

© 2011 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук,  
Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.М. КУНЦЕВИЧ, академик НАН Украины  
(Институт космических исследований Национальной академии наук Украины  
и Государственного космического агентства Украины, Киев)

## ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ (ТЕХНИКА ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ)<sup>1</sup>

В обзоре рассмотрены результаты, связанные с задачей управления при произвольных ограниченных внешних возмущениях. Метод инвариантных эллипсоидов сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Главным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств. Простой и универсальный подход имеет большой потенциал и возможности для обобщений; он в равной мере распространяем как на непрерывный, так и на дискретный вариант задачи.

### 1. Введение

Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления и рассматривается в различных ее разделах. В линейно-квадратичной оптимизации, поставленной Р. Калманом и А.М. Летовым, рассматриваются задачи со случайными гауссовскими помехами (так называемая *линейно-квадратичная гауссовская задача*,  $LQG$ ). Проблема  $H_\infty$ -оптимизации связана либо с гармоническими внешними возмущениями, либо со случайными гауссовскими, либо с возмущениями из класса  $L_2$  (т. е., по существу, убывающими с течением времени). Однако во многих практических случаях внешние возмущения являются просто ограниченными; какая-либо дополнительная информация о них отсутствует.

Задачей о подавлении неслучайных ограниченных внешних возмущений стали интересоваться еще в середине прошлого века. В 40-е годы прошлого века так называемой *проблемой о накоплении возмущений* занимался Б.В. Булгаков [1, 2]. Однако основное внимание тогда уделялось проблеме анализа — каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними возмущениями, что, по сути, являлось задачей программного оптимального управления, поскольку внешние возмущения рассматривались как управления. Лишь значительно позже появляются работы по компенсации ограниченных возмущений (см. [3]), в которых, впрочем, не предлагались методы синтеза оптимальных регуляторов; задача Булгакова также исследуется в [4].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках совместных российско-украинских проектов при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-08-90436-Укр\_а) и НАН Украины (проект 20-01-10).

Отметим еще, что ранее чаще употреблялся термин *управление при постоянно действующих возмущениях* или *возмущенное движение*; термин *подавление внешних возмущений* (заимствованный из западной литературы оборот *rejection of external perturbations* появился позже).

Впервые задача об оптимальном подавлении неслучайных ограниченных возмущений была сформулирована в работе Е.Д. Якубович [5] и для некоторых частных случаев решена в [5–7]. Полное решение было построено в работах А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина [8] и позже — М. Далеха и Дж. Пирсона [9]. Впоследствии эта теория получила название  *$l_1$ -оптимизации*. Однако методы  $l_1$ -оптимизации имеют ряд существенных недостатков: ее применение к задаче синтеза оптимального управления часто приводит к регуляторам очень высокого порядка; отметим и асимптотический характер получающихся оценок. Наряду с  $l_1$ -оптимальным управлением хорошо известны также *методы динамического программирования* для подобных задач [10–12].

Приведенные выше результаты относятся к дискретным системам; их обобщение на непрерывный случай (так называемая  *$L_1$ -оптимизация*) вызывает дополнительные сложности. Заметим, что ограниченные возмущения также изучаются в работах, посвященных исследованию собственно *множеств достижимости*; отметим здесь работы Л.С. Гноенского [13], Д. Бертсекаса и И. Родеса [10], А.М. Формальского [14], а также в теории *дифференциальных игр* [15–17]. Специальные методы борьбы с внешними возмущениями предложены в теории систем переменной структуры. Управление на скользящих режимах для решения этой проблемы изучается в работах С.В. Емельянова, С.К. Коровина, В.И. Уткина, В.А. Уткина и др. В целом подавление неслучайных ограниченных возмущений традиционно считается трудной задачей в теории управления [18, 19].

Существует иной подход к данной проблематике, основанный на методе *инвариантных множеств*. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах теории гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Ф. Швеппе [20], Д. Бертсекаса [10, 21], А.Б. Куржанского [22] и Ф.Л. Черноусько [23], см. также [24]. Отметим, что инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями, например, областей достижимости динамических систем; это позволяет их широко использовать в задачах анализа. Так, работа А.В. Назина, С.А. Назина и Б.Т. Поляка [25] посвящена эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости линейной дискретной системы. Однако концепция инвариантности также активно применяется и в других разделах теории систем и автоматического управления (см. обзорную статью Бланкини [26] и недавнюю монографию Ф. Бланкини и С. Миани [27]).

Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды из-за их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. Ввиду этого, в рамках эллипсоидального описания, в качестве технического средства может быть использован мощный аппарат линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequality, LMI*) и полуопределенного программирования (*Semidefinite Programming, SDP*) [28]. Первой работой, в которой систематически изложена техника LMI, является книга С. Бойда с соавторами [29], а первой монографией на русском языке, посвященной этому вопросу, является книга Д.В. Баландина и М.М. Когана [30], см. также [31].

Необходимо упомянуть, что техника LMI, очень популярная в последнее время, уже ис-

пользовалась в целях подавления возмущений [29, 30, 32, 33]. Однако в большинстве работ не рассматривались задачи подавления  $L_\infty$ -ограниченных возмущений; например, в [30, гл. 8] техника LMI применялась для подавления возмущений, ограниченных в  $L_2$ -норме. В статье Дж. Абедора с соавторами [32] решаются задачи анализа и синтеза при ограниченных внешних возмущениях, но в ней рассматривается лишь непрерывный случай; кроме того, в [32] не используется явно техника LMI. Отметим, что в западной литературе рассматриваемый круг вопросов называется *peak-to-peak gain minimization*. Это означает, что целью является уменьшение максимального (*пикового*) значения выхода при ограниченных максимальных значениях возмущений (речь идет о системах с одним входом – одним выходом; эллипсоидальная техника обобщает этот подход на многомерный случай).

В настоящем обзоре рассматриваются результаты, позволяющие переформулировать проблему подавления ограниченных внешних возмущений в терминах инвариантных эллипсоидов на основе систематического использования техники LMI. Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений, в равной мере распространим как на непрерывный, так и на дискретный вариант задачи.

Для решения полученных задач существуют мощные вычислительные методы [34–36] и соответствующие пакеты программ [37, 38] для системы MATLAB, среди которых особо отметим свободно распространяемые программные пакеты YALMIP [39], SeDuMi [40], а также пакет cvx [41], разработанный под руководством С. Бойда.

Рассматриваемый подход не свободен и от недостатков — ему присущ определенный консерватизм, обусловленный тем, что достижимые множества не являются эллипсоидами.

Настоящий обзор ограничивается случаем линейных стационарных систем, для которого предлагаемая техника особенно проста и наглядна. Однако идеология инвариантных эллипсоидов может быть применена и в более общих ситуациях, см. по этому поводу [26, 27, 29, 42].

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделах 2 и 3 рассматриваются соответственно задачи анализа и синтеза оптимального управления с помощью статической линейной обратной связи по состоянию. Раздел 4 посвящен задаче фильтрации, т. е. оценки состояния динамической системы по измерениям. В разделе 5 рассматривается задача синтеза оптимального управления с помощью линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера. В разделе 6 рассматривается построение линейного стабилизирующего динамического регулятора. Раздел 7 посвящен робастным вариантам задач из предыдущих разделов. Раздел 8 содержит заключительные комментарии.

## 2. Анализ

### 2.1. Непрерывная система

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, измеримое по  $t$  и ограниченное в каждый момент времени:

$$(2) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Здесь и далее  $\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы,  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма матрицы,  $^T$  — символ транспонирования,  $\text{tr}$  — след матрицы,  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Отметим, что никаких других ограничений на возмущение  $w(t)$  не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Таким образом, рассматриваются  $L_\infty$ -ограниченные внешние возмущения. Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Ограничения (2) являются евклидовыми; позже будут обсуждены *интервальные* ограничения вида  $|w_i(t)| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Впрочем, в одномерном случае эти ограничения совпадают.

Будем полагать, что система (1) устойчива (т.е. матрица  $A$  гурвицева — действительные части ее собственных значений отрицательны), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга. Разумеется, если матрица  $A$  устойчива, то все решения системы (1) при допустимых возмущениях  $w(t)$  ограничены:

$$\limsup_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq r.$$

Наименьшее такое число  $r$  в западной литературе называют “*peak-to-peak gain*” — коэффициент усиления от возмущений (ограниченных единицей) к норме состояния системы (см. [11]). Будем, однако, интересоваться более точным описанием системы с помощью эллипсоидов.

Определим семейство инвариантных эллипсоидов данной системы.

*О п р е д е л е н и е 1. Эллипсоид с центром в начале координат*

$$(3) \quad \mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

*называется инвариантным (по состоянию) для динамической системы (1), (2), если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}_x$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ .*

*Матрицу  $P$  будем называть матрицей эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ .*

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде  $\mathcal{E}_x$ , в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду.

Как будет показано ниже, инвариантный эллипсоид для линейной системы обладает следующим свойством: при  $x(0) \notin \mathcal{E}_x$  будет  $x(t) \rightarrow \mathcal{E}_x$ ,  $t \rightarrow \infty$  (при этом, возможно,  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  при  $t \geq T$  для некоторого  $T > 0$ ), т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ , стремится к эллипсоиду  $\mathcal{E}_x$  с течением времени. Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и *притягивающим*.

Соответственно, если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем равномерную оценку поведения траекторий системы — в любой момент

времени траектории системы принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях; если начальные условия произвольны, имеем асимптотическую оценку поведения траекторий системы — траектории системы будут стремиться к этому эллипсоиду с течением времени при любых допустимых внешних возмущениях.

Инвариантные эллипсоиды ранее рассматривались как аппроксимации *достижимого множества*

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x = x(t), \quad t \geq 0, \quad - \text{решение (1), (2) при } x(0) = 0\}.$$

Ясно, что множество  $\mathcal{R}$ , вообще говоря, не эллипсоид (но некоторое замкнутое ограниченное выпуклое множество) и при этом  $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_x$ .

Именно достижимые множества дают наиболее полное описание динамической системы, однако они весьма сложны для изучения. Среди различных подходов к их исследованию отметим следующий. Поскольку достижимое множество представляет собой множество точек фазового пространства, в которые может перейти динамическая система из начала координат при некоторых допустимых возмущениях, то можно возмущения  $w$  рассматривать в качестве управлений. При этом приходим к задаче классического оптимального управления о попадании в начало координат. Структура достижимых множеств рассматривалась в ряде работ начиная с середины прошлого столетия. Наиболее полные результаты приведены в монографии А.М. Формальского [14], где исследованы не только ограничения (2), но и многие другие (например, возмущения, ограниченные в  $L_1$ - и  $L_2$ -нормах, а также их комбинации). Различные факты о строении достижимых множеств получены в книге А.Б. Куржанского [22].

Инвариантный эллипсоид, даже минимальный по какому-либо критерию, может быть весьма плохой аппроксимацией достижимого множества (см. пример в [43]). С этой точки зрения, подход на основе инвариантных эллипсоидов подвергался критике в [43] как слишком консервативный, т.е. дающий лишь субоптимальные решения. Однако понятие инвариантного эллипсоида является более полезным и робастным по сравнению с множеством достижимости. В последнем предполагается, что начальные условия нулевые, однако малое отклонение в начальном условии может привести к тому, что траектория выйдет за пределы достижимого множества.

*З а м е ч а н и е 1. Если предположить, что в начальном состоянии системы содержится неопределенность вида*

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P_0^{-1} x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

*то для получения равномерной оценки поведения траекторий естественно потребовать, чтобы  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_x$ , т.е.*

$$(4) \quad P \succcurlyeq P_0.$$

*С другой стороны, в тех же целях в случае непосредственного задания начального условия  $x_0 \neq 0$  потребуем, чтобы*

$$x_0^T P^{-1} x_0 \leq 1;$$

*это условие по лемме Шура представимо в виде линейного матричного неравенства*

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

При необходимости ограничения (4) или (5) добавляются в качестве дополнительного условия на матрицу  $P$  в формулировках последующих результатов.

Заметим, что лемма Шура [44, 45] широко используется в настоящей работе; приведем ее в следующей формулировке.

*Л е м м а 1* (Лемма Шура). Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , а  $C = C^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  — невырожденная матрица.

Тогда

$$M \succ 0 \iff C \succ 0, \quad A - BC^{-1}B^T \succ 0.$$

В [29, 32] установлена справедливость следующей теоремы.

*Т е о р е м а 1.* Эллипсоид  $\mathcal{E}_x$  является инвариантным по состоянию для динамической системы (1), (2) тогда и только тогда, когда его матрица  $P$  удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$(6) \quad AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0$$

при некотором  $\alpha > 0$ .

Приведем набросок доказательства. Его основная идея — выяснить, для каких функций Ляпунова

$$V(x) = x^T P^{-1} x, \quad P \succ 0,$$

будет выполняться условие

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1 \quad \text{и всех допустимых внешних возмущениях} \quad w.$$

Следуя [46, 47], воспользуемся принципиально иной техникой доказательств полученных утверждений, чем, например, в [29, 32]: вместо стандартной  $S$ -теоремы с одним ограничением используется ее новый вариант — с двумя ограничениями (подробнее о  $S$ -теореме см. [48]). При этом в полученных результатах вместо двух параметров содержится единственный параметр  $\alpha$ .

*Л е м м а 2* ( $S$ -теорема; Якубович [49], модификация [50]). Пусть заданы однородные квадратичные формы  $f_i(x) = x^T A_i x$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , и числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

Если существуют действительные числа  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  такие, что

$$(7) \quad A_0 \preceq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geq \sum_{i=1}^m \tau_i \alpha_i,$$

то неравенства

$$(8) \quad f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

влекут неравенство

$$(9) \quad f_0(x) \leq \alpha_0.$$

Обратно, если из (9) следует (8) и выполняется любое из условий:

а)  $m = 1$ ;

б)  $m = 2$ ,  $n \geq 3$  и существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  и вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

$$(10) \quad \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2,$$

то найдутся  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такие что выполняются соотношения (7).

*З а м е ч а н и е 2.* Утверждение леммы 2 останется справедливым и в том случае, если одно или несколько неравенств в (8) заменить на равенства; при этом будет отсутствовать требование неотрицательности соответствующих коэффициентов  $\tau_i$ .

Итак, введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (1). Для того чтобы траектории  $x(t)$  системы (1) не выходили за границу эллипсоида

$$(11) \quad \mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\},$$

достаточно потребовать, чтобы при  $\dot{V}(x, w) > 0$  (и всех  $\|w\| \leq 1$ ) выполнялось  $V(x) < 1$ . Это условие представимо в виде

$$(12) \quad \dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \forall (x, w) : V(x) \geq 1, \quad w^T w \leq 1.$$

С учетом того, что производная функции Ляпунова в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} = x^T (A^T Q + Q A) x + 2w^T D^T Q x,$$

условие (12) запишем как

$$(13) \quad x^T (A^T Q + Q A) x + 2w^T D^T Q x \leq 0 \quad \forall (x, w) : x^T Q x \geq 1, \quad w^T w \leq 1.$$

Введем в рассмотрение вектор  $s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^T Q + Q A & Q D \\ D^T Q & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда (13) примет вид

$$f_0(s) \leq 0 \quad \forall s : f_1(s) \leq -1, \quad f_2(s) \leq 1,$$

где  $f_i(s) = s^T M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Нетрудно видеть, что условия б) леммы 2 выполняются, и (13) эквивалентно

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0$$

при  $\alpha, \beta$  таких, что  $\alpha \geq \beta \geq 0$ .

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^T Q & -\beta I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

С учетом леммы Шура приходим к соотношению

$$A^T Q + QA + \alpha Q + \frac{1}{\beta} QDD^T Q \preceq 0, \quad 0 < \beta \leq \alpha.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на  $P = Q^{-1}$ , приходим к линейному матричному неравенству

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^T \preceq 0, \quad 0 < \beta \leq \alpha.$$

Поскольку множества

$$\Omega_1 = \{(P, \alpha): AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0, \quad \alpha > 0\}$$

и

$$\Omega_2 = \{(P, \alpha): AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^T \preceq 0, \quad 0 < \beta \leq \alpha\}$$

совпадают, то без потери общности будем считать, что  $\beta = \beta_{\max} = \alpha$ . В результате приходим к линейному матричному неравенству (6).

С другой стороны, необходимым условием инвариантности является условие

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \forall (x, w): \quad V(x) = 1, \quad w^T w \leq 1,$$

которое по лемме 2 также эквивалентно соотношению (6). Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства (6) при некотором  $\alpha > 0$ .

*С л е д с т в и е 1. Инвариантный эллипсоид для линейной непрерывной системы является притягивающим.*

Действительно, для того чтобы эллипсоид (11) был притягивающим, достаточно потребовать, чтобы при  $V(x) > 1$  (и всех  $\|w\| \leq 1$ ) выполнялось  $\dot{V}(x, w) < 0$ . Это условие представимо в виде

$$V(x) \leq 1 \quad \forall (x, w): \quad \dot{V}(x, w) \geq 0, \quad w^T w \leq 1,$$

и по лемме 2 эквивалентно соотношению (6).

*З а м е ч а н и е 3. Отметим, что по лемме Шура матричное неравенство (6) может быть записано в следующем эквивалентном виде:*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} A^T Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^T Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где  $Q = P^{-1}$ . Несмотря на кажущееся усложнение, именно такие формы записи позволяют в дальнейшем получить приводимые ниже результаты.



Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В данном случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений  $w(t)$  на вектор выхода системы  $z(t)$ . В этой связи будем интересоваться минимальными в некотором смысле эллипсоидами  $\mathcal{E}_z$ , содержащими выход системы  $z(t)$ .

Нетрудно видеть, что если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид (3) с матрицей  $P$ , то выход  $z = Cx$  системы (1) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду

$$(14) \quad \mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l: \quad z^T(CPC^T)^{-1}z \leq 1\}.$$

В частности, в случае одномерного выхода ( $l = 1$ ) этот эллипсоид является полосой

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}: \quad |z| \leq \sqrt{CPC^T}\},$$

в которой будет находиться выход  $z$  системы.

Эллипсоид (14) будем называть *ограничивающим (по выходу)*; его минимальность можно понимать в разных смыслах. В качестве критерия можно рассматривать функцию  $\det CPC^T$ , пропорциональную объему эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ , или функцию  $\|CPC^T\|$ , соответствующую значению наибольшей полуоси эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ . Однако в силу линейности наиболее прост критерий следа

$$(15) \quad f(P) = \text{tr} CPC^T,$$

который соответствует сумме квадратов полуосей эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ . Выбор этого критерия в дальнейшем позволит свести проблему к стандартной задаче SDP (в отличие от [32], где выбрана операторная норма матрицы) и тем самым существенно упростить результаты. Поскольку система (1) предполагается устойчивой, то существует конечный и единственный ограничивающий эллипсоид (14), минимизирующий любую из указанных выше функций. Заметим, что в случае одномерного выхода все эти критерии совпадают.

Итак, степень влияния  $L_\infty$ -ограниченных внешних возмущений  $w$  на выход системы  $z$  сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (14), минимального по критерию (15). В частности, для скалярного выхода оценивается максимальное по модулю значение  $z$ .

Из теоремы 1 вытекает

*С л е д с т в и е 2.* [29,32] *Минимальный по критерию (15) ограничивающий эллипсоид системы (1), (2) принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами  $P(\alpha)$ , которые удовлетворяют уравнению Ляпунова*

$$(16) \quad AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0$$

*на интервале  $0 < \alpha < -2 \max_i \text{Re} \lambda_i(A)$ , где  $\lambda_i(A)$  — собственные значения матрицы  $A$ . При этом функция  $\varphi(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$  строго выпукла на указанном интервале.*

Данное следствие позволяет при поиске минимального ограничивающего эллипсоида ограничиться рассмотрением однопараметрического семейства (16), что сводит задачу к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале. Заметим также, что все минимальные ограничивающие эллипсоиды удовлетворяют уравнению (16) вне зависимости от конкретного выбора критерия.

## 2.2. Итерационный метод

Авторами разработан итерационный метод, позволяющий избежать процедуры одномерной минимизации. Если задачу анализа удалось свести к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале, то в формулировках теорем последующих разделов отсутствует утверждение о строгой выпуклости целевой функции и границах интервала для параметра  $\alpha$ . Строгое обоснование сходимости метода пока остается открытой задачей, однако на конкретных примерах метод сходится и притом весьма быстро.

Введя в матричном неравенстве (6) переменную  $\beta = 1/\sqrt{\alpha}$ , получаем

$$(17) \quad AP + PA^T + \frac{1}{\beta^2}P + \beta^2 DD^T \preceq 0.$$

В силу неравенства

$$Y^T X^{-1} Y \succeq Y + Y^T - X,$$

где  $X \succ 0$  — обратимая матрица, а  $Y$  — матрица соответствующей размерности, имеем

$$\frac{1}{\beta^2}P \preceq F(2\beta F - P)^{-1}F,$$

где  $F = F^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — произвольная матрица, такая что  $2\beta F - P \succ 0$ . Тогда, если выполнено матричное неравенство

$$(18) \quad AP + PA^T + F(2\beta F - P)^{-1}F + \beta^2 DD^T \preceq 0,$$

эквивалентное по лемме Шура линейному матричному неравенству

$$(19) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T & \beta D & F \\ * & -I & 0 \\ * & * & P - 2\beta F \end{pmatrix} \preceq 0,$$

то выполнено и неравенство (17).

Таким образом, приходим к задаче SDP:

$$\text{tr } CPC^T \longrightarrow \min \quad \text{при ограничении (19).}$$

Решив эту задачу, получим некоторую оценку ограничивающего эллипсоида. Взяв в качестве  $F_0$  произвольную (достаточно большую) симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м итерационном шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k}{\beta_k}.$$

## 2.3. Дискретная система

Введем аналогичные определения и для линейной дискретной динамической системы

$$(20) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$(21) \quad \|w_k\| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, рассматриваются  $l_\infty$ -ограниченные внешние возмущения. Класс таких возмущений будем называть допустимым.

Будем полагать, что система (20) устойчива (т.е. матрица  $A$  шуровская — ее собственные значения лежат внутри единичного круга), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга.

Понятие достижимого множества для дискретных систем определяется точно так же, как и в непрерывном случае — это те точки, в которые можно попасть из начала координат при всевозможных допустимых возмущениях. Это множество для устойчивой системы ограничено и выпукло, но оно отлично от эллипсоида. Описание достижимых множеств приведено в книге А.Б. Куржанского [22]; его внешние и внутренние аппроксимации с помощью эллипсоидов построены в работах Ф.Л. Черноусько [23]. В дальнейшем будем использовать другое описание траекторий системы — с помощью инвариантных эллипсоидов.

*О п р е д е л е н и е 2. Эллипсоид с центром в начале координат*

$$(22) \quad \mathcal{E}_x = \{x_k \in \mathbb{R}^n: x_k^T P^{-1} x_k \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

*называется инвариантным по переменной  $x_k$  (по состоянию) для дискретной динамической системы (20), (21), если из условия  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  следует  $x_k \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $k = 1, 2, \dots$ . Матрицу  $P$  будем называть матрицей эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ .*

Как и в непрерывном случае, инвариантный эллипсоид является и притягивающим, т.е. при  $x_0 \notin \mathcal{E}_x$  будет  $x_k \rightarrow \mathcal{E}_x$ ,  $k \rightarrow \infty$  (при этом, возможно,  $x_k \in \mathcal{E}_x$  при  $k \geq K$  для некоторого  $K \in \mathbb{N}$ ).

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде  $\mathcal{E}_x$ , в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду, а траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ , стремится к эллипсоиду  $\mathcal{E}_x$  с течением времени.

Нетрудно видеть, что замечание 1 сохраняет свою силу и в дискретном случае.

В [29] установлена следующая теорема, являющаяся дискретным аналогом теоремы 1.

*Т е о р е м а 2. Эллипсоид  $\mathcal{E}_x$  является инвариантным по состоянию для динамической системы (20), (21) тогда и только тогда, когда его матрица  $P$  удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$(23) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T \preceq 0$$

*при некотором  $\rho^2(A) < \alpha < 1$ , где  $\rho(A)$  — спектральный радиус матрицы  $A$ .*

Приведем набросок доказательства. Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x_k) = x_k^T Q x_k, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (20). Необходимым и достаточным условием того, что траектории  $x_k$  системы (20) не выходят за границу эллипсоида

$$(24) \quad \mathcal{E}_x = \{x_k \in \mathbb{R}^n: \quad V(x_k) \leq 1\}$$

является условие

$$(25) \quad V(x_{k+1}) \leq 1 \quad \forall(x_k, w_k): \quad V(x_k) \leq 1, \quad w_k^T w_k \leq 1.$$

Далее, условие (25) запишем как

$$(26) \quad (Ax_k + Dw_k)^T Q(Ax_k + Dw_k) \leq 1 \quad \forall(x_k, w_k): \quad x_k^T Q x_k \leq 1, \quad w_k^T w_k \leq 1.$$

Введем в рассмотрение вектор  $s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^T Q A & A^T Q D \\ D^T Q A & D^T Q D \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда (26) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \forall s: \quad f_1(s) \leq 1, \quad f_2(s) \leq 1,$$

где  $f_i(s) = s^T M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Поскольку условия б) в лемме 2 выполняются, то соотношение (26) эквивалентно

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0$$

при  $\alpha, \beta \geq 0$  таких, что  $\alpha + \beta \leq 1$ .

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^T Q A - \alpha Q & A^T Q D \\ D^T Q A & D^T Q D - \beta I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или с учетом леммы Шура

$$(27) \quad A^T Q A - \alpha Q \preceq A^T Q D (D^T Q D - \beta I)^{-1} D^T Q A.$$

Воспользуемся так называемой *леммой об обращении матриц* [51], которую приведем в следующей формулировке.

*Л е м м а 3* (об обращении матриц).

$$(28) \quad (X - Y Z Y^T)^{-1} = X^{-1} + X^{-1} Y (Z^{-1} - Y^T X^{-1} Y)^{-1} Y^T X^{-1},$$

где  $X$  и  $Z$  — квадратные обратимые матрицы,  $Y$  — матрица соответствующей размерности, а матрица  $X - Y Z Y^T$  обратима.

В соответствии с леммой 3 соотношение (27) можно переписать в виде

$$\alpha Q \succeq A^T \left( Q^{-1} - \frac{1}{\beta} D D^T \right)^{-1} A.$$

Полагая  $P = Q^{-1}$ , приходим к линейному матричному неравенству

$$\frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{\beta}DD^T \preceq 0.$$

Поскольку множества

$$\Omega_1 = \{(P, \alpha): \frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^T \preceq 0, \quad 0 < \alpha < 1\}$$

и

$$\Omega_2 = \{(P, \alpha): \frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{\beta}DD^T \preceq 0, \quad \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta \leq 1\}$$

совпадают, то без потери общности будем полагать

$$\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha.$$

В результате приходим к соотношению (23). Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства (23) при некотором  $0 < \alpha < 1$ .

*С л е д с т в и е 3. Инвариантный эллипсоид для линейной дискретной системы является притягивающим.*

Действительно, для того чтобы траектории  $x_k$  системы (20), исходя из точки вне эллипсоида (24), стремились к нему с течением времени, достаточно потребовать, чтобы при  $V(x_k) > 1$  (и всех  $\|w_k\| \leq 1$ ) выполнялось  $V(x_{k+1}) < V(x_k)$ . Это условие представимо в виде

$$V(x_k) \leq 1 \quad \forall (x_k, w_k): \quad V(x_{k+1}) \geq V(x_k), \quad w_k^T w_k \leq 1$$

и по лемме 2 эквивалентно соотношению (23).

*З а м е ч а н и е 4. Отметим, что матричное неравенство (23) может быть записано в следующем эквивалентном виде:*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -\alpha Q & A^T Q & 0 \\ * & -Q & QD \\ * & D^T Q & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где  $Q = P^{-1}$ . Такого рода преобразования оказываются весьма полезными.

Далее, как и в непрерывном случае, если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид (22) с матрицей  $P$ , то выход  $z_k = Cx_k$  системы (20) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду

$$(29) \quad \mathcal{E}_z = \{z_k \in \mathbb{R}^m: \quad z_k^T (CPC^T)^{-1} z_k \leq 1\}.$$

В частности, в случае одномерного выхода ( $l = 1$ ) этот эллипсоид является полосой

$$\mathcal{E}_z = \{z_k \in \mathbb{R}: \quad |z_k| \leq \sqrt{CPC^T}\},$$

в которой будет находиться выход  $z_k$  системы. Эллипсоид (29) будем называть *ограничивающим (по выходу)*. Отметим, что в одномерном случае это просто число, ограничивающее скалярный выход.

Из теоремы 2 вытекает

*С л е д с т в и е 4.* [47] *Минимальный по критерию (15) ограничивающий эллипсоид системы (20), (21) принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами  $P(\alpha)$ , которые удовлетворяют дискретному уравнению Ляпунова*

$$(30) \quad \frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^T = 0$$

*на интервале  $\rho^2(A) < \alpha < 1$ , где  $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$  — спектральный радиус матрицы  $A$ . При этом функция  $\varphi(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$  строго выпукла на указанном интервале.*

Таким образом, как и в непрерывном случае, поиск минимального ограничивающего эллипсоида сводится к задаче одномерной выпуклой минимизации среди однопараметрического семейства, порожденного уравнением (30).

### 3. Обратная линейная связь по состоянию: синтез

Для компенсации влияния ограниченных внешних возмущений на выход стационарной динамической системы вводится статический регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию. Рассматриваемый подход к синтезу управления заключается в том, что искомым оптимальным регулятором, минимизирующим влияние внешних возмущений, задается наименьшим ограничивающим эллипсоидом по выходу для замкнутой системы.

#### 3.1. Непрерывная система

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

В случае, когда внешнее возмущение принадлежит классу  $L_2$ , соответствующие методы предоставляются  $H_2$ - или  $H_\infty$ -оптимизацией [30, 52–54]. По существу, (см. [15–17, 52])  $H_\infty$ -оптимальное управление является минимаксным управлением в дифференциальной игре против внешнего возмущения. В [53] впервые была предложена запись в пространстве состояний, в отличие от прежней частотной формы. Однако классическая задача  $H_\infty$ -оптимального управления предполагает, что начальные условия нулевые.

Целью является нахождение регулятора  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$(32) \quad u = Kx,$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу) подавляет воздействие внешних возмущений  $w(t)$ .

Заметим, что наличие ненулевой компоненты  $B_2u$  в выходе системы (31) позволяет рассмотреть более общую постановку задачи, когда одновременно с минимизацией выхода стремимся избежать появления больших значений управления. Альтернативой этому подходу является явное введение ограничения на величину управления; этот подход будет освещен ниже.

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче SDP и одномерной минимизации.

*Т е о р е м а 3.* [47] *Решение  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  задачи минимизации*

$$(33) \quad \text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2YC^T + B_2ZB_2^T] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(34) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + B_1Y + (B_1Y)^T & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(35) \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^T + C\hat{Y}^T B_2^T + B_2\hat{Y}C^T + B_2\hat{Z}B_2^T$$

минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида по выходу и статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

оптимально подавляющий внешние возмущения.

Приведем набросок доказательства. Система (31) с учетом (32) принимает замкнутый вид

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K)x. \end{aligned}$$

Применяя к ней результат теоремы 1, получаем, что исходная задача переписывается в виде минимизации

$$(37) \quad \text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^T] \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$(38) \quad (A + B_1K)P + P(A + B_1K)^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^T \preceq 0.$$

В матричное неравенство (38) переменные  $P$  и  $K$  входят нелинейным образом. Введем матричную переменную

$$Y = KP.$$

Тогда неравенство (38) примет линейный (по переменным  $P$  и  $Y$ ) вид

$$AP + PA^T + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^T + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0.$$

Полученное неравенство по лемме Шура эквивалентно линейному матричному неравенству (34).

Далее, с учетом введенной переменной  $Y$  целевая функция в (37) переписется в виде

$$f(P, Y) = \text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Y P^{-1} Y^T B_2^T].$$

Чтобы свести задачу к минимизации линейной функции, введем матричную переменную  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , такую что

$$(39) \quad Z \succcurlyeq Y P^{-1} Y^T.$$

Нетрудно видеть, что минимизация функции  $f(P, Y)$  эквивалентна минимизации (33) при ограничении (39). Остается заметить, что неравенство (39) по лемме Шура эквивалентно линейному матричному неравенству (35), что и завершает доказательство теоремы.

Таким образом, исходная задача синтеза статического регулятора по состоянию (32), оптимально (в смысле следа ограничивающего эллипсоида по выходу системы) подавляющего внешние возмущения в системе (31), (2), эквивалентна полученной задаче (33)–(35), т. е. полученные условия являются необходимыми и достаточными.

Отметим, что при фиксированном  $\alpha$  данная задача представляет собой задачу минимизации линейной функции (33) при ограничениях (34)–(35), представляющих собой линейное матричное неравенство, т. е. задачу SDP, которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации.

*З а м е ч а н и е 5.* В формулировке теоремы 3 отсутствует утверждение о строгой выпуклости целевой функции и границах интервала для параметра  $\alpha$ . Одномерная минимизация по  $\alpha$  всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта остается открытой задачей.

Нетрудно видеть, что согласно (32)

$$\|u\| \leq \max_{x^T \hat{P}^{-1} x \leq 1} \|\hat{K}x\| = \|\hat{K} \hat{P}^{1/2}\|.$$

Как отмечалось выше, в рамках данного подхода к подавлению внешних возмущений естественно потребовать введение ограничений на управление. Пусть

$$(40) \quad \|u\| \leq \mu, \quad \mu > 0.$$

В [47] установлена следующая лемма, которая сохраняет свою силу и в дискретном случае; приведем ее в следующей формулировке.

*Л е м м а 4.* Ограничение (40) для системы (31), (2) гарантируется выполнением линейного матричного неравенства

$$(41) \quad \begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида системы, а  $Y = KP$ .



В процессе доказательства теоремы 3 строится функция Ляпунова  $V(x)$  для замкнутой системы, такая что  $\dot{V}(x) \leq 0$  при  $V(x) \geq 1$  и  $w^T w \leq 1$ . Естественно задаться целью найти ограниченное внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$ , максимизирующее  $\dot{V}(x)$  (так называемое “наихудшее” возмущение). Ответ на этот вопрос дается следующей леммой<sup>2</sup> [47].

*Л е м м а 5.* Для линейной непрерывной системы (31), (2) наихудшее возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{D^T \hat{P}^{-1} x(t)}{\|D^T \hat{P}^{-1} x(t)\|}.$$

В частности, если возмущение одномерно, то

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D^T \hat{P}^{-1} x(t)).$$

*З а м е ч а н и е 6.* В качестве критерия можно выбрать норму матрицы ограничивающего эллипсоида по выходу замкнутой системы, т.е. минимизировать радиус шара, содержащего этот эллипсоид. Такая постановка задачи также допускает решение в терминах LMI и SDP. Соответствующий аналог теоремы 3 может быть получен добавлением к условиям теоремы еще одного линейного матричного неравенства

$$(42) \quad CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T \preceq \lambda I$$

и заменой (33) на минимизацию по скалярной переменной  $\lambda$ .

Отметим, что вместо евклидовых ограничений (2) на допустимые возмущения можно наложить интервальные ограничения

$$|w_i(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

При такой постановке можно получить субоптимальное решение задачи в терминах LMI и SDP. Соответствующий аналог теоремы 3 получается заменой (34) на

$$(43) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^T & D \\ D^T & -\text{diag}\{\beta_1 \dots \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0$$

с добавлением ограничения

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha,$$

где  $\beta_1, \dots, \beta_m$  — дополнительные скалярные переменные.

Рассмотрим модификацию итерационного метода, описанного в разделе 2.2, для задачи (31), (2). Применяя соответствующую технику к замкнутой системе (36) и вводя матричную переменную

$$Y = KP,$$

приходим к линейному матричному неравенству

$$(44) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + B_1 Y + (B_1 Y)^T & \beta D & F \\ * & -I & 0 \\ * & * & P - 2\beta F \end{pmatrix} \preceq 0.$$

<sup>2</sup>В ней, по-существу, происходит выход за класс программных внешних возмущений и допускается их зависимость от фазового состояния системы.

Таким образом, приходим к задаче минимизации (33) при ограничениях (44) и (35). Как и ранее, взяв в качестве  $F_0$  произвольную (достаточно большую) симметрическую матрицу, на  $(k + 1)$ -м итерационном шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k}{\beta_k}.$$

Авторами разработаны модификации итеративного метода для всех типов задач, рассмотренных в настоящем обзоре; метод полностью распространим и на дискретные варианты задач.

*З а м е ч а н и е 7. Системы, рассматриваемые в обзоре (как непрерывные, так и дискретные) относятся к классу так называемых *strictly proper systems*,<sup>3</sup> в выводе которых отсутствует компонента внешних возмущений, в отличие от *proper systems*, в выводе которых внешние возмущения присутствуют. Предлагаемый итеративный метод легко распространим на *proper systems* в отличие от описываемого в обзоре подхода, который приводит в этом случае к многомерной минимизации.*

### 3.2. Одномерные задачи

Покажем, что приведенные методы синтеза регуляторов позволяют решать многие классические инженерные задачи управления линейными системами с одним входом – одним выходом. В этих задачах обычно формулируются требования к переходному режиму, т. е. к реакции системы на единичный скачок. Однако единичный скачок можно рассматривать как частный случай ограниченного внешнего возмущения, поэтому к нему можно применять полученные оценки. Например, если решать задачу минимизации скалярного выхода  $z$  при ограничении на скалярный вход  $|w(t)| \leq 1$  с помощью теоремы 3 и найденный ограничивающий эллипсоид (в данном случае интервал) задается числом  $r$ , то это гарантирует, что реакция на единичный скачок не превосходит  $r$  для всех моментов времени. Иначе говоря, получим оценку возможного перерегулирования. Важно, что эта оценка верна не только для нулевых граничных условий (как это принято в стандартной постановке задачи), но и для всех  $x(0)$  из инвариантного эллипсоида. Отметим, что задача синтеза стабилизирующего регулятора, обеспечивающего заданное перерегулирование, относится к числу трудных в традиционной теории автоматического регулирования. Аналогичным образом могут решаться и другие проблемы (о времени установления, о степени затухания и т.п.).

Остановимся подробнее на оценке *времени установления*. Пусть  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида для системы (1), (2). Как было отмечено выше, траектории системы, исходящие из точек вне инвариантного эллипсоида, стремятся к этому эллипсоиду с течением времени. В [55] получена оценка времени  $T_\gamma$ , за которое траектории системы, исходящие из точки  $x_0$  вне эллипсоида с матрицей  $\gamma P$ ,  $\gamma > 1$ , достигнут этого эллипсоида (в частности, для скалярного случая обычно берут  $\gamma = 1,05$ ).

*Т е о р е м а 4. Пусть  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида для системы (1), (2),  $x_0$  — начальное состояние системы вне эллипсоида с матрицей  $\gamma P$ ,  $\gamma > 1$ . Тогда для*

<sup>3</sup>Русскоязычный аналог термина, по-видимому, отсутствует.

времени установления в системе (1), (2) справедлива оценка

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\alpha_P} \ln \frac{x_0^T P^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1},$$

где  $\alpha_P$  — соответствующее матрице  $P$  значение параметра  $\alpha$  из следствия 2.

**С л е д с т в и е 5.** Если начальное состояние системы (1) принадлежит границе эллипсоида с матрицей  $\delta P$ ,  $\delta \geq \gamma > 1$ , то в предположениях теоремы 4

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\alpha_P} \ln \frac{\delta - 1}{\gamma - 1}.$$

Нетрудно видеть, что в силу линейности, к моменту времени  $T_\gamma$  выход  $z$  системы (1) заведомо достигнет эллипсоида с матрицей  $\gamma C P C^T$  (напомним, что  $C P C^T$  — матрица ограничивающего эллипсоида).

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 4 был найден “физический смысл” параметра  $\alpha$  в следствии 2: пара  $(P, \alpha)$ , удовлетворяющая соотношению (16), определяет матрицу  $P$  инвариантного эллипсоида и наименьшую экспоненциальную скорость  $\alpha$  стремления квадратичных функций Ляпунова, построенных на решениях системы (1), (2) при данной матрице  $P$  извне к этому эллипсоиду.

Полученный результат легко обобщается на задачу синтеза оптимального управления.

**Т е о р е м а 5.** Пусть  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида для системы (31), (2),  $x_0$  — начальное состояние системы вне эллипсоида с матрицей  $\gamma P$ ,  $\gamma > 1$ . Тогда для времени установления в системе (31), (2) справедлива оценка

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\alpha_P} \ln \frac{x_0^T P^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1},$$

где  $\alpha_P$  — соответствующее матрице  $P$  значение параметра  $\alpha$  из теоремы 3.

### 3.3. Пример: двухмассовая система

Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи управления *двухмассовой системой* [56], т. е. системой из двух твердых тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных пружиной с коэффициентом упругости  $k$ , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1). Эта задача часто используется как тестовая для различных методов синтеза регуляторов.

Управляющее воздействие  $u$  прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = (w_1 \quad w_2)^T,$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно. Возмущение предполагается удовлетворяющим ограничению (2), т. е. произвольным, но ограниченным в любой момент времени.

Обозначим через  $x_1, v_1$  соответственно координату и скорость левого тела, а через  $x_2, v_2$  — правого тела. Тогда

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2)^T$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение. При этом, как следует из законов классической механики, непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u + \frac{1}{m_1}w_1, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w_2,\end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$(45) \quad \dot{x} = Ax + B_1u + Dw,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}.$$

В качестве выхода системы возьмем вектор

$$z = (u \quad x_2)^T,$$

характеризующийся величиной управления и координатой правого тела, на которое непосредственно не воздействует управление, поэтому

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При единичных параметрах системы ( $k = m_1 = m_2 = 1$ ) с помощью теоремы 3 был построен оптимальный регулятор

$$\widehat{K} \approx (-2,5439 \quad 0,7907 \quad -2,4863 \quad -1,8051)$$

и соответствующий ему минимальный (по критерию следа) ограничивающий эллипс по выходу замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2\widehat{K})\widehat{P}(C + B_2\widehat{K})^T \approx \begin{pmatrix} 13,7108 & -4,6619 \\ -4,6619 & 7,2202 \end{pmatrix}.$$

При этом использовались пакеты SeDuMi и YALMIP в системе MATLAB.

С другой стороны, линейно-квадратичный регулятор (с единичными весовыми матрицами) для рассматриваемой задачи, найденный с помощью Control System Toolbox в системе MATLAB (процедура `lqr`), имеет вид

$$K_{\text{lqr}} \approx (-0,6285 \quad -0,0786 \quad -1,1212 \quad -0,8069).$$

На рис. 2 изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс по выходу для замкнутой системы с регулятором  $\widehat{K}$ . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы

$$x_0 = (0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1)^T$$

и наихудшем внешнем возмущении  $\widetilde{w}(t)$ , определяемом леммой 5, построены две траектории выходной переменной —  $z(t)$ , соответствующая регулятору  $\widehat{K}$  (сплошной линией) и  $z_{\text{lqr}}(t)$ , соответствующая регулятору  $K_{\text{lqr}}$  (пунктиром). Кругочками показаны начальные точки траекторий  $z(0)$  и  $z_{\text{lqr}}(0)$ .

Видно, что траектория замкнутой системы с регулятором  $K_{\text{lqr}}$  выходит за пределы ограничивающего эллипсоида, тогда как траектория замкнутой системы с регулятором  $\widehat{K}$  в нем остается.

Для сравнения в качестве критерия выберем норму матрицы ограничивающего эллипсоида по выходу замкнутой системы. При этом с помощью замечания 6 был построен оптимальный регулятор

$$\widehat{K} \approx (-2,3021 \ 1,0364 \ -2,3770 \ -1,7754)$$

и соответствующий ему минимальный (по критерию следа) ограничивающий эллипс по выходу замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2\widehat{K})\widehat{P}(C + B_2\widehat{K})^T \approx \begin{pmatrix} 13,3842 & -2,9563 \\ -2,9563 & 10,6228 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3 изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс по выходу (сплошной линией) для замкнутой системы с регулятором  $\widehat{K}$  и наименьший круг (пунктиром), его содержащий.

На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы

$$x_0 = (-1,2032 \ -2,2508 \ -1,6441 \ 0,6584)^T$$

и наихудшем внешнем возмущении  $\widetilde{w}(t)$ , определяемом леммой 5, построены две траектории выходной переменной —  $z(t)$ , соответствующая регулятору  $\widehat{K}$  (сплошной линией) и  $z_{\text{lqr}}(t)$ , соответствующая регулятору  $K_{\text{lqr}}$  (пунктиром). Кругочками показаны начальные точки траекторий  $z(0)$  и  $z_{\text{lqr}}(0)$ .

Видно, что и в этом случае траектория замкнутой системы с регулятором  $K_{\text{lqr}}$  выходит за пределы ограничивающего эллипсоида, тогда как траектория замкнутой системы с регулятором  $\widehat{K}$  в нем остается. Таким образом, предлагаемый метод синтеза, специально нацеленный на подавление внешних возмущений, имеет преимущества (по этому критерию) перед традиционными подходами.

Второй пример — задача минимизации перерегулирования (или всплеска). Рассмотрим систему ( $n = 10$ )

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w.$$

Если выбирать стабилизирующий регулятор  $K_r$  таким образом, чтобы у характеристического полинома замкнутой системы все корни были равны всего лишь  $-2$ , то оказывается, что коэффициенты усиления в цепи обратной связи превышают  $1,5 \cdot 10^4$ . Более того, при  $x_0 = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$  (и единичном внешнем возмущении) компонента  $x_{10}(t)$  решения  $x(t)$  замкнутой системы достигает значения  $\approx 2030$ , т.е. начальное значение возрастает более, чем в 2000 раз, прежде, чем начать убывать.

С другой стороны, для задачи минимизации выхода  $z = (u \ x_{10})^T$  системы при ограничении  $P \prec 5000I$  на фазовое состояние с помощью теоремы 3 был построен оптимальный регулятор  $\hat{K}$  с компонентами  $|\hat{K}_i| \leq 250$ , при котором  $\max_t |x_{10}(t)| \leq 70$ , а  $\max_t |u(t)| \leq 970$ . Отметим, что при этом  $\max_i \max_t |x_i(t)| \leq 130$ .

На рис. 4 при начальном состоянии  $x_0$  и единичном внешнем возмущении построены две траектории:  $x_{10}(t)$ , соответствующая регулятору  $\hat{K}$  (сплошной линией), и  $x_{10}^r(t)$ , соответствующая регулятору  $K_r$  (пунктиром).

### 3.4. Дискретная система

Приведем в этом разделе дискретные аналоги предыдущих результатов. Рассмотрим линейную дискретную систему

$$(46) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u_k \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (21); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Требуется найти регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$(47) \quad u_k = Kx_k,$$

обеспечивающий минимальный по критерию следа (15) размер ограничивающего эллипсоида по выходу (29).

В [47] установлен дискретный аналог теоремы 3; приведем его в следующей формулировке.

*Т е о р е м а 6. Решение  $\hat{P}, \hat{Y}$  задачи минимизации*

$$(48) \quad \text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(49) \quad \begin{pmatrix} -\alpha P & (AP + B_1 Y)^T & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^T + C\hat{Y}^T B_2^T + B_2 \hat{Y} C^T + B_2 \hat{Z} B_2^T$$

минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида по выходу и статический регулятор по состоянию

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},$$

оптимально подавляющий внешние возмущения.

Как и в непрерывном случае, согласно [47] исходная задача синтеза статического регулятора по состоянию (47), оптимально (в смысле следа ограничивающего эллипсоида по выходу системы) подавляющего внешние возмущения в системе (46), (21), эквивалентна полученной задаче (48)–(49), т. е. полученные условия являются необходимыми и достаточными.

Как и в непрерывном случае, в формулировке теоремы 6 отсутствует утверждение о строгой выпуклости целевой функции и границах интервала для параметра  $\alpha$ .

При этом, как и ранее,

$$\|u_k\| \leq \|\widehat{K}\widehat{P}^{1/2}\|.$$

В процессе доказательства теоремы 6 строится функция Ляпунова  $V(x_k)$  для замкнутой системы такая, что  $V(x_{k+1}) \leq 1$  при  $V(x_k) \leq 1$  и  $w_k^T w_k \leq 1$ . Естественно найти ограниченное внешнее возмущение  $\tilde{w}_k$ , максимизирующее  $V(x_{k+1})$  (“наихудшее” возмущение). Ответ дается следующей леммой [47], являющейся дискретным аналогом леммы 5.

*Л е м м а 6.* Для линейной дискретной системы (46), (21) одномерное наихудшее возмущение  $\tilde{w}_k$  задается формулой

$$\tilde{w}_k = \text{sign}(D^T \widehat{P}^{-1}(A + B_1 \widehat{K})x_k).$$

#### 4. Задача фильтрации

Задача фильтрации (т. е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить гарантированные (а не вероятностные) оценки состояний. Такой подход был предложен в конце 60-х – начале 70-х гг. прошлого века в работах американских ученых Г. Виценхаузена, Д. Бертсекаса и И. Родеса, Ф. Швеппе [20]. Примерно в это же время подобные проблемы разрабатывались в семинаре Н.Н. Красовского такими исследователями как А.Б. Куржанский, А.И. Субботин, Ю.С. Осипов и др., см. [22]. Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф.И. Черноусько [23]. В частности, в [20, 22, 23] была развита эллипсоидальная техника фильтрации. Обзор результатов в этой области можно найти в [57–61].

В настоящем разделе рассматривается проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями для линейных *стационарных* задач, когда все параметры модели не зависят от времени. Более того, ищется оценка состояния такая, что ее ошибка гарантированно заключена в инвариантный эллипсоид для всех моментов времени, т. е. оценка является равномерной. Сам фильтр также ищется в классе линейных стационарных фильтров. В этом суженном классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т. е. удастся построить *оптимальный* фильтр и оценку состояния. Этим данная

постановка задачи отличается от упомянутых выше; там рассматривались более общие модели, однако получаемое решение было лишь субоптимальным, а равномерность оценок не имела места.

Применяемый аппарат линейных матричных неравенств ранее не очень широко применялся в задачах фильтрации; исключением может служить статья [32]. В [62, 63], которые описаны ниже, во-первых, даются более простые и точные оценки качества фильтрации; во-вторых, они обобщаются на дискретный случай; в-третьих, исследуется поведение оценок при больших начальных отклонениях.

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$(50) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (2); пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема. Для того чтобы разделить компоненты, порожденные внешними возмущениями в состоянии и выходе системы, потребуем, чтобы  $D_1 D_2^T = 0$ .

Пусть состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}$ :

$$(51) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}).$$

Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица  $L$ . Эта структура такая же, как в известном наблюдателе Люенбергера [64].

Введем в рассмотрение невязку

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

характеризующую точность фильтрации. Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) единого инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}$ , содержащего невязку  $e$ . Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых отклонениях и равномерная по  $t$ ) точность фильтрации.

Прежде всего отметим, что из условия управляемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида. Инвариантных эллипсоидов много, цель — найти минимальный из них при фиксированном стабилизирующем  $L$ , а затем добиться минимума этого эллипсоида по  $L$ . По-прежнему удобно считать тот эллипсоид минимальным, у которого минимален след его матрицы.

В [62] установлена справедливость следующей теоремы.

*Т е о р е м а 7. Решение  $\hat{Q}, \hat{Y}$  задачи минимизации*

$$(52) \quad \text{tr } H \longrightarrow \min$$



при ограничениях

$$(53) \quad \begin{pmatrix} A^T Q + QA + \alpha Q - YC - (YC)^T & QD_1 - YD_2 \\ (QD_1 - YD_2)^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(54) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$$

минимального (по критерию следа) инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду оптимальную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y}.$$

В [62] показано, что исходная задача синтеза оптимальной (в смысле следа инвариантного эллипсоида, содержащего невязку) матрицы фильтра (51) для системы (50), (2) эквивалентна полученной задаче (52)–(54), т.е. полученные условия являются необходимыми и достаточными.

Отметим, что одномерная минимизация по  $\alpha$  вновь оказывается выпуклой, однако строгое обоснование этого факта остается открытой задачей.

В некоторых случаях имеется априорная информация о начальном состоянии системы:

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_0^{-1} x \leq 1\}.$$

Тогда выбирая  $\hat{x}(0) = 0$  можно гарантировать, что  $e(0) \in \mathcal{E}_0$ . Если потребовать, чтобы  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ , то можно гарантировать, что  $e(t) \in \mathcal{E}$  для всех  $t$ . Итак, если к системе линейных матричных неравенств в теореме 7 добавить линейное матричное неравенство

$$Q \preceq P_0^{-1},$$

то получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности фильтрации.

*З а м е ч а н и е 8.* Нередко нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния  $x$ , а лишь некоторых. Пусть имеется выход

$$y_1 = C_1 x$$

(например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x})$$

возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации  $\text{tr } C_1 P C_1^T$  вместо  $\text{tr } P$ , что легко может быть записано в форме, аналогичной линейному матричному неравенству (54):

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Отметим также, что можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, можно минимизировать  $L_\infty$ -норму невязки (как это сделано в [32]), т.е. радиус шара, содержащего эллипсоид  $\mathcal{E}$ . Для этого потребуем  $r \rightarrow \max$  при дополнительном ограничении

$$Q \succcurlyeq rI.$$

Аналогичные вышеприведенным результаты получены и для линейной дискретной системы

$$(55) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным во все моменты времени:  $\|w_k\| \leq 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема. Для того, чтобы разделить компоненты, порожденные внешними возмущениями в состоянии и выходе системы, потребуем  $D_1 D_2^T = 0$ .

Построим фильтр, описываемый линейным уравнением с постоянной матрицей  $L$  относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ :

$$(56) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k).$$

Введем в рассмотрение невязку  $e_k = x_k - \hat{x}_k$ . Задачей является нахождение такой матрицы  $L$ , которая обеспечивает минимальность инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}$ , содержащего невязку  $e_k$ .

В [62] установлен дискретный аналог теоремы 7, приведем его в следующей формулировке.

*Т е о р е м а 8. Решение  $\hat{Q}, \hat{Y}$  задачи минимизации*

$$(57) \quad \text{tr } H \rightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(58) \quad \begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA - YC)^T & 0 \\ * & -Q & QD_1 - YD_2 \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$$

минимального (по критерию следа) инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду оптимальную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y}.$$

В [62] показано, что исходная задача синтеза оптимальной (в смысле следа инвариантного эллипсоида, содержащего невязку) матрицы фильтра (56) для системы (55), (21) эквивалентна полученной задаче (57)–(58), т. е. полученные условия являются необходимыми и достаточными.

Отметим, что в данном случае замечание 8 также сохраняет свою силу.

В разделе 7 будут рассмотрены робастные варианты задачи, когда описание системы содержит неопределенности (т. е. матрицы  $A, D_1$  включают ограниченные неопределенности). Проблема заключается в построении фильтра и гарантированных оценок его точности, справедливых при любых допустимых неопределенностях. Эта задача разрешима с использованием той же техники, что и выше.

## 5. Обратная линейная связь по выходу

В настоящем разделе рассматривается синтез обратной связи по выходу, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. Поскольку цель данной работы — систематическое использование техники линейных матричных неравенств и сведение задач к формату полуопределенного программирования, то, как и в предыдущих разделах, задача синтеза управления по выходу сводится к эквивалентным условиям в виде LMI и задаче SDP. При этом используется оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера [18, 64].

По-видимому, наиболее близкой к излагаемым ниже результатам является работа [32]. Однако в [32] рассматривается лишь непрерывная задача, тогда как ниже анализируются случаи и непрерывного, и дискретного времени; кроме того, исследуются различные обобщения задачи по сравнению с [32]: случай ненулевых начальных условий, ограниченных управлений, различных критериев оптимальности. Приводимые ниже результаты в основном получены в [65].

### 5.1. Непрерывная система

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$(59) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_2w, \\ z &= C_2x + B_2u, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , оптимизируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (2); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема. Для того чтобы разделить компоненты, порожденные внешними возмущениями в состоянии и наблюдаемом выходе системы, потребуем  $D_1 D_2^T = 0$ .

Система (59) при возмущениях, ограниченных в  $L_2$ , рассматривалась в классических работах по  $H_2$ - и  $H_\infty$ -оптимизации. В частности, в [30] был построен общий динамический регулятор, решающий задачу синтеза. Как и ранее, рассматриваются ограниченные возмущения, а критерием является размер ограничивающего эллипсоида по выходу системы.

Пусть состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход  $z$ .

По-прежнему будем рассматривать инвариантные эллипсоиды как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В данном случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы  $z(t)$ . В этой связи будем интересоваться минимальными в некотором смысле ограничивающими эллипсоидами по выходу системы.

Как и ранее, в качестве целевой функции будем рассматривать критерий следа, который соответствует сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида по выходу исходной системы. В качестве критерия можно рассматривать и другие функции, например объем или наибольшую полуось эллипсоида. Однако в силу линейности наиболее прост именно критерий следа. Тем самым степень влияния  $L_\infty$ -ограниченных внешних возмущений на выход системы сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида, минимального по критерию следа.

Отметим, что такой подход легко позволяет учесть возможную неопределенность в начальном условии системы, как это сделано в разделе 2.

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C_1\hat{x}$ :

$$(60) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1u + L(y - C_1\hat{x}).$$

Заметим, что для задач фильтрации (т.е. оценки состояний при отсутствии управления) свойства наблюдателя (60) исследованы в разделе 4.

Введем в рассмотрение невязку  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ; согласно (59), (60) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC_1)e + (D_1 - LD_2)w.$$

Введем в рассмотрение вектор  $g = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ . Тогда при построении обратной связи с помощью динамического регулятора (60)

$$u = K\hat{x}$$

приходим к замкнутой системе

$$(61) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \mathcal{A}g + \mathcal{D}w, \\ z &= \mathcal{C}g, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A + B_1K & LC_1 \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} LD_2 \\ D_1 - LD_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (C_2 + B_2K \quad C_2).$$

Это — задача анализа, рассмотренная выше в разделе 2. Соответственно, поступим следующим образом: заключим  $g$  в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$ , порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P \succ 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид по выходу  $z$ , порожденный матрицей  $CPCT^T$ .

Следующая теорема, условия которой являются достаточными, т.е. приводящими к субоптимальным решениям, установлена в работе [65]; приведем ее в уточненной формулировке.

*Т е о р е м а 9. Решение  $\hat{P}_1, \hat{Q}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{H}$  задачи минимизации*

$$(62) \quad \text{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^T + B_2Y_1C_2^T + C_2Y_1^TB_2^T + B_2Z_1B_2^T] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(63) \quad \begin{pmatrix} Z & & Y_2C_1 & & 0 & Y_2D_2 \\ * & A^TQ_2 + Q_2A + \alpha Q_2 - Y_2C_1 - (Y_2C_1)^T & & & Q_2D_1 & -Y_2D_2 \\ * & & * & & -\alpha I & 0 \\ * & & * & & * & -\alpha I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$(64) \quad \begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & & I \\ I & & -(AP_1 + P_1A^T + \alpha P_1 + B_1Y_1 + (B_1Y_1)^T) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$(65) \quad \begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^T & P_1 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_2 = Q_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_1 = Z_1^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C_2(\hat{P}_1 + \hat{H})C_2^T + B_2\hat{Y}_1C_2^T + C_2\hat{Y}_1^TB_2^T + B_2\hat{Z}_1B_2^T$$

ограничивающего эллипсоида по оптимизируемому выходу системы и соответствующие этому эллипсоиду динамический регулятор

$$\hat{K} = \hat{Y}_1\hat{P}_1^{-1}$$

и матрицу наблюдателя

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1}\hat{Y}_2.$$

В рамках данного подхода к подавлению внешних возмущений естественно потребовать введения ограничений на управление, как это сделано в разделе 3. Пусть

$$(66) \quad \|u\| \leq \mu, \quad \mu > 0.$$

Как следует из структуры матрицы  $\hat{P}$ , матрица  $\hat{P}_1$  определяет инвариантный эллипсоид для наблюдателя  $\hat{x}$ , а матрица  $\hat{Q}_2^{-1}$  — инвариантный эллипсоид для невязки  $e$ . Согласно лемме 4 раздела 3 при наличии ограничения на управление вида (66) к условиям теоремы 9 добавляется линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} P_1 & Y_1^T \\ Y_1 & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

## 5.2. Пример: двухмассовая система

Продемонстрируем предложенный подход на примере задачи управления двухмассовой системой, рассмотренной в разделе 3.3. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы по-прежнему описывается соотношением (45). В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = (x_1 + w_3 \quad x_2)^T,$$

содержащий возмущение  $w_3$ , а в качестве минимизируемого — как и раньше, вектор

$$z = (u \quad x_2)^T,$$

поэтому

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор возмущений

$$w = (w_1 \quad w_2 \quad w_3)^T$$

предполагается удовлетворяющим ограничению (2).

С помощью теоремы 9 был построен регулятор

$$\hat{K} \approx (-1,6072 \quad 0,2759 \quad -1,9126 \quad -1,3343)$$

и матрица фильтра

$$\hat{L} \approx \begin{pmatrix} 1,2681 & 0,1369 \\ 0,2667 & 1,1859 \\ 0,6422 & 0,3744 \\ 0,2206 & 0,8480 \end{pmatrix},$$

а также соответствующий им ограничивающий эллипс по выходу замкнутой системы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 57,6518 & -29,7147 \\ -29,7147 & 77,0150 \end{pmatrix}.$$

При этом использовались пакеты SeDuMi и YALMIP в системе MATLAB.

С другой стороны, был построен динамический  $H_\infty$ -регулятор с помощью Robust Control Toolbox (процедура `hinfsyn`) в системе MATLAB. При этом

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \approx -0,0114,$$

где  $A_c$  — замкнутая матрица системы с  $H_\infty$ -регулятором, т. е. замкнутая система получилась слабо устойчивой.

На рис. 5 изображен найденный ограничивающий эллипс по выходу для замкнутой системы с регулятором  $\hat{K}$ . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и некотором внешнем возмущении построены две траектории выходной переменной:  $z(t)$ , соответствующая регулятору  $\hat{K}$  (сплошной линией) и  $z_{H_\infty}$ , соответствующая  $H_\infty$ -регулятору (пунктиром). Кружочками показаны начальные точки траекторий  $z(0)$  и  $z_{H_\infty}(0)$ . Видно, что траектория замкнутой системы с  $H_\infty$ -регулятором выходит за пределы ограничивающего эллипсоида — происходит выброс далеко за его пределы, тогда как траектория замкнутой системы с регулятором  $\hat{K}$  в нем остается.

### 5.3. Дискретная система

Рассмотрим теперь дискретную линейную систему

$$(67) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + D_1 w_k, \\ y_k &= C_1 x_k + D_2 w_k, \\ z_k &= C_2 x_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , оптимизируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (21); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема. Для того чтобы разделить компоненты, порожденные внешними возмущениями в состоянии и наблюдаемом выходе системы, потребуем  $D_1 D_2^T = 0$ .<sup>4</sup>

Пусть состояние  $x_k$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Задача заключается в нахождении минимального (по-прежнему, в смысле следа) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход  $z_k$ .

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода  $y_k$  и его прогноза  $C_1 \hat{x}_k$ :

$$(68) \quad \hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B_1 u_k + L(y_k - C_1 \hat{x}_k).$$

Введем в рассмотрение невязку  $e_k = x_k - \hat{x}_k$ ; согласно (67), (68) она удовлетворяет разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC_1)e_k + (D_1 - LD_2)w_k.$$

Введем в рассмотрение вектор  $g_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ . Тогда при построении обратной связи с помощью динамического регулятора (68)

$$u_k = K \hat{x}_k$$

приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \mathcal{A}g_k + \mathcal{D}w_k, \\ z_k &= \mathcal{C}g_k, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A + B_1 K & LC_1 \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} LD_2 \\ D_1 - LD_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (C_2 + B_2 K \quad C_2).$$

Поступим следующим образом: заключим  $g_k$  в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$ , порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P \succ 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид по выходу  $z_k$ , порожденный матрицей  $\mathcal{C}P\mathcal{C}^T$ .

<sup>4</sup>В отличие от непрерывного случая нижеприведенная теорема 10 будет справедлива, даже если это условие не выполнено.

В [65] установлена справедливость следующей теоремы, условия которой являются достаточными, т. е. приводящими к субоптимальным решениям; приведем ее в уточненной формулировке.

*Т е о р е м а 10. Решение  $\hat{P}_1, \hat{Q}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{H}$  задачи минимизации*

$$(69) \quad \text{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^T + B_2Y_1C_2^T + C_2Y_1^TB_2^T + B_2Z_1B_2^T] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(70) \quad \begin{pmatrix} Z & Y_2C_1 & Y_2D_2 & 0 \\ * & \Lambda_1 & \Lambda_2 & (Y_2C_1)^T \\ * & * & \Lambda_3 & (Y_2D_2)^T \\ * & * & * & -Q_2 \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^T & P_1 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$(71) \quad \begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -\frac{1}{\alpha}(AP_1A^T + B_1Y_1A^T + AY_1^TB_1^T + B_1Z_1B_1^T) + P_1 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

*где*

$$\Lambda_1 = A^TQ_2A - A^TY_2C_1 - C_1^TY_2^TA - \alpha Q_2,$$

$$\Lambda_2 = A^TQ_2D_1 - C_1^TY_2^TD_1 - A^TY_2D_2,$$

$$\Lambda_3 = D_1^TQ_2D_1 - D_2^TY_2^TD_1 - D_1^TY_2D_2 - (1 - \alpha)I,$$

*а минимизация проводится по матричным переменным  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_2 = Q_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_1 = Z_1^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу*

$$C_2(\hat{P}_1 + \hat{H})C_2^T + B_2\hat{Y}_1C_2^T + C_2\hat{Y}_1^TB_2^T + B_2\hat{Z}_1B_2^T$$

*ограничивающего эллипсоида по оптимизируемому выходу системы и соответствующие этому эллипсоиду динамический регулятор*

$$\hat{K} = \hat{Y}_1\hat{P}_1^{-1}$$

*и матрицу наблюдателя*

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1}\hat{Y}_2.$$

## 6. Линейный динамический регулятор

В настоящем разделе рассматривается задача подавления неслучайных  $L_\infty$ -ограниченных внешних возмущений в линейной стационарной системе управления с помощью линейного динамического регулятора по выходу. По-видимому, впервые идея стабилизирующего динамического регулятора по выходу системы появилась в работах Френсиса и Уонема (см. [66–68]) под названием “принцип внутренней модели” (internal model principle). Динамические регуляторы давно привлекают к себе внимание; в частности, в [69] показано, что  $l_1$ -оптимальный регулятор должен быть динамическим.



Способ построения линейного динамического регулятора по выходу пониженного и полного порядка для гашения возмущений, ограниченных в  $L_2$ -норме, был предложен в монографии Д.В. Баландина и М.М. Когана [30, гл. 8] (см. также [70]); при этом синтез  $H_\infty$ -регулятора сводится к решению линейных матричных неравенств.

Несмотря на то, что в данной работе, как и в [47, 62, 65], рассматриваемая проблема сводится к решению задачи полуопределенного программирования и последующей одномерной минимизации, идейное отличие состоит в том, что исходя из результатов Д.В. Баландина и М.М. Когана отдельно находится минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу рассматриваемой системы, а затем определяются параметры динамического регулятора.

### 6.1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$(72) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_2w, \\ z &= C_2x, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (2); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Задачей является нахождение минимального (в некотором смысле) эллипсоида, содержащего регулируемый выход  $z$ .

Будем искать стабилизирующий линейный динамический регулятор полного порядка по выходу вида

$$(73) \quad \begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, & x_r(0) &= 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

где  $x_r \in \mathbb{R}^n$  — состояние регулятора,  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{p \times l}$  — его параметры.

Введя в рассмотрение вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

с учетом (72), (73) приходим к замкнутой системе

$$(74) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= A_c g + D_c w, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= Cg, \end{aligned}$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A + B_1 D_r C_1 & B_1 C_r \\ B_r C_1 & A_r \end{pmatrix}, \quad D_c = \begin{pmatrix} B_1 D_r D_2 + D_1 \\ B_r D_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_2 \ 0).$$

Следуя вышеописанному подходу, мы заключим вектор состояния  $g$  системы (74) в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$  с матрицей  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $P \succ 0$  и будем минимизировать ограничивающий эллипсоид по выходу  $z$  с матрицей  $CPCT^T$ . Соответствующий результат представлен следующей теоремой [71].

*Т е о р е м а 11. Решение  $\widehat{P}_{11}, \widehat{Q}_{11}, \widehat{\alpha}$  задачи*

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^T \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(75) \quad \begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^T + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^T & D_1 \\ D_1^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(76) \quad \begin{pmatrix} Q_{11}A + A^T Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^T C_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^T D_2 \\ D_1^T Q_{11} - \mu_2 D_2^T C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^T D_2 \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(77) \quad \begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succeq 0$$

по матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\mu_1, \mu_2$  и скалярному параметру  $\alpha$  определяет матрицу  $C_2 \widehat{P}_{11} C_2^T$  ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы (72).

При этом параметры

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

динамического регулятора полного порядка (73) являются решениями линейного матричного неравенства

$$(78) \quad \begin{pmatrix} \widetilde{A}\widehat{P} + \widehat{P}\widetilde{A}^T + \widehat{\alpha}\widehat{P} & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^T & -\widehat{\alpha}I \end{pmatrix} + M\Delta_r N \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M\Delta_r N)^T \preceq 0,$$

где

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = \widehat{P}_{11} - \widehat{Q}_{11}^{-1},$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при фиксированном  $\alpha$  условия теоремы представляют собой линейные матричные неравенства по переменным  $P_{11}, Q_{11}, \mu_1, \mu_2$ . Таким образом, пришли к задаче полуопределенного программирования, принадлежащей к классу задач выпуклой оптимизации.

*З а м е ч а н и е 9.* Существует определенный произвол в выборе конкретного решения  $\Delta_r$  линейного матричного неравенства (78). Как показывает практика, вполне удовлетворительный результат дает минимизация  $\|A_r\| \rightarrow \min$  на решениях (78). Для этого потребуем  $\lambda \rightarrow \min$  при дополнительном ограничении

$$\begin{pmatrix} \lambda I & A_r \\ A_r^T & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

*Л е м м а 7.* Если известно начальное условие  $x(0) = x_0$ , то добавляя к линейным матричным неравенствам теоремы 11 неравенство

$$(79) \quad x_0^T Q_{11} x_0 \leq 1,$$

гарантируем равномерную оценку для регулируемого выхода системы (72).

Из леммы 7 вытекает очевидное следствие.

*С л е д с т в и е 6.* Если в начальный момент времени

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_0^{-1} x \leq 1\},$$

то добавляя к линейным матричным неравенствам теоремы 11 неравенство

$$Q_{11} \preceq P_0^{-1},$$

гарантируем равномерную оценку для регулируемого выхода системы (72).

Аналогичным образом динамический регулятор может быть построен и для дискретной постановки задачи.

## 6.2. Пример: управление гиросплатформой

Рассмотрим задачу управления гиросплатформой, описываемой уравнениями (см. [72])

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 400\dot{q}_1 + 0,342\dot{q}_3 + 0,94\dot{q}_4 - 940q_3 + 342q_4 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 400\dot{q}_2 + 0,866\dot{q}_3 + 0,5\dot{q}_4 - 500q_3 + 866q_4 &= 0, \\ 803\dot{q}_1 + 154\dot{q}_2 + 100\dot{q}_3 + 754q_3 + 1130q_4 &= u_1 + w_1, \\ -718\dot{q}_1 - 1070\dot{q}_2 + 200\dot{q}_4 - 867q_3 - 754q_4 &= u_2 + w_2, \end{aligned}$$

где  $q_1, q_2$  — углы прецессии гироскопов,  $q_3, q_4$  — проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси,  $u_1, u_2$  — моменты двигателей стабилизации (управления),  $w_1, w_2$  — возмущающие моменты. При этом наблюдаемый и регулируемый выходы системы совпадают:

$$y = z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Введя вспомогательные фазовые переменные

$$q_5 = \dot{q}_1, \quad q_6 = \dot{q}_2,$$

приходим к системе вида (50) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7,5400 & -11,3000 & -8,0300 & -1,5400 \\ 0 & 0 & 4,3350 & 3,7700 & 3,5900 & 5,3500 \\ 0 & 0 & 938,5038 & -341,6792 & -400,6283 & -4,5023 \\ 0 & 0 & 504,3621 & -858,0992 & 5,1590 & -401,3414 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0100 & 0 \\ 0 & 0,0050 \\ -0,0034 & -0,0047 \\ -0,0087 & -0,0025 \end{pmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 0.$$

В данной постановке задачи на внешние возмущения накладываются не евклидовы ограничения (2), а интервальные ограничения вида

$$|w_1(t)| \leq 1000, \quad |w_2(t)| \leq 1000 \quad \forall t \geq 0.$$

Воспользуемся для численного решения задачи свободно распространяемым пакетом `svx` [41] для системы `MATLAB` и определим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0,6320 & -0,0830 \\ -0,0830 & 0,4988 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

ограничивающего эллипса по регулируемому выходу системы и матрицы динамического регулятора

$$A_r = \begin{pmatrix} -0,6059 & -0,1866 & 0,0006 & 0,0002 & 0,0018 & 0,0001 \\ -0,2296 & -0,6279 & 0,0010 & -0,0001 & 0,0008 & 0,0014 \\ -1,8811 & -3,5727 & -2,1216 & -4,2907 & -5,9769 & 4,1113 \\ -7,6487 & 3,8739 & 5,2023 & -0,5526 & 5,0058 & 3,2413 \\ -9,2802 & 8,0976 & -3,1170 & 1,8299 & -2,7136 & -4,5395 \\ 1,1439 & -8,2385 & 0,0632 & 3,1785 & 3,0147 & -5,4583 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0,0015 & 0,0006 \\ 0,0010 & 0,0018 \\ -4,4361 & 3,4516 \\ 4,6544 & 4,8557 \\ -2,4339 & -5,7599 \\ 1,9109 & -5,0212 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -0,2477 & -1,2282 & -0,2164 & -0,4345 & -0,6101 & 0,4136 \\ -0,0840 & -0,9639 & 1,0672 & -0,1223 & 1,0075 & 0,6693 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$

$$D_r = \begin{pmatrix} -0,4590 & 0,3444 \\ 0,9369 & 1,0177 \end{pmatrix} \cdot 10^9;$$

при этом  $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \approx -313,4384$ .

Для внешних возмущений

$$w_1(t) = 410 \sin 5t + 565 \cos 7t,$$

$$w_2(t) = 565 \sin 5t + 410 \sin 7t,$$

на рис. 6 и 7 показаны траектории выхода для построенного динамического регулятора (сплошной линией) и для динамического регулятора, предложенного в [73] (пунктиром). Нетрудно видеть, что полученные результаты отличаются в лучшую сторону от результатов [73].

Разница в результатах будет еще заметнее, если подать в качестве внешних возмущений единичную ступеньку

$$w_1(t) = w_2(t) \equiv 1000.$$

Соответствующие траектории выхода для полученного динамического регулятора (сплошной линией) и для динамического регулятора из [73] (пунктиром) показаны на рис. 8 и 9.

## 7. Робастные варианты

Опишем различные варианты рассмотренных выше задач, включающие ту или иную неопределенность, следуя работам [74–80].

### 7.1. Анализ

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$(80) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D + \Delta D)w, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2). При этом добавлены *системные неопределенности*  $\Delta A$  и  $\Delta D$ , которые имеют структуру

$$(81) \quad \Delta A = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D = F_D \Delta_D H_D,$$

где  $F_A, F_D, H_A, H_D$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а *матричные неопределенности*  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$  удовлетворяют ограничению

$$(82) \quad \|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta_A\|_F \leq 1, \quad \|\Delta_D\|_F \leq 1.$$

Будем полагать, что система (80) устойчива (матрица  $A$  гурвицева), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга.

Заметим, что условия (81)–(82) являются достаточно естественной формой задания неопределенностей системы; неопределенности такой структуры часто возникают в разнообразных технических системах (см. [74]). Нетрудно видеть, что при  $\Delta_A = \Delta_D = 0$  система (80) обращается в систему без неопределенностей (1), рассмотренную в разделе 2.

В [74] установлена следующая теорема, являющаяся робастным аналогом теоремы 1.

*Т е о р е м а 12.* Эллипсоид  $\mathcal{E}_x$  является инвариантным по состоянию для динамической системы (80), (2), (81), (82), если его матрица  $P$  удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$(83) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_D F_D^T & D & PH_A^T & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & H_D^T \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

при некоторых  $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ .

Приведем набросок доказательства; для этого нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением т.н. леммы Питерсена [81, 82].

*Л е м м а 8.* [74] Пусть  $G$  — симметрическая матрица,  $M_1, \dots, M_r$  и  $N_1, \dots, N_r$  — матрицы соответствующих размерностей. Тогда если

$$\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r > 0: \quad G + \sum_{i=1}^r \gamma_i \left( \varepsilon_i M_i M_i^T + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^T N_i \right) \preccurlyeq 0,$$

то

$$G + \sum_{i=1}^r (M_i \Delta_i N_i + (M_i \Delta_i N_i)^T) \preccurlyeq 0, \quad \forall \Delta_i: \quad \|\Delta_i\| \leq \gamma_i \quad \text{или} \quad \|\Delta_i\|_F \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Итак, введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q = P^{-1} \succ 0,$$

построенную на решениях системы (80). Для того чтобы траектории  $x(t)$  системы (80) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad V(x) \leq 1\},$$

потребуем, чтобы при  $V(x) \geq 1$  (и  $w^T w \leq 1$ ) было выполнено  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Как показано в [47], это условие эквивалентно существованию  $\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_D) > 0$  такого, что

$$(84) \quad \begin{pmatrix} P(A + F_A \Delta_A H_A)^T + (A + F_A \Delta_A H_A)P + \alpha(\Delta)P & D + F_D \Delta_D H_D \\ (D + F_D \Delta_D H_D)^T & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что матричное неравенство (84) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ . Тогда неравенство (84) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A (H_A P \quad 0) + \begin{pmatrix} PH_A^T \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^T (F_A^T \quad 0) + \\ & + \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_D (0 \quad H_D) + \begin{pmatrix} 0 \\ H_D^T \end{pmatrix} \Delta_D^T (F_D^T \quad 0) \preccurlyeq 0, \end{aligned}$$

которое в силу леммы 8 выполняется, если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  такие, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} F_A F_A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} P H_A^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A P & 0 \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} F_D F_D^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} 0 \\ H_D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & H_D^T \end{pmatrix} \preceq 0. \end{aligned}$$

По лемме Шура последнее матричное неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству (83), что и завершает доказательство теоремы.

При доказательстве последнего утверждения существенно использовалась лемма 8, верная лишь в части достаточности. Соответственно, получающиеся при этом условия являются достаточными, т.е. приводящими к субоптимальным решениям. Это замечание в равной мере относится ко всем результатам данного раздела. Заметим также, что полученные ниже результаты могут быть легко распространены на случай, когда системные неопределенности зависят от времени.

Требуемая выше гурвицевость матрицы  $A$  и условие управляемости являются необходимыми для того, чтобы линейное матричное неравенство в теореме 12 было разрешимым. Строго говоря, эти условия должны выполняться робастно при всех допустимых неопределенностях (что не вполне просто проверить заранее). Однако в противном случае линейное матричное неравенство (83) будет неразрешимо, что и будет свидетельствовать о том, что инвариантные эллипсоиды не существуют.

Следующая задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений  $w(t)$  и матричных неопределенностей  $\Delta_A, \Delta_D$  на вектор выхода системы  $z(t)$ . В этой связи будем интересоваться минимальным в смысле критерия следа (15) ограничивающим эллипсоидом  $\mathcal{E}_z$ , содержащим выход системы  $z(t)$ .

Соответственно, минимизируя  $\text{tr} CPC^T$  при ограничении (83), по матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$  можно описать общий вид семейства инвариантных эллипсоидов и минимизировать след ограничивающего эллипсоида по выходу  $z$  системы (80).

Аналогичные результаты получены и для линейной дискретной динамической системы

$$(85) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (D + \Delta D)w_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (21), системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$(86) \quad \Delta A_k = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D_k = F_D \Delta_D H_D,$$

где  $F_A, F_D, H_A, H_D$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$  удовлетворяют ограничению (82).

Будем полагать, что система (20) устойчива (матрица  $A$  шуровская), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга. Нетрудно видеть, что при  $\Delta_A = \Delta_D = 0$  система (85) обращается в систему без неопределенностей (20), рассмотренную в разделе 2.

В [74] установлена следующая теорема, являющаяся робастным аналогом теоремы 2 и дискретным аналогом теоремы 12.

*Т е о р е м а 13. Эллипсоид  $\mathcal{E}_x$  является инвариантным для динамической системы (85), (21), (86), (82), если его матрица  $P$  удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$(87) \quad \begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T & 0 & PH_A^T & 0 \\ * & -P + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_D F_D^T & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & H_D^T \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некоторых  $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ .

Задача по-прежнему состоит в оценке степени влияния внешних возмущений  $w(t)$  и матричных неопределенностей  $\Delta_A, \Delta_D$  на вектор выхода системы  $z(t)$ . В этой связи нас будут интересовать нахождение минимального в смысле критерия следа (15) ограничивающего эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ , содержащего выход системы  $z(t)$ . Соответственно, как и в непрерывном случае, минимизируя  $\text{tr} CPC^T$  при ограничении (87), по матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$  можно описать общий вид семейства инвариантных эллипсоидов и минимизировать след ограничивающего эллипсоида по выходу  $z_k$  системы (85).

## 7.2. Обратная линейная связь по состоянию: синтез

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$(88) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B_1 + \Delta B_1)u + (D + \Delta D)w, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системные неопределенности  $\Delta A, \Delta B_1$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$(89) \quad \Delta A(t) = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta B_1(t) = F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1}, \quad \Delta D(t) = F_D \Delta_D H_D,$$

где  $F_A, F_{B_1}, F_D, H_A, H_{B_1}, H_D$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, матричные неопределенности  $\Delta_A, \Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$  удовлетворяют ограничениям

$$(90) \quad \|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_{B_1}\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta_A\|_F \leq 1, \quad \|\Delta_{B_1}\|_F \leq 1, \quad \|\Delta_D\|_F \leq 1;$$

кроме того пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Целью является нахождение регулятора  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию (32), который стабилизирует замкнутую систему и в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида выхода подавляет воздействие внешних возмущений  $w$ .

Следующая теорема является робастным аналогом теоремы 3.



Т е о р е м а 14. [74] Решение  $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$  задачи минимизации

$$(91) \quad \text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$(92) \quad \begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^T & (H_{B_1} Y)^T & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & 0 & H_D^T \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где

$$\Omega = AP + PA^T + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^T + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^T + \varepsilon_3 F_D F_D^T,$$

а минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\widehat{P}C^T + C\widehat{Y}^T B_2^T + B_2 \widehat{Y} C^T + B_2 \widehat{Z} B_2^T$$

ограничивающего эллипсоида по выходу и статический регулятор по состоянию

$$\widehat{K} = \widehat{Y} \widehat{P}^{-1}.$$

В рамках данного подхода к робастному подавлению внешних возмущений можно также потребовать введения ограничений на управление, как это сделано в разделе 3; при этом лемма 4 сохраняет свою силу.

Следующая лемма является робастным аналогом леммы 5.

Л е м м а 9. [74] Для линейной непрерывной системы (88), (2), (89), (82), где матричные неопределенности ограничены во фробениусовой норме, наилучшее возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{(D + F_D \Delta_D H_D)^T \widehat{P}^{-1} x(t)}{\|(D + F_D \Delta_D H_D)^T \widehat{P}^{-1} x(t)\|}.$$

Аналогичные результаты получены и для линейной дискретной системы

$$(93) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (B_1 + \Delta B_1)u_k + (D + \Delta D)w_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $y_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (21), системные неопределенности  $\Delta A_k, \Delta B_{1k}$  и  $\Delta D_k$  имеют структуру

$$(94) \quad \Delta A_k = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta B_{1k} = F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1}, \quad \Delta D_k = F_D \Delta_D H_D,$$

где  $F_A, F_{B_1}, F_D, H_A, H_{B_1}, H_D$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности  $\Delta_A, \Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$  удовлетворяют ограничению (90); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Требуется найти регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию (47), который стабилизирует замкнутую систему и в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида выхода подавляет воздействие внешних возмущений  $w_k$ .

Следующее утверждение является дискретным аналогом теоремы 14 и робастным аналогом теоремы 6.

*Т е о р е м а 15. Решение  $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$  задачи минимизации*

$$(95) \quad \text{tr}[CPC^T + CY^TB_2^T + B_2YC^T + B_2ZB_2^T] \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(96) \quad \begin{pmatrix} -\alpha P & (AP + B_1Y)^T & 0 & PH_A^T & (HB_1Y)^T & 0 \\ * & \Psi & D & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & H_D^T \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где

$$\Psi = -P + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^T + \varepsilon_3 F_D F_D^T,$$

а минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\widehat{P}C^T + C\widehat{Y}^TB_2^T + B_2\widehat{Y}C^T + B_2\widehat{Z}B_2^T$$

ограничивающего эллипсоида по выходу и статический регулятор по состоянию

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}.$$

Следующая лемма является робастным аналогом леммы 6 и дискретным аналогом леммы 9.

*Л е м м а 10. [74] Для линейной дискретной системы (93), (21), (94), (90) наилучшее одномерное возмущение  $\tilde{w}_k$  задается формулой*

$$\tilde{w}_k = \text{sign}((D + F_D \Delta_D H_D)^T \widehat{P}^{-1} (A + B_1 \widehat{K} + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} \widehat{K}) x_k).$$

### 7.3. Нехрупкий регулятор

Впервые проблема хрупкости стабилизирующего регулятора была поднята С. Бхаттачарией и Л. Килем в [83]. А именно, на разнообразных примерах было показано, что даже при малом изменении параметров регулятора оптимальная система может стать неустойчивой (такие регуляторы в [83] были названы “хрупкими”). Впоследствии появилось большое число работ, развивающих эту тематику ([84, 85] и др.).

Отметим, что вариация параметров регулятора может возникать, главным образом, по двум причинам. Во-первых, по причине его неточной реализации и, во-вторых, при дополнительной настройке параметров регулятора в процессе его использования.

Первой работой на русском языке, посвященной проблеме хрупкости регуляторов, является [86]. В ней использовался термин “грубый регулятор”; авторы обзора считают более целесообразным использовать понятие “хрупкий” из [83], так как “грубость” обычно предполагает малое изменение свойств системы [87]; в рассматриваемом подходе возможные отклонения не предполагаются малыми. В [86] успешно использовался аппарат линейных матричных неравенств, однако предполагалось, что внешние возмущения отсутствуют.

В данном разделе освещается подход (предложенный в [77]) к проблеме построения *нехрупкого* регулятора, т. е. допускающего вариации его параметров, в целях подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов. Главным инструментом при этом, как и ранее, является техника линейных матричных неравенств. Рассматривается синтез нехрупкого регулятора в форме статической обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы.

Итак, рассмотрим линейную непрерывную систему (31), (2). *Нехрупкий регулятор*  $K$  будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию (32) таким образом, чтобы возмущенный регулятор

$$K + \Delta_K$$

при всех  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$  стабилизировал замкнутую систему и в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу подавлял воздействие внешних возмущений  $w(t)$ . Заданная величина  $\gamma_K > 0$  определяет размер *области нехрупкости* регулятора  $K$ . Точнее, требуется найти такое  $K$ , чтобы для любых возмущений параметров регулятора  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$  и для любых допустимых внешних возмущений  $w(t)$  гарантировать малость выхода  $z(t)$  в смысле критерия (15).

В [77] установлена следующая теорема.

*Т е о р е м а 16. Решение (если оно существует)  $\widehat{R}, \widehat{P}, \widehat{Y}$  задачи минимизации*

$$(97) \quad \text{tr } R \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(98) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + B_1 Y + (B_1 Y)^T + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^T & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(99) \quad \begin{pmatrix} -R + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^T & -CP - B_2 Y & 0 \\ * & -P & P \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R = R^T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу  $\widehat{R}$  ограничивающего эллипсоида по выходу системы и статический регулятор по состоянию

$$\widehat{K} = \widehat{Y} \widehat{P}^{-1},$$

стабилизирующий систему с запасом  $\gamma_K$ .

В приведенной постановке задачи число  $\gamma_K$  задано; если оно слишком велико, то может оказаться, что система неравенств неразрешима (нельзя стабилизировать систему с таким запасом нехрупкости).

*З а м е ч а н и е 10.* Результаты, предоставленные теоремой 16, обладают определенным консерватизмом: полученный регулятор обладает бóльшим запасом нехрупкости, чем гарантируемый теоремой; это компенсируется наличием следующей оценки.

Пусть из каких-либо соображений выбран стабилизирующий регулятор  $K$ , т. е. такой, что матрица  $A + B_1K$  устойчива. Назовем его радиусом нехрупкости величину

$$\gamma^0 = \sup\{\gamma: A + B_1(K + \Delta_K) \text{ — устойчива } \forall \Delta_K: \|\Delta_K\| \leq \gamma\}.$$

Оценка  $\underline{\gamma}$  радиуса нехрупкости регулятора снизу получена в [86] в терминах линейных матричных неравенств.

Приведем аналог теоремы 16 для дискретной системы (46), (21). Как и в непрерывном случае, нехрупкий регулятор  $K$  будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию (47) таким образом, чтобы возмущенный регулятор  $K + \Delta_K$  стабилизировал замкнутую систему и в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу подавлял воздействие внешних возмущений  $w_k$  при всех  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

*Т е о р е м а 17.* [77] Решение (если оно существует)  $\widehat{R}, \widehat{P}, \widehat{Y}$  задачи минимизации

$$(100) \quad \text{tr } R \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$(101) \quad \begin{pmatrix} -\alpha P & (AP + B_1Y)^T & 0 & P \\ * & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^T & D & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(102) \quad \begin{pmatrix} -R + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^T & -CP - B_2Y & 0 \\ * & -P & P \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R = R^T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу  $\widehat{R}$  ограничивающего эллипсоида по выходу системы и статический регулятор по состоянию

$$\widehat{K} = \widehat{Y} \widehat{P}^{-1},$$

стабилизирующий систему с запасом  $\gamma_K$ .

Аналогичные результаты получены в [77] для непрерывной системы

$$(103) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + B_1u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системная неопределенность  $\Delta A$  имеет структуру

$$(104) \quad \Delta A = F_A \Delta_A H_A,$$

где  $F_A, H_A$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричная неопределенность  $\Delta_A$  удовлетворяет соотношению

$$(105) \quad \|\Delta_A\| \leq \gamma_A;$$

пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Наконец, в том же объеме в [77] рассмотрен случай дискретной системы

$$(106) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + B_1 u_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k + B_2 u_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $z_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $u_k \in \mathbb{R}^p$  — управление,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (21), системная неопределенность  $\Delta A$  имеет структуру (104), (105). Пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Нетрудно получить аналогичные утверждения и в более общем случае, когда матричные неопределенности структуры (104) содержатся и в матрицах  $B_1$  и  $D$ .

#### 7.4. Задача фильтрации

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$(107) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D_1 + \Delta D_1)w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2), системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D_1$  имеют структуру

$$(108) \quad \Delta A = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D_1 = F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1},$$

где  $F_A, F_{D_1}, H_A, H_{D_1}$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричные неопределенности  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$  удовлетворяют ограничению (82); пара  $(A, B_1)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга. По тем же причинам, что и в неробастном случае, потребуем, чтобы  $D_1 D_2^T = 0$ .

Пусть, как и ранее, состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}$ :

$$(109) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}).$$

Введем в рассмотрение невязку  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , характеризующую точность фильтрации; задачей является нахождение такой матрицы  $L$ , которая обеспечивает минимальность (по критерию следа) инвариантного эллипсоида, содержащего невязку  $e$ .

В [76] установлен робастный аналог теоремы 7; приведем его в следующей формулировке.

*Т е о р е м а 18. Решение  $\hat{Q}, \hat{Y}$  задачи минимизации*

$$(110) \quad \text{tr } H \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(111) \quad \begin{pmatrix} A^T Q + Q A + \alpha Q - Y C - (Y C)^T + \varepsilon_1 H_A^T H_A & Q D_1 - Y D_2 & Q F_A & Q F_{D_1} \\ * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^T H_{D_1} & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$(112) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу  $\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$  инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду матрицу фильтра

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y}.$$

Отметим, что замечание 8 также сохраняет свою силу.

В том же объеме в [76] рассмотрен случай линейной дискретной системы

$$(113) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (D_1 + \Delta D_1)w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned}$$

с некоторым начальным состоянием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние,  $y_k \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (21), системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D_1$  имеют структуру (108), (82). Пара  $(A, D_1)$  управляема,  $C$  — матрица максимального ранга,  $D_1 D_2^T = 0$ .

Пусть, как и ранее, состояние  $x_k$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y_k$  и его прогноза  $C\hat{x}_k$ :

$$(114) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k).$$

Введем в рассмотрение невязку  $e_k = x_k - \hat{x}_k$ , характеризующую точность фильтрации; задачей является нахождение такой матрицы  $L$ , которая обеспечивает минимальность (по критерию следа) инвариантного эллипсоида, содержащего невязку  $e_k$ .

В работе [76] установлена теорема, являющаяся робастным аналогом теоремы 8 и дискретным аналогом теоремы 18, которую приведем в следующей формулировке.

*Т е о р е м а 19. Решение  $\widehat{Q}, \widehat{Y}$  задачи минимизации*

$$(115) \quad \text{tr } H \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(116) \quad \begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon_1 H_A^T H_A & (QA - YC_1)^T & 0 & 0 & 0 \\ * & -Q & QD_1 - YD_2 & QF_A & QF_D \\ * & * & -(1 - \alpha)I + \varepsilon_2 H_D^T H_D & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(117) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу  $\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}$  инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующую этому эллипсоиду матрицу фильтра

$$\widehat{F} = \widehat{Q}^{-1} \widehat{Y}.$$

### 7.5. Линейный динамический регулятор

Пусть система (72) содержит неопределенность, сосредоточенную в матрице  $A$ , т. е.

$$(118) \quad A = A_0 + F_A \Delta_A H_A,$$

где  $A_0$  — номинальное значение матрицы  $A$ , матричная неопределенность  $\Delta_A$  удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta_A\| \leq 1,$$

а  $F_A$  и  $H_A$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Соответствующий аналог теоремы 11 представлен следующей теоремой.

*Т е о р е м а 20. Решение  $\widehat{P}_{11}, \widehat{Q}_{11}, \widehat{\alpha}$  задачи*

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^T \longrightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$(119) \quad \begin{pmatrix} A_0 P_{11} + P_{11} A_0^T + \alpha P_{11} - \mu_1 B_1 B_1^T + \varepsilon_1 F_A F_A^T & D_1 & P_{11} H_A^T \\ & D_1^T & -\alpha I & 0 \\ & H_A P_{11} & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(120) \quad \begin{pmatrix} Q_{11} A_0 + A_0^T Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^T C_1 + \varepsilon_2 H_A^T H_A & Q_{11} D_1 - \mu_2 C_1^T D_2 & Q_{11} F_A \\ & D_1^T Q_{11} - \mu_2 D_2^T C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^T D_2 & 0 \\ & F_A^T Q_{11} & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(121) \quad \begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

по матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярным переменным  $\mu_1, \mu_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha$  определяет матрицу  $C_2 \hat{P}_{11} C_2^T$  ограничивающего эллипсоида по регулируемому выходу системы (72), (118).

При этом параметры

$$\Delta_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

динамического регулятора полного порядка (73) удовлетворяют линейному матричному неравенству

$$(122) \quad \begin{pmatrix} \Omega & \begin{pmatrix} \hat{P} \begin{pmatrix} H_A^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (H_A \ 0) \hat{P} \ 0 \end{pmatrix} & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

где  $\varepsilon$  — скалярная переменная,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tilde{A}_0 \hat{P} + \hat{P} \tilde{A}_0^T + \hat{\alpha} \hat{P} + \begin{pmatrix} \varepsilon F_A F_A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^T & -\hat{\alpha} I \end{pmatrix} + M \Delta_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (M \Delta_r N)^T,$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1},$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

## 8. Заключение

В обзоре рассмотрены результаты, связанные с задачей подавления произвольных ограниченных внешних возмущений. Освещаемый простой и универсальный подход основан на методе инвариантных эллипсоидов, который сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы.

Рассмотрено применение этого метода для решения разнообразных задач, в том числе для задачи управления с помощью линейной обратной связи по состоянию и по выходу (при этом использована оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера); предложен метод решения задачи фильтрации; исследованы различные варианты рассмотренных выше задач, включающие ту или иную неопределенность.

Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволило переформулировать исходные проблемы в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регуляторов непосредственно свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации, легко решаемых численно.



Разумеется, настоящий обзор не охватывает всего многообразия задач управления при наличии ограниченных возмущений. В нем не обсуждались задачи оптимального управления в гарантированной постановке (например, задачи линейно-квадратичной оптимизации с внешними помехами). За рамками обзора остались задачи, в которых ограниченные возмущения имеют специальную структуру (например, состоят из конечного числа гармоник или описываются разностным или дифференциальным уравнением). Кроме того, обзор ограничивается рассмотрением управлений в форме линейной обратной связи; большой интерес представляют другие структуры управления типа скользящих режимов. Наконец, в обзоре совершенно не затронут очень важный класс задач управления нелинейными системами с внешними возмущениями; здесь есть огромное разнообразие постановок задач и техник их решения [88–92].

### Список литературы

1. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. С. 339–342.
2. *Гноенский Л.С.* Задача Булгакова о накоплении возмущений / Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение. Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993.
3. *Уланов Г.М.* Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971.
4. *Жермоленко В.Н.* Максимальное отклонение колебательной системы второго порядка с внешним и параметрическим возмущениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. №3. С. 75–80.
5. *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. №9. С. 73–79.
6. *Барабанов А.Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольным ограниченным шумом // Вест. ЛГУ. Сер.: математика. 1980. Т. 13. С. 119–120.
7. *Vidyasagar M.* Optimal rejection of persistent bounded disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.
8. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор для линейных объектов с ограниченным шумом // АиТ. 1984. №5. С. 39–46.
9. *Dahleh M.A., Pearson J.B.*  $l_1$ -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. No. 32. P. 314–322.
10. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* On the minimax reachability of target sets and target tubes // Automatica. 1971. V. 7. P. 233–247.
11. *Elia N., Dahleh M.A.* Minimization of the worst case peak-to-peak gain via dynamic programming: state feedback case // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. P. 687–701.

12. *Glover D., Schweppe F.* Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. P. 411–423.
13. *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969.
14. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
15. *Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.* Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 753–770.
16. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
17. *Vašar T., Olsder G.* Dynamic Noncooperative Game Theory. N.Y.: Acad. Press, 1982.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // АиТ. 2005. №5. С. 7–46.
20. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice Hall, 1973.
21. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. P. 117–128.
22. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
23. *Черноузько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
24. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. 1996. №1. С. 74–81.
25. *Назин А.В., Назин С.А., Поляк Б.Т.* О сходимости внешних эллипсоидальных аппроксимаций областей достижимости линейных дискретных динамических систем // АиТ. 2004. №8. С. 39–61.
26. *Blanchini F.* Set invariance in control — a survey // Automatica. 1999. V. 35. No. 11. P. 1747–1767.
27. *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Birkhauser, 2008.
28. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on Modern Convex Optimization. Philadelphia: SIAM, 2001.

29. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
30. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
31. *Поляк Б.Т., Щербачков П.С.* Техника  $D$ -разбиения при решении линейных матричных неравенств // *АиТ.* 2006. №11. С. 159–174.
32. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 1996. V. 6. P. 899–927.
33. *Blanchini F., Sznaiier M.* Persistent disturbance rejection via static state feedback // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1995. V. 40. P. 1127–1131.
34. *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2009.
35. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
36. *Nesterov Yu., Nemirovsky A.* Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
37. *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* Matlab 7 в подлиннике. СПб: БХВ-Петербург, 2005.
38. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2004.
39. *Löfberg J.* Yalmip: Software for solving convex (and nonconvex) optimization problems. URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php>.
40. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones (Updated for Version 1.05). URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
41. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL <http://stanford.edu/~boyd/cvx>.
42. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Ellipsoidal approximations to attraction domains of linear systems with bounded control // *Proc. Amer. Control Conf.* St. Louis, USA, June 10–12, 2009. P. 5363–5367.
43. *Venkatash S., Dahleh M.* Does star norm capture  $l_1$  norm? // *Proc. Amer. Control Conf.* Seattle, 1995. P. 944–945.
44. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
45. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
46. *Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A.* Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control.* San Diego, USA, December 13–15, 2006. P. 1429–1434.

47. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ*. 2007. №3. С. 106–125.
48. Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и  $S$ -процедуры // *АиТ*. 2006. №10. С. 77–121.
49. Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления // *Сиб. мат. журн.* 1973. Т. 14. №2. С. 384–419.
50. Polyak B.T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
51. Голуб Дж., Ван Лоан Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1993.
52. Bašar T., Bernhard P.  $H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995.
53. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard  $H^2$  and  $H^\infty$  control problem // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1989. V. 34. No 8. P. 831–847.
54. Zhou K., Doyle J., Glover K. Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice Hall, 1996.
55. Хлебников М.В. Об оценке времени установления в линейной динамической системе с внешними возмущениями // Тр. Второй trad. всерос. молодежной летней школы “Управление, информация и оптимизация”. Переславль-Залесский, 20–27 июня 2010 г. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 152–164.
56. Reinelt W. Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints // *Proc. Amer. Control Conf. Chicago, USA, June 28–30, 2000.* P. 1817–1821.
57. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006.
58. Овсеевич А.И., Тарабанько Ю.В. Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2007. №2. С. 33–44.
59. Фурасов В.Д. Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005.
60. Chernousko F., Polyak B. (eds) Special issue: Set-membership Modelling of Uncertainty in Dynamical Systems. *Math. and Comp. Modelling of Dyn. Syst.* 2005. V. 11. No. 2.
61. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.
62. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *Докл. АН.* 2008. Т. 418. №6. С. 749–753.
63. Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique // *Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, July 6–11, 2008.* P. 15349–15352.

64. *Luenberger D.G.* An introduction to observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 35. P. 596–602.
65. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. №5. С. 72–90.
66. *Francis B.A.* The linear multivariable regulator problem // SIAM J. Control Optimiz. 1977. V. 15. No. 3. P. 486–505.
67. *Francis B.A., Wonham W.M.* The internal model principle for linear multivariable regulators // Appl. Maths. Optimiz. 1975. V. 2. No. 2. P. 170–194.
68. *Francis B.A., Wonham W.M.* The internal model principle of control theory // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
69. *Diaz-Bobillo I.J., Dahleh M.A.* State feedback  $l_1$ -optimal controllers can be dynamic // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. No. 2. P. 87–93.
70. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейно-квадратичные и  $\gamma$ -оптимальные законы управления по выходу // АиТ. 2008. №6. С. 5–14.
71. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. №4. С. 27–42.
72. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
73. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур  $LQ$ -оптимизации // АиТ. 1998. №7. С. 83–95.
74. *Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С.* Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений / Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3. / Под ред. О.Н. Граничина. СПб: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2007. С. 51–84.
75. *Топунов М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // АиТ. 2008. №11. С. 125–139.
76. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. №1. С. 147–161.
77. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // АиТ. 2010. №4. С. 106–119.
78. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant ellipsoids approach to robust rejection of persistent disturbances // Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3976–3981.
79. *Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Extensions of Petersen’s lemma on matrix uncertainty // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 11385–11390.

80. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty // *Automatica*. 2004. V. 40. No. 7. P. 1171–1179.
81. *Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H^\infty$  control theory // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1990. V. 35. No. 3. P. 356–361.
82. *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain systems // *Syst. Control Lett.* 1987. V. 8. P. 351–357.
83. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, fragile, or optimal? // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1997. V. 42. P. 1098–1105.
84. *Jadbabaie A., Abdallah C., Dorato P., Famularo D.* Robust, nonfragile, and optimal controller design via linear matrix inequalities // *Proc. Amer. Control Conf. Philadelphia, USA*, 24–26 June 1998. P. 2842–2846.
85. *Yang G.-H., Wang J.L.* Nonