задачи минимизации* $\operatorname{tr} R \to \min$ *при ограничениях*:

$$
(18)\qquad \begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^{\mathrm{T}} & P \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & 0 \\ H_AP & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ P & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

$$
(19)\qquad \begin{pmatrix} -R + \gamma_K^2\varepsilon_3 B_2B_2^{\mathrm{T}} & -CP - B_2Y & 0 \\ -(CP + B_2Y)^{\mathrm{T}} & -P & P \\ 0 & P & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

где

$$
\Omega = AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1Y + (B_1Y)^{\mathrm{T}} + \gamma_A^2\varepsilon_1 F_AF_A^{\mathrm{T}} + \gamma_K^2\varepsilon_2 B_1B_1^{\mathrm{T}},
$$

а минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, скалярным переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и скалярному параметру α, определяет матрицу $\widehat{R}$ ограничивающего эллипсоида по выходу системы (16), (2) *и статический регулятор по состоянию*

$$
\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},
$$

стабилизирующий систему с запасом нехрупкости γ_K.

Перейдем к дискретному случаю. Рассмотрим систему:

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = (A + F_A \Delta_{A_k} H_A) x_k + B_1 u_k + D w_k, \\
&z_k = C x_k + B_2 u_k,
\end{aligned} \tag{20}
$$

с некоторым начальным условием x_0, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $u_k \in \mathbb{R}^p$ – управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (12), матричная неопределенность Δ_{A_k} удовлетворяет соотношению (17), F_A, H_A – матрицы соответствующих размерностей; пара (A, B_1) – управляема, пара (A, C) – наблюдаема.

Теорема 4. *Решение $\widehat{R}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ задачи минимизации* $\operatorname{tr} R \to \min$ *при ограничениях*:

$$
\begin{pmatrix}
-\alpha P & (AP + B_1 Y)^{\mathrm T} & 0 & P H_A^{\mathrm T} & P \\
AP + B_1 Y & -P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^{\mathrm T} + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^{\mathrm T} & D & 0 & 0 \\
0 & D^{\mathrm T} & -(1-\alpha) I & 0 & 0 \\
H_A P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\
P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I
\end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{21}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-R + \gamma_K^2 \varepsilon_3 B_2 B_2^{\mathrm T} & -CP - B_2 Y & 0 \\
-(CP + B_2 Y)^{\mathrm T} & -P & P \\
0 & P & -\varepsilon_3 I
\end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{22}
$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, скалярным переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и скалярному параметру α, определяет матрицу $\widehat{R}$ ограничивающего эллипсоида по выходу системы (20), (12) *и статический регулятор по состоянию*

$$
\widehat{K} = \widehat{Y} \widehat{P}^{-1},
$$

стабилизирующий систему с запасом нехрупкости γ_K.

Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, можно получить и в более общем случае, когда матричные неопределенности той же структуры содержатся и в матрицах B_1 и D. При $\gamma_K = 0$ эти утверждения переходят в теоремы 3 и 5 из [12].

5. Пример: управление двойным осциллятором

Рассмотрим задачу управления двойным осциллятором (см. [14]), т.е. системой из двух тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рисунок). Эта задача часто рассматривается в качестве модельной для различных методов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумные размеры (в частности, задача изучалась в [7, 8]). Управляющее воздействие u прикладывается к

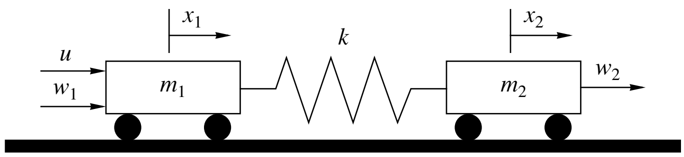

Рисунок.

левому телу с целью компенсировать влияние ограниченного внешнего возмущения $w = (w_1 \quad w_2)^{\mathrm{T}}$, компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно.

Пусть x_1, v_1 – координата и скорость левого тела, а x_2, v_2 – правого тела. Тогда $x = (x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2)^{\mathrm{T}}$ есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы. В качестве выхода системы возьмем вектор $z = (u \quad x_2)^{\mathrm{T}}$. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1, \\
\dot{x}_2 &= v_2, \\
\dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{1}{m_1}w_1, \\
\dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w_2.
\end{aligned}
$$

Пусть $k = 0{,}1$; $m_1 = 0{,}1$; $m_2 = 2$. При $\gamma_K = 0$ получаем:

$$
\begin{aligned}
\widehat{K} &\approx (-0{,}2576 \quad -1{,}7353 \quad -0{,}2512 \quad -5{,}4539)\,, \\
\widehat{R} &\approx \begin{pmatrix} 11{,}9626 & -2{,}5601 \\ -2{,}5601 & 6{,}0165 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

при этом $\underline{\gamma} \approx 0{,}1073$.

