Автоматика и телемеханика, № 4, 2011

© 2011 г. **М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОДАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ: ЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР ПО ВЫХОДУ

Рассматривается проблема построения линейного динамического регулятора по выходу для подавления ограниченных внешних возмущений в линейной системе управления. Предлагаемый подход основан на методе инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств. В качестве примеров исследуется управление гироплатформой и двухмассовой системой.

1. Введение

Задача подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов и техники линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) [1] ранее рассматривалась в [2–4]. В частности, предложенный подход применялся в [2] для построения статической линейной обратной связи по состоянию, в [3] – для построения линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера; в [4] решалась задача фильтрации при ограниченных внешних возмущениях.

В настоящей работе рассматривается задача подавления неслучайных L_∞-ограниченных внешних возмущений в линейной стационарной системе управления с помощью линейного динамического регулятора по выходу. По-видимому, впервые идея стабилизирующего динамического регулятора по выходу системы появилась в работах Френсиса и Уонема [5–7] под названием "принцип внутренней модели" (internal model principle).

Способ построения линейного динамического регулятора по выходу пониженного и полного порядка для гашения возмущений, ограниченных в L_2-норме, был предложен в монографии Д.В. Баландина и М.М. Когана [8, гл. 8] (см. также [9]); при этом синтез H_∞-регулятора сводится к решению линейных матричных неравенств.

Несмотря на то, что в данной работе, как и в [2–4], рассматриваемая проблема сводится к решению задачи полуопределенного программирования и последующей одномерной минимизации, идейное отличие состоит в том, что, следуя результатам Д.В. Баландина и М.М. Когана, отдельно находится минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу рассматриваемой системы, а затем определяются параметры динамического регулятора.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, \quad x(0) = x_0,\\
y &= C_1x + D_2w, \qquad\qquad\qquad (1)\\
z &= C_2x,
\end{aligned}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и ограниченным внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0; \tag{2}$$

пара (A, B_1) управляема, пара (A, C_1) наблюдаема. Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^{\mathrm{T}}$ – символ транспонирования, tr – след матрицы, I – единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Задачей является нахождение минимального (в некотором смысле) эллипсоида, содержащего регулируемый выход z.

Определение 1. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0, \tag{3}$$

называется инвариантным (*по состоянию*) *для замкнутой линейной системы, соответствующей динамической системе* (1), *если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $t \geqslant 0$ *и любых возмущений, удовлетворяющих ограничению* (2).

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду. В [10] показано, что траектория системы, исходящая из точки вне инвариантного эллипсоида, стремится к этому эллипсоиду с течением времени, т.е. инвариантный эллипсоид также является и притягивающим.

Будем рассматривать инвариантные эллипсоиды как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы; в этой связи естественно интересоваться минимальными (в некотором смысле) эллипсоидами, содержащими выход системы z. Нетрудно видеть, что если $\mathcal{E}_x$ – инвариантный эллипсоид (3), то выход системы $z = C_2 x$, где C_2 – матрица полного ранга, при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^r : \quad z^{\mathrm{T}} (C_2 P C_2^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\}, \tag{4}$$

который будем называть *ограничивающим* (*по выходу*), а при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ стремится к нему. В настоящей работе в качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида выбран критерий следа

$$f(P) = \mathrm{tr} C_2 P C_2^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

соответствующий сумме квадратов полуосей эллипсоида $\mathcal{E}_z$. Таким образом, оценка степени влияния L_∞-ограниченных внешних возмущений w на выход z системы (1) сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (4), минимального по критерию (5).

Будем искать стабилизирующий линейный динамический регулятор полного порядка по выходу вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \quad x_r(0) = 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \tag{6}$$

где $x_r \in \mathbb{R}^n$ – состояние регулятора, $A_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_r \in \mathbb{R}^{p\times l}$ – его параметры.

Введя в рассмотрение вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

с учетом (1), (6) приходим к замкнутой системе

$$
\begin{aligned}
&\dot{g} = A_c g + D_c w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&z = Cg,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где

$$
A_c = \begin{pmatrix} A + B_1 D_r C_1 & B_1 C_r \\ B_r C_1 & A_r \end{pmatrix}, \quad D_c = \begin{pmatrix} B_1 D_r D_2 + D_1 \\ B_r D_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_2 \quad 0)\,.
$$

Следуя вышеописанному подходу, заключим вектор состояния g системы (7) в эллипсоид $\mathcal{E}_g$ с матрицей $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $P \succ 0$, и будем минимизировать ограничивающий эллипсоид по выходу z с матрицей CPC^{T}. Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Решение* $\widehat{P}_{11}, \widehat{Q}_{11}, \widehat{\alpha}$ *задачи*

$$
\operatorname{tr} C_2 P_{11} C_2^{\mathrm{T}} \longrightarrow \min
$$

при ограничениях

$$
\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^{\mathrm{T}} + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{8}
$$

$$
\begin{pmatrix} Q_{11}A + A^{\mathrm{T}}Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} C_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} D_2 \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_{11} - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} D_2 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{9}
$$

$$
\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \tag{10}
$$

по матричным переменным $P_{11} = P_{11}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_{11} = Q_{11}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *скалярным переменным* μ_1, μ_2 *и скалярному параметру* α *определяет матрицу* $C_2 \widehat{P}_{11} C_2^{\mathrm{T}}$ *ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы* (1).

При этом параметры

$$
\Delta_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}
$$

динамического регулятора (6) *являются решениями линейного матричного неравенства*

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{A}\widehat{P} + \widehat{P}\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \widehat{\alpha}\widehat{P} & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -\widehat{\alpha} I \end{pmatrix} + M\Delta_r N \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M\Delta_r N)^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0, \tag{11}
$$

где

$$
\widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = \widehat{P}_{11} - \widehat{Q}_{11}^{-1},
$$

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix}.
$$

Доказательство теоремы 1 и последующих утверждений приведено в Приложении.

Отметим, что при фиксированном α условия теоремы представляют собой линейные матричные неравенства по переменным $P_{11}, Q_{11}, \mu_1, \mu_2$. Таким образом, приходим к задаче полуопределенного программирования (*Semidefinite Programming, SDP*), принадлежащей к классу задач выпуклой оптимизации.

Замечание. Существует определенный произвол в выборе конкретного решения Δ_r линейного матричного неравенства (11). Как показывает практика, вполне удовлетворительный результат дает минимизация $\|A_r\| \to \min$ на решениях (11). Для этого потребуем $\lambda \to \min$ при дополнительном ограничении

$$\begin{pmatrix} \lambda I & A_r \\ A_r^{\mathrm{T}} & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Лемма 1. *Если известно начальное условие $x(0) = x_0$, то добавляя к линейным матричным неравенствам теоремы 1 неравенство*

$$x_0^{\mathrm{T}} Q_{11} x_0 \leqslant 1, \tag{12}$$

гарантируем равномерную оценку для регулируемого выхода системы (1).

Из леммы 1 вытекает очевидное следствие.

Следствие. *Если в начальный момент времени*

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1 \right\},$$

то добавляя к линейным матричным неравенствам теоремы 1 неравенство

$$Q_{11} \preccurlyeq P_0^{-1},$$

гарантируем равномерную оценку для регулируемого выхода системы (1).

3. Пример: управление гироплатформой

Рассмотрим задачу управления гироплатформой, описываемой уравнениями [11]

$$\begin{aligned}
&\ddot q_1 + 400\dot q_1 + 0{,}342\dot q_3 + 0{,}94\dot q_4 - 940 q_3 + 342 q_4 = 0,\\
&\ddot q_2 + 400\dot q_2 + 0{,}866\dot q_3 + 0{,}5\dot q_4 - 500 q_3 + 866 q_4 = 0,\\
&803\dot q_1 + 154\dot q_2 + 100\dot q_3 + 754 q_3 + 1130 q_4 = u_1 + w_1,\\
&-718\dot q_1 - 1070\dot q_2 + 200\dot q_4 - 867 q_3 - 754 q_4 = u_2 + w_2,
\end{aligned}$$

где q_1, q_2 – углы прецессии гироскопов, q_3, q_4 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси, u_1, u_2 – моменты двигателей стабилизации (управления), w_1, w_2 – возмущающие моменты. При этом наблюдаемый и регулируемый выходы системы совпадают:

$$y = z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Введя вспомогательные фазовые переменные

$$q_5 = \dot q_1, \quad q_6 = \dot q_2,$$

приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7{,}5400 & -11{,}3000 & -8{,}0300 & -1{,}5400 \\ 0 & 0 & 4{,}3350 & 3{,}7700 & 3{,}5900 & 5{,}3500 \\ 0 & 0 & 938{,}5038 & -341{,}6792 & -400{,}6283 & -4{,}5023 \\ 0 & 0 & 504{,}3621 & -858{,}0992 & 5{,}1590 & -401{,}3414 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}0100 & 0 \\ 0 & 0{,}0050 \\ -0{,}0034 & -0{,}0047 \\ -0{,}0087 & -0{,}0025 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 0.$$

В данной постановке задачи на внешние возмущения накладываются не евклидовы ограничения (2), а интервальные ограничения вида

$$|w_1(t)| \leqslant 1000, \quad |w_2(t)| \leqslant 1000 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Соответствующий аналог теоремы 1 получается заменой $-\alpha I$ на $-\mathrm{diag}\,\{\beta_1 \quad \ldots \quad \beta_m\}$ в соотношениях (8), (9) с добавлением ограничения $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \leqslant \alpha$, где $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – скалярные переменные, и с последующей заменой $-\widehat{\alpha} I$ на $-\mathrm{diag}\,\{\widehat{\beta}_1 \quad \ldots \quad \widehat{\beta}_m\}$ в соотношении (11).

Воспользовавшись для численного решения задачи свободно распространяемым пакетом `cvx` [12] для системы Matlab, определим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0{,}6320 & -0{,}0830 \\ -0{,}0830 & 0{,}4988 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

ограничивающего эллипса по регулируемому выходу системы и матрицы динамического регулятора

$$A_r = \begin{pmatrix} -0{,}6059 & -0{,}1866 & 0{,}0006 & 0{,}0002 & 0{,}0018 & 0{,}0001 \\ -0{,}2296 & -0{,}6279 & 0{,}0010 & -0{,}0001 & 0{,}0008 & 0{,}0014 \\ -1{,}8811 & -3{,}5727 & -2{,}1216 & -4{,}2907 & -5{,}9769 & 4{,}1113 \\ -7{,}6487 & 3{,}8739 & 5{,}2023 & -0{,}5526 & 5{,}0058 & 3{,}2413 \\ -9{,}2802 & 8{,}0976 & -3{,}1170 & 1{,}8299 & -2{,}7136 & -4{,}5395 \\ 1{,}1439 & -8{,}2385 & 0{,}0632 & 3{,}1785 & 3{,}0147 & -5{,}4583 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0{,}0015 & 0{,}0006 \\ 0{,}0010 & 0{,}0018 \\ -4{,}4361 & 3{,}4516 \\ 4{,}6544 & 4{,}8557 \\ -2{,}4339 & -5{,}7599 \\ 1{,}9109 & -5{,}0212 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -0{,}2477 & -1{,}2282 & -0{,}2164 & -0{,}4345 & -0{,}6101 & 0{,}4136 \\ -0{,}0840 & -0{,}9639 & 1{,}0672 & -0{,}1223 & 1{,}0075 & 0{,}6693 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$
$$D_r = \begin{pmatrix} -0{,}4590 & 0{,}3444 \\ 0{,}9369 & 1{,}0177 \end{pmatrix} \cdot 10^9;$$

при этом $\max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A_c) \approx -313{,}4384$.

Для внешних возмущений

$$w_1(t) = 410 \sin 5t + 565 \cos 7t,$$
$$w_2(t) = 565 \sin 5t + 410 \sin 7t$$

на рис. 1 и 2 показаны траектории выхода для построенного регулятора (сплошная линия) и для динамического регулятора из [13] (пунктирная линия).

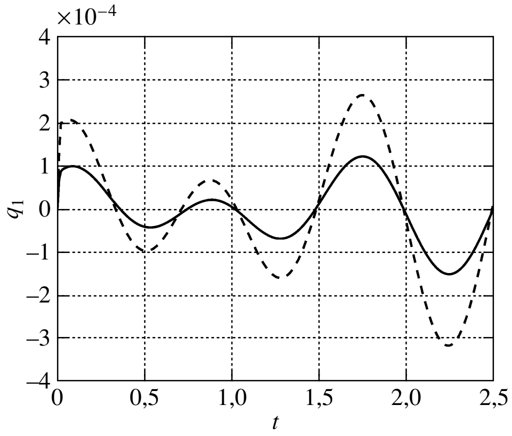

Рис. 1. Траектории $q_1(t)$.

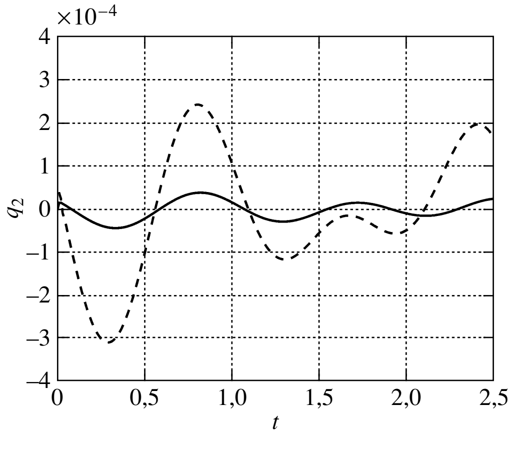

Рис. 2. Траектории $q_2(t)$.

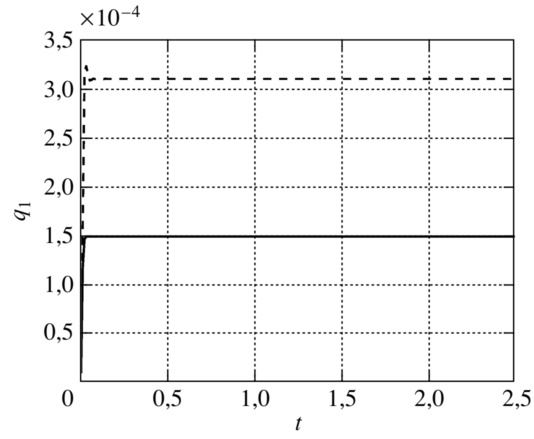

Рис. 3. Траектории $q_1(t)$.

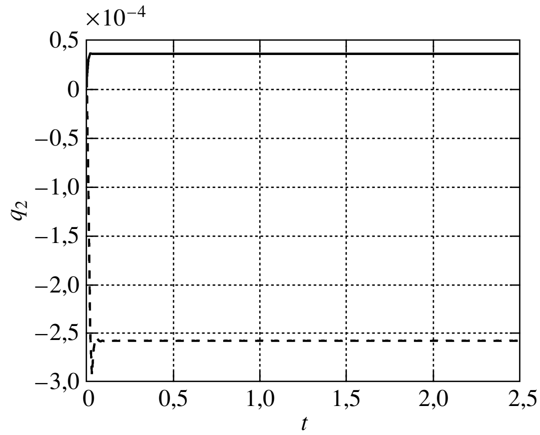

Рис. 4. Траектории $q_2(t)$.

Если подать в качестве внешних возмущений единичную ступеньку

$$w_1(t) = w_2(t) \equiv 1000,$$

разница в результатах будет еще более существенна. На рис. 3 и 4 показаны траектории выхода для построенного регулятора (сплошная линия) и для динамического регулятора из [13] (пунктирная линия).

4. Робастный вариант

Пусть система (1) содержит неопределенность, сосредоточенную в матрице A, т.е.

$$A = A_0 + F_A \Delta_A H_A, \tag{13}$$

где A_0 – номинальное значение матрицы A, матричная неопределенность Δ_A удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta_A\| \leqslant 1,$$

а F_A, H_A – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Робастный аналог теоремы 1 представлен следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. *Решение* $\widehat{P}_{11}, \widehat{Q}_{11}, \widehat{\alpha}$ *задачи*

$$\operatorname{tr} C_2 P_{11} C_2^{\mathrm{T}} \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$(14)\qquad \begin{pmatrix} A_0P_{11}+P_{11}A_0^{\mathrm{T}}+\alpha P_{11}-\mu_1 B_1B_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1 F_AF_A^{\mathrm{T}} & D_1 & P_{11}H_A^{\mathrm{T}} \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 \\ H_AP_{11} & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$(15)\qquad \begin{pmatrix} Q_{11}A_0+A_0^{\mathrm{T}}Q_{11}+\alpha Q_{11}-\mu_2 C_1^{\mathrm{T}}C_1+\varepsilon_2 H_A^{\mathrm{T}}H_A & Q_{11}D_1-\mu_2 C_1^{\mathrm{T}}D_2 & Q_{11}F_A \\ D_1^{\mathrm{T}}Q_{11}-\mu_2 D_2^{\mathrm{T}}C_1 & -\alpha I-\mu_2 D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}}Q_{11} & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$(16)\qquad \begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

по матричным переменным $P_{11}=P_{11}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_{11}=Q_{11}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, *скалярным переменным* $\mu_1,\mu_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ *и скалярному параметру* α *определяет матрицу* $C_2\widehat{P}_{11}C_2^{\mathrm{T}}$ *ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы* (1), (13).

При этом параметры

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

динамического регулятора (6) *удовлетворяют линейному матричному неравенству*

$$(17)\qquad \begin{pmatrix} \Omega & \begin{pmatrix} \widehat{P}\begin{pmatrix} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (H_A \;\; 0)\,\widehat{P} & 0 \end{pmatrix} & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

где ε *– скалярная переменная,*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_0\widehat{P}+\widehat{P}\widetilde{A}_0^{\mathrm{T}}+\widehat{\alpha}\widehat{P}+\begin{pmatrix} \varepsilon F_AF_A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\,\mathrm{T}} & -\widehat{\alpha} I \end{pmatrix} + M\Delta_r N \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M\Delta_r N)^{\mathrm{T}},$$

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = \widehat{P}_{11} - \widehat{Q}_{11}^{-1},$$

$$\widetilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

5. Пример: двухмассовая система

Продемонстрируем предложенный подход к робастному подавлению внешних возмущений с помощью линейного динамического регулятора на примере задачи

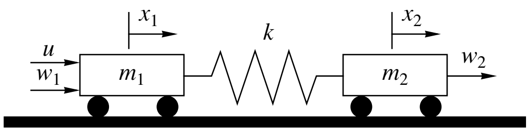

Рис. 5. Двухмассовая система.

управления двухмассовой системой, т.е. системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 5). Эта задача часто рассматривается в качестве модельной для различных методов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумные размеры (в частности, задача изучалась в [2, 3, 10, 14]).

Управляющее воздействие u прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = (w_1 \quad w_2)^{\mathrm{T}},$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени: $\|w(t)\| \leqslant 1$.

Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2)^{\mathrm{T}}$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы.

Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{m_2} & -\dfrac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{pmatrix} w.$$

В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = (x_1 \quad x_2)^{\mathrm{T}},$$

а в качестве минимизируемого – вектор

$$z = (v_1 \quad v_2)^{\mathrm{T}}.$$

Пусть неопределенность системы состоит в неопределенности коэффициента упругости пружины. При $m_1 = m_2 = 1$ и

$$k = 1 + \delta\Delta, \quad \delta = \mathrm{const}, \quad |\Delta| \leqslant 1,$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F\Delta H)x + B_1 u + Dw, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x \end{aligned}$$

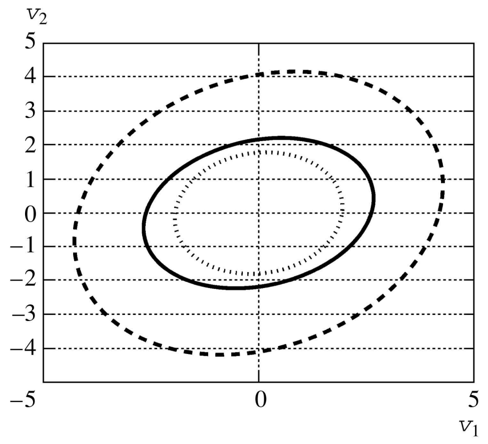

Рис. 6. Ограничивающие эллипсы для различных регуляторов.

с неопределенностью Δ, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\delta = 0{,}2$ с помощью теоремы 2 была найдена матрица

$$\begin{pmatrix} 7{,}1529 & 1{,}1786 \\ 1{,}1786 & 4{,}9320 \end{pmatrix}$$

ограничивающего эллипса по регулируемому выходу системы и параметры регулятора

$$A_r = \begin{pmatrix} -0{,}0938 & -0{,}0315 & 0{,}0016 & 0{,}0009 \\ -0{,}0105 & 0{,}0075 & -0{,}0285 & -0{,}0414 \\ -1{,}7061 & 1{,}5455 & 0{,}0730 & 0{,}1116 \\ -1{,}1489 & 0{,}3343 & -1{,}2242 & -1{,}8218 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0{,}0951 & 0{,}0307 \\ -0{,}0468 & 0{,}0287 \\ 1{,}8545 & -1{,}6388 \\ -1{,}3126 & 1{,}2179 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} 1{,}4119 & 2{,}9563 & 0{,}0494 & 0{,}0770 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$D_r = \begin{pmatrix} -1{,}3096 & -3{,}0207 \end{pmatrix} \cdot 10^3;$$

при этом $\max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A_c) \approx -0{,}3407$.

На рис. 6 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс; точечной линией – ограничивающий эллипс при неробастной постановке задачи; пунктиром показан ограничивающий эллипс для неробастной постановки задачи, найденный при построении линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера (см. [3]).

6. Заключение

В статье предложен подход к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных динамических системах с помощью линейного динамического регулятора полного порядка по выходу. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регулятора свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации.

Предложенный подход имеет большие возможности для обобщений, в частности на дискретный случай, на другие робастные постановки задачи; также представляется возможным построение нехрупкого динамического регулятора (см. [10]). Эффективность метода продемонстрирована на примерах задач управления гироплатформой и двухмассовой системой.

Автор признателен Б.Т. Поляку и П.С. Щербакову за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1 [15, 16]. *Пусть $G = G^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $N \in \mathbb{R}^{l\times n}$ – постоянные матрицы. Если образы отображений, задаваемых матрицами M и N, являются линейно независимыми, то линейное матричное неравенство*

$$G + M\Delta N + (M\Delta N)^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0$$

разрешимо относительно матрицы $\Delta \in \mathbb{R}^{k\times l}$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}: \quad G \preccurlyeq \mu_1 M M^{\mathrm{T}}, \quad G \preccurlyeq \mu_2 N^{\mathrm{T}} N.$$

Лемма П.2 [9]. *Пусть $X_{11} = X_{11}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_{11} = Y_{11}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Для существования матриц*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{pmatrix} \succ 0, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & Y_{22} \end{pmatrix} \succ 0, \quad X, Y \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},$$

таких что

$$XY = I,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

При $V = X_{11} - Y_{11}^{-1} \succ 0$ матрица X может быть доопределена следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} P_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(g) = g^{\mathrm{T}} Q g, \quad Q \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (7). Как показано в [10], для того чтобы траектории $g(t)$ системы (7) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E}_x = \big\{ g \in \mathbb{R}^{2n}\colon \quad V(g) \leqslant 1 \big\}, \tag{П.1}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{pmatrix} PA_c^{\mathrm{T}} + A_c P + \alpha P & D_c \\ D_c^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P = Q^{-1}. \tag{П.2}$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P \succ 0$ для системы (7) эквивалентно выполнению матричного неравенства (П.2) при некотором $\alpha > 0$.

Определим матрицы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

и матрицу параметров регулятора (6)

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное неравенство (П.2) примет вид

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}P + P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \alpha P & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} + M\Delta_r N \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M\Delta_r N)^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0$$

и согласно лемме П.1 будет разрешимо относительно Δ_r тогда и только тогда, когда существуют числа μ_1, μ_2 такие, что

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}P + P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \alpha P & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_1 M M^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0 \tag{П.3}$$

и

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}P + P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \alpha P & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^{\mathrm{T}} N \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Домножив последнее неравенство слева и справа на матрицу $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q + Q\widetilde{A} + \alpha Q & Q\widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_2 N^{\mathrm{T}} N \preccurlyeq 0. \tag{П.4}$$

Представив матрицы P и Q в блочном виде

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

придадим соотношениям (П.3)–(П.4) вид

$$\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^{\mathrm{T}} + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & * & D_1 \\ * & * & * \\ D_1^{\mathrm{T}} & * & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11}A + A^{\mathrm{T}}Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} C_1 & * & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} D_2 \\ * & * & * \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_{11} - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} C_1 & * & -\alpha I - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} D_2 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Полученные матричные неравенства эквивалентны соотношениям (8)–(9), в которых матрицы P_{11} и Q_{11} являются соответствующими блоками взаимно обратных матриц P и Q (см. [8]).

В силу леммы П.2 для существования искомых матриц P и Q с соответствующими блоками P_{11} и Q_{11} необходимо и достаточно выполнения условия (10). При этом матрица P может быть достроена, например, следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = P_{11} - Q_{11}^{-1} \succ 0.$$

Итак, приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr} C_2 P_{11} C_2^{\mathrm{T}}$ при ограничениях (8)–(10). При этом параметры динамического регулятора удовлетворяют линейному матричному неравенству (11). Теорема доказана.

Доказательство леммы 1. В качестве начального условия для состояния регулятора естественно взять $x_r(0) = 0$, тогда $g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для того чтобы в начальный момент времени траектория системы располагалась внутри инвариантного эллипсоида, потребуем выполнение условия

$$g_0^{\mathrm{T}} P^{-1} g_0 \leqslant 1,$$

или

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} P_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \leqslant 1.$$

Последнее неравенство по лемме Шура эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^{\mathrm{T}} & 0 \\ x_0 & P_{11} & V \\ 0 & V & V \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} P_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Запишем последнее неравенство в виде

$$\begin{pmatrix} P_{11} - x_0 x_0^{\mathrm{T}} & V \\ V & V \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

или по лемме Шура с учетом $V = P_{11} - Q_{11}^{-1}$

$$x_0 x_0^{\mathrm{T}} \preccurlyeq Q_{11}^{-1},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^{\mathrm{T}} \\ x_0 & Q_{11}^{-1} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Вновь применяя лемму Шура, приходим к соотношению (12), гарантирующему не только асимптотическую, но и равномерную оценку для регулируемого выхода системы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Следуя технике доказательства теоремы 1, с учетом (13) приходим к задаче минимизации $\operatorname{tr} C_2 P_{11} C_2^{\mathrm{T}}$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Phi & D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\alpha(\Delta_A) I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{П.5}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi & Q_{11} D_1 - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} D_2 \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_{11} - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} C_1 & -\alpha(\Delta_A) I - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} D_2 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \tag{П.6}$$

и (10), где

$$\Phi = (A_0 + F_A \Delta_A H_A) P_{11} + P_{11} (A_0 + F_A \Delta_A H_A)^{\mathrm{T}} + \alpha(\Delta_A) P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}},$$
$$\Psi = Q_{11} (A_0 + F_A \Delta_A H_A) + (A_0 + F_A \Delta_A H_A)^{\mathrm{T}} Q_{11} + \alpha(\Delta_A) Q_{11} - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} C_1.$$

Пусть существует число α, такое что указанные неравенства выполняются при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ_A. Тогда неравенства (П.5) и (П.6) будут справедливы, если выполнены неравенства

$$\begin{pmatrix} A_0 P_{11} + P_{11} A_0^{\mathrm{T}} + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A P_{11} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

и

$$\begin{pmatrix} Q_{11} A_0 + A_0^{\mathrm{T}} Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} C_1 & Q_{11} D_1 - \mu_2 C_1^{\mathrm{T}} D_2 \\ D_1^{\mathrm{T}} Q_{11} - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^{\mathrm{T}} D_2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} Q_{11} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} Q_{11} & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Согласно лемме Питерсена [17] полученные неравенства выполняются тогда и только тогда, когда существуют числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\begin{pmatrix} A_0 P_{11} + P_{11} A_0^{\mathrm{T}} + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^{\mathrm{T}} & D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} +$$
$$+ \varepsilon_1 \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} P_{11} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A P_{11} & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

и

$$\begin{pmatrix} Q_{11}A_0 + A_0^{\mathrm T}Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^{\mathrm T}C_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^{\mathrm T}D_2 \\ D_1^{\mathrm T}Q_{11} - \mu_2 D_2^{\mathrm T}C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^{\mathrm T}D_2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \varepsilon_2 \begin{pmatrix} H_A^{\mathrm T} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} Q_{11}F_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A^{\mathrm T}Q_{11} & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

По лемме Шура эти неравенства эквивалентны соотношениям (14) и (15) соответственно.

Далее, параметры динамического регулятора должны удовлетворять матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}\widehat{P} + \widehat{P}\widetilde{A}^{\mathrm T} + \widehat{\alpha}\widehat{P} & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm T} & -\widehat{\alpha}I \end{pmatrix} + M\Delta_r N \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M\Delta_r N)^{\mathrm T} \preccurlyeq 0,$$

где

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_0 + F_A\Delta_A H_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме Питерсена последнее матричное неравенство справедливо при всех допустимых Δ_A тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (17). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
3. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.
4. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. АН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
5. *Francis B.A.* The linear multivariable regulator problem // SIAM J. Conrol Optim. 1977. V. 15. No. 3. P. 486–505.
6. *Francis B.A., Wonham W.M.* The internal model principle for linear multivariable regulators // Appl. Math. Optim. 1975. V. 2. No. 2. P. 170–194.
7. *Francis B.A., Wonham W.M.* The internal model principle of control theory // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
8. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейно-квадратичные и γ-оптимальные законы управления по выходу // АиТ. 2008. № 6. С. 5–14.
10. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // АиТ. 2010. № 4. С. 106–119.
11. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
12. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL `http://stanford.edu/~boyd/cvx`.
13. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур LQ-оптимизации // АиТ. 1998. № 7. С. 83–95.

14. *Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С.* Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений / Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3. Под ред. О.Н. Граничина. СПб: С.-Петерб. гос. ун-т, 2007. С. 51–84.
15. *Iwasaki T., Skelton R.E.* All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas // Automatica. 1994. V. 30. No. 8. P. 1307–1317.
16. *Wang J., Duan Z., Yang Y., Huang L.* Analysis and Control of Nonlinear Systems with Stationary Sets: Time-Domain and Frequency-Domain Methods. World Scientific Publishing Company, 2009.
17. *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 31.05.2010