Заметим, что оценка радиуса нехрупкости регулятора сверху может быть получена с помощью рандомизированного подхода, который состоит в генерировании равномерно распределенной выборки $\eta_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $i = 1, \ldots, N$, и принятия в качестве оценки радиуса нехрупкости регулятора K величины

$$
\overline{\gamma} = \min_i \max \left\{ \lambda\colon \;\; A + B_1\left(K + \lambda\frac{\eta_i}{\|\eta_i\|}\right) \text{ – устойчива} \right\}.
$$

В частности, для найденного регулятора $\overline{\gamma} \approx 0{,}1570$.

Теперь увеличим запас нехрупкости регулятора, положив $\gamma_K = 0{,}25$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
\widehat{K} &\approx (-1{,}5979 \quad -3{,}2762 \quad -0{,}7523 \quad -25{,}7681)\,, \\
\widehat{R} &\approx \begin{pmatrix} 736{,}1572 & -6{,}5485 \\ -6{,}5485 & 24{,}8068 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

при этом $\underline{\gamma} \approx 0{,}6277$, $\overline{\gamma} \approx 0{,}6780$.

В рамках данного примера можно продемонстрировать дискретный случай возмущенных колебаний рассматриваемой системы, аппроксимируя его движение моделью в дискретном времени.

Далее, при $B_2 = 0$ и дополнительном ограничении $|u| \leqslant 2{,}46$ получаем регулятор

$$
\widehat{K} \approx (-0{,}0035 \quad -0{,}0088 \quad -0{,}0303 \quad -0{,}2922)\,,
$$

для которого $\underline{\gamma} \approx 0{,}0087$, $\overline{\gamma} \approx 0{,}0088$. Таким образом, проблема хрупкости достаточно существенна для оптимальных регуляторов. Несколько ослабив ограничение на управление: $|u| \leqslant 2{,}76$ и положив $\gamma_K = 0{,}0004$, получаем регулятор

$$
\widehat{K} \approx (-0{,}0836 \quad -0{,}3367 \quad -0{,}1468 \quad -1{,}9498)\,,
$$

для которого $\underline{\gamma} \approx 0{,}0579$, $\overline{\gamma} \approx 0{,}0817$, т.е. с существенно бóльшим запасом нехрупкости.

6. Заключение

В статье предложен подход к построению нехрупкого регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию для подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных динамических системах. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регулятора свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации.

В равной мере исследован как непрерывный, так и дискретный случаи, а также робастный вариант задачи. Эффективность метода продемонстрирована на примере задачи управления двойным осциллятором. Представляется, что предложенный метод имеет большой потенциал для обобщений, в частности для решения задачи построения нехрупкого регулятора для управления по выходу с использованием наблюдателя [8].

Автор признателен Б.Т. Поляку, П.С. Щербакову и М.М. Когану за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1 (см. [13]). *Пусть G – симметрическая матрица, $\gamma_1,\dots,\gamma_r > 0$, $M_1,\dots,M_r$ и $N_1,\dots,N_r$ – матрицы соответствующих размерностей. Тогда если*

$$\exists\,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r > 0\colon\ G + \sum_{i=1}^{r}\left(\gamma_i^2\varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm T} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm T} N_i\right) \leqslant 0,$$

то $\forall \Delta_i\colon \|\Delta_i\| \leqslant \gamma_i$, $i = 1,\dots,r$, выполняется

$$G + \sum_{i=1}^{r}\left(M_i\Delta_i N_i + (M_i\Delta_i N_i)^{\mathrm T}\right) \leqslant 0.$$

Доказательство теоремы 1. Система (1) с учетом (6) принимает замкнутый вид:

$$\begin{aligned} &\dot x = A_c x + Dw, \quad A_c = A + B_1K + B_1\Delta_K(t),\\ &z = (C + B_2K + B_2\Delta_K(t))\,x. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm T}Qx$, $Q > 0$, построенную на решениях системы (П.1). Для того чтобы траектории $x(t)$ системы (П.1) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ V(x) \leqslant 1\}, \tag{П.2}$$

достаточно выполнения условия[2]

$$\dot V(x) \leqslant 0 \quad \forall (x,w)\colon\ V(x) \geqslant 1, \quad w^{\mathrm T}w \leqslant 1. \tag{П.3}$$

Согласно S-теореме с двумя ограничениями [15] условие (П.3) эквивалентно условию

$$\dot V(x) + \alpha V(x) - \beta w^{\mathrm T}w \leqslant 0$$

[2] Можно показать, что это условие является необходимым и достаточным.

при $\alpha = \alpha\left(\Delta_K(t)\right)$, $\beta = \beta\left(\Delta_K(t)\right)$ таких, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. Поскольку ищутся минимальные эллипсоиды, то $\beta = \beta_{\max} = \alpha$ и приходим к соотношению

$$\dot V(x) + \alpha V(x) - \alpha w^{\mathrm{T}} w \leqslant 0. \tag{П.4}$$

Далее, для того чтобы траектории $x(t)$ системы (П.1), исходя из точки вне инвариантного эллипсоида (П.2), стремились к нему с течением времени, достаточно выполнения условия

$$V(x) \leqslant 1 \quad \forall (x,w)\colon\ \dot V(x) \geqslant 0, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1,$$

которое также эквивалентно соотношению (П.4).

С учетом того, что производная функции Ляпунова в силу системы имеет вид

$$\dot V(x) = \dot x^{\mathrm{T}} Q x + x^{\mathrm{T}} Q \dot x = x^{\mathrm{T}}(A_c^{\mathrm{T}} Q + Q A_c)x + 2 w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q x,$$

соотношение (П.4) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A_c^{\mathrm{T}} Q + Q A_c + \alpha Q & QD \\ D^{\mathrm{T}} Q & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, где $P = Q^{-1}$, получаем

$$\begin{pmatrix} P A_c^{\mathrm{T}} + A_c P + \alpha P & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P > 0$ эквивалентно выполнению последнего матричного неравенства при некотором $\alpha > 0$. В результате приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K} \operatorname{tr}\left[\left(C + B_2 K + B_2 \Delta_K(t)\right) P \left(C + B_2 K + B_2 \Delta_K(t)\right)^{\mathrm{T}}\right] \longrightarrow \min \tag{П.5}$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1 K + B_1 \Delta_K(t))^{\mathrm{T}} + (A + B_1 K + B_1 \Delta_K(t))P + \alpha(\Delta_K(t))P & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha\left(\Delta_K(t)\right) I \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{П.6}$$

Пусть существует число α такое, что неравенство (П.6) выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности $\Delta_K(t)$. Тогда неравенство (П.6) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1 K)^{\mathrm{T}} + (A + B_1 K)P + \alpha P & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K \begin{pmatrix} P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} B_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

которое по лемме П.1 выполняется, если существует $\varepsilon_1 > 0$, такое что

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1 K)^{\mathrm{T}} + (A + B_1 K)P + \alpha P & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} + \gamma_K^2 \varepsilon_1 \begin{pmatrix} B_1 B_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} (A + B_1 K)P + P(A + B_1 K)^{\mathrm{T}} + \alpha P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D & P \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

После замены $Y = KP$ полученное матричное соотношение принимает линейный вид (7).

Далее, пусть R – матрица ограничивающего эллипсоида по выходу системы. Согласно (П.5) имеем

$$(C+B_2K+B_2\Delta_K(t))P(C+B_2K+B_2\Delta_K(t))^{\mathrm{T}} \leqslant R \quad \forall \Delta_K(t)\colon \|\Delta_K(t)\| \leqslant \gamma_K,$$

или же по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} R & C+B_2K+B_2\Delta_K(t) \\ (C+B_2K+B_2\Delta_K(t))^{\mathrm{T}} & P^{-1} \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

откуда

$$-\begin{pmatrix} R & C+B_2K \\ (C+B_2K)^{\mathrm{T}} & P^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K(t) \begin{pmatrix} 0 & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \Delta_K^{\mathrm{T}}(t) \begin{pmatrix} B_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

что по лемме П.1 выполняется, если существует $\varepsilon_2 > 0$, такое что

$$-\begin{pmatrix} R & C+B_2K \\ (C+B_2K)^{\mathrm{T}} & P^{-1} \end{pmatrix} + \gamma_K^2 \varepsilon_2 \begin{pmatrix} B_2B_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -R+\gamma_K^2\varepsilon_2 B_2B_2^{\mathrm{T}} & -C-B_2K & 0 \\ -(C+B_2K)^{\mathrm{T}} & -P^{-1} & I \\ 0 & I & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Домножая полученную матрицу слева и справа на матрицу $\operatorname{diag}\{I \quad P \quad I\}$, с учетом введенной переменной Y приходим к соотношению (8). Таким образом, приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} R$ при ограничениях (7) и (8). Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство леммы 1. Поскольку $u = (K + \Delta_K(t))\,x$, то ограничение на управление $\|u\| \leqslant \mu$ представимо в виде

$$x^{\mathrm{T}}\,(K+\Delta_K(t))^{\mathrm{T}}\,(K+\Delta_K(t))\,x \leqslant \mu^2.$$

Рассмотрим эллипсоид с матрицей $P = Q^{-1} > 0$, инвариантный по состоянию для системы (П.1). Для того чтобы удовлетворить ограничениям на управление, потребуем выполнения условия

$$x^{\mathrm{T}}\,(K+\Delta_K(t))^{\mathrm{T}}\,(K+\Delta_K(t))\,x \leqslant \mu^2 \quad \forall x\colon x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant 1,$$

которое в силу S-теоремы эквивалентно существованию $\alpha = \alpha\,(\Delta_K(t)) \geqslant 0$ такого, что

$$(K+\Delta_K(t))^{\mathrm{T}}\,(K+\Delta_K(t)) \leqslant \alpha Q, \quad \alpha \leqslant \mu^2.$$

Поскольку ищутся минимальные инвариантные эллипсоиды, то $\alpha = \alpha_{\max} = \mu^2$. Домножив полученное неравенство слева и справа на матрицу P, с учетом $Y = KP$ имеем

$$(Y+\Delta_K(t)P)^{\mathrm{T}}\,(Y+\Delta_K(t)P) \leqslant \mu^2 P,$$

или по лемме Шура

$$
\text{(П.7)}\qquad \begin{pmatrix} -P & -Y^{\mathrm{T}} - P\Delta_K^{\mathrm{T}}(t) \\ -Y - \Delta_K(t)P & -\mu^2 I \end{pmatrix} \leqslant 0.
$$

Пусть существует число α такое, что неравенство (П.7) выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности $\Delta_K(t)$. Тогда неравенство (П.7) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$
\begin{pmatrix} -P & -Y^{\mathrm{T}} \\ -Y & -\mu^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \Delta_K(t)\,(P \quad 0) + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^{\mathrm{T}}(t)\,(0 \quad -I) \leqslant 0,
$$

которое по лемме П.1 выполняется, если существует $\varepsilon_3 > 0$, такое что

$$
\begin{pmatrix} -P & -Y^{\mathrm{T}} \\ -Y & -\mu^2 I \end{pmatrix} + \gamma_K^2 \varepsilon_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} (P \quad 0) \leqslant 0.
$$

Полученное неравенство по лемме Шура эквивалентно неравенству (10). Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Система (11) с учетом (13) принимает замкнутый вид:

$$
\text{(П.8)}\qquad \begin{aligned} & x_{k+1} = A_c x_k + D w_k, \quad A_c = A + B_1 K + B_1 \Delta_{K_k}, \\ & z_k = (C + B_2 K + B_2 \Delta_{K_k}) x_k. \end{aligned}
$$

Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова $V(x_k) = x_k^{\mathrm{T}} Q x_k$, $Q > 0$, построенную на решениях системы (П.8). Необходимым и достаточным условием того, что траектории x_k системы (П.8) не выходят из эллипсоида

$$
\text{(П.9)}\qquad \mathcal{E}_x = \left\{ x_k \in \mathbb{R}^n\colon\ V(x_k) \leqslant 1 \right\},
$$

является условие

$$
\text{(П.10)}\qquad V(x_{k+1}) \leqslant 1 \quad \forall (x_k, w_k)\colon\ V(x_k) \leqslant 1, \quad w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1.
$$

Согласно S-теореме с двумя ограничениями [15] условие (П.10) эквивалентно условию

$$
V(x_{k+1}) - \alpha V(x_k) - \beta w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 0
$$

при $\alpha = \alpha(\Delta_{K_k})$, $\beta = \beta(\Delta_{K_k}) \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta \leqslant 1$. Поскольку ищутся минимальные эллипсоиды, т.е. с наибольшей матрицей Q, то $\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha$ и приходим к соотношению

$$
\text{(П.11)}\qquad V(x_{k+1}) - \alpha V(x_k) - (1 - \alpha) w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 0.
$$

Далее, для того чтобы траектории $x(t)$ системы (П.8), исходя из точки вне инвариантного эллипсоида (П.9), стремились к этому эллипсоиду с течением времени, достаточно выполнения условия

$$
V(x_k) \leqslant 1 \quad \forall (x_k, w_k)\colon\ V(x_{k+1}) \geqslant V(x_k), \quad w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1,
$$

которое также эквивалентно соотношению (П.11).

Соотношение (П.11) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A_c^{\mathrm{T}} Q A_c - \alpha Q & A_c^{\mathrm{T}} Q D \\ D^{\mathrm{T}} Q A_c & D^{\mathrm{T}} Q D - (1-\alpha) I \end{pmatrix} \leqslant 0$$

или по лемме Шура

$$A_c^{\mathrm{T}} Q A_c - \alpha Q \leqslant A_c^{\mathrm{T}} Q D \left(D^{\mathrm{T}} Q D - (1-\alpha) I \right)^{-1} D^{\mathrm{T}} Q A_c. \tag{П.12}$$

Следуя так называемой *лемме об обращении матриц* [16], соотношение (П.12) можно переписать в виде

$$\alpha Q \geqslant A_c^{\mathrm{T}} \left(Q^{-1} - \frac{1}{1-\alpha} D D^{\mathrm{T}} \right)^{-1} A_c$$

или, полагая $P = Q^{-1}$,

$$P \geqslant \frac{1}{\alpha} A_c P A_c^{\mathrm{T}} + \frac{1}{1-\alpha} D D^{\mathrm{T}},$$

откуда по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P A_c^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_c P & -P & D \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha) I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Итак, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P > 0$ эквивалентно выполнению последнего матричного неравенства при некотором $0 < \alpha < 1$. В результате приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_{K_k}\| \leqslant \gamma_K} \operatorname{tr} \left[\left(C + B_2 K + B_2 \Delta_{K_k} \right) P \left(C + B_2 K + B_2 \Delta_{K_k} \right)^{\mathrm{T}} \right] \longrightarrow \min \tag{П.13}$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} -\alpha \left(\Delta_{K_k} \right) P & P \left(A + B_1 K + B_1 \Delta_{K_k} \right)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \left(A + B_1 K + B_1 \Delta_{K_k} \right) P & -P & D \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -\left(1 - \alpha(\Delta_{K_k}) \right) I \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{П.14}$$

Пусть существует число α такое, что неравенство (П.14) выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ_{K_k}. Тогда неравенство (П.14) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1 K)^{\mathrm{T}} & 0 \\ (A + B_1 K) P & -P & D \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha) I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{K_k} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{K_k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & B_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Воспользовавшись леммой П.1, после замены $Y = KP$ последнее неравенство представим в виде (14). Далее, действуя так же, как и в доказательстве теоремы 1, приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} R$ при ограничениях (14) и (15). Теорема 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Система (16) с учетом (6) принимает замкнутый вид:

$$
\text{(П.15)}\qquad \begin{aligned}
&\dot{x} = (A + B_1K + F_A\Delta_A(t)H_A + B_1\Delta_K(t))\,x + Dw,\\
&z = (C + B_2K + B_2\Delta_K(t))\,x.
\end{aligned}
$$

Следуя технике доказательства теоремы 1, приходим к задаче минимизации

$$
\text{(П.16)}\qquad \max_{\|\Delta_K(t)\|\leqslant\gamma_K} \operatorname{tr}\left[(C + B_2K + B_2\Delta_K(t))\,P\,(C + B_2K + B_2\Delta_K(t))^{\mathrm{T}}\right] \longrightarrow \min
$$

при ограничении

$$
\text{(П.17)}\qquad \begin{pmatrix} \Psi & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha\,(\Delta_A(t), \Delta_K(t))\,I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Psi = P\,(A + B_1K + F_A\Delta_A(t)H_A + B_1\Delta_K(t))^{\mathrm{T}} +\\
&+ (A + B_1K + F_A\Delta_A(t)H_A + B_1\Delta_K(t))\,P + \alpha\,(\Delta_A(t), \Delta_K(t))\,P.
\end{aligned}
$$

Пусть существует число α, такое что неравенство (П.17) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей $\Delta_A(t), \Delta_K(t)$. Тогда неравенство (П.17) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} P(A + B_1K)^{\mathrm{T}} + (A + B_1K)P + \alpha P & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A(t)\,(H_AP \quad 0) +\\
&+ \begin{pmatrix} PH_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^{\mathrm{T}}(t)\,\left(F_A^{\mathrm{T}} \quad 0\right) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K(t)\,(P \quad 0) + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^{\mathrm{T}}(t)\,\left(B_1^{\mathrm{T}} \quad 0\right) \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись леммой П.1, после замены $Y = KP$ последнее неравенство представим в виде (18). Далее, действуя так же, как и в доказательстве теоремы 1, приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} R$ при ограничениях (18) и (19). Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 4. Система (20) с учетом (13) принимает замкнутый вид:

$$
\text{(П.18)}\qquad \begin{aligned}
&x_{k+1} = (A + B_1K + F_A\Delta_{A_k}H_A + B_1\Delta_{K_k})x_k + Dw_k,\\
&z_k = (C + B_2K + B_2\Delta_{K_k})x_k.
\end{aligned}
$$

Следуя технике доказательства теоремы 2, приходим к задаче минимизации

$$
\text{(П.19)}\qquad \max_{\|\Delta_{K_k}\|\leqslant\gamma_K} \operatorname{tr}\left[(C + B_2K + B_2\Delta_{K_k})\,P\,(C + B_2K + B_2\Delta_{K_k})^{\mathrm{T}}\right] \longrightarrow \min
$$

при ограничении

$$
\text{(П.20)}\qquad \begin{pmatrix} -\alpha(\Delta_{A_k}, \Delta_{K_k})P & \Theta^{\mathrm{T}} & 0 \\ \Theta & -P & D \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -\left(1 - \alpha(\Delta_{A_k}, \Delta_{K_k})\right)I \end{pmatrix} \leqslant 0,
$$

где

$$
\Theta = (A + B_1K + F_A\Delta_{A_k}H_A + B_1\Delta_{K_k})P.
$$

Пусть существует число α, такое что неравенство (П.20) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей $\Delta_{A_k}, \Delta_{K_k}$. Тогда неравенство (П.20) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A+B_1K)^{\mathrm{T}} & 0 \\ (A+B_1K)P & -P & D \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{A_k} \begin{pmatrix} H_A P & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} PH_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{A_k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & F_A^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{K_k} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{K_k}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & B_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Воспользовавшись леммой П.1, после замены $Y = KP$ полученное неравенство представим в виде (21). Далее действуя так же, как и в доказательстве теоремы 1, приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} R$ при ограничениях (21) и (22). Теорема 4 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. P. 1098–1105.
2. *Jadbabaie A., Abdallah C., Dorato P., Famularo D.* Robust, Nonfragile, and Optimal Controller Design via Linear Matrix Inequalities // Proc. Amer. Control Conf. Philadelphia, USA. 1998. P. 2842–2846.
3. *Yang G.-H., Wang J.L.* Nonfragile H_∞ Output Feedback Controller Design for Linear Systems // J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2003. V. 125. № 1. P. 117–123.
4. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез грубых регуляторов на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 12. С. 154–162.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
6. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы / Андронов А.А. Собрание трудов. М., 1956. С. 183–187.
7. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
8. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. №5. С. 72–90.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
10. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 899–927.
11. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // Сб. тез. XII Междунар. науч.-техн. конф. “Моделирование, идентификация и синтез систем управления”. Донецк: ИПММ, 2009. С. 51–52.
12. *Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С.* Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3 / Под ред. О.Н. Граничина. СПб: С.-Петерб. гос. ун-т, 2007. С. 51–84.
13. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // АиТ. 2008. № 11. С. 125–139.
14. *Reinelt W.* Robust Control of a Two-Mass-Spring System Subject to Its Input Constraints // Proc. Amer. Control Conf. Chicago, USA. 2000. P. 1817–1821.
15. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // J. Optim. Theory and Appl. 1998. V. 99. P. 553–583.
16. *Голуб Дж., Ван Лоан Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1993.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 10.01.2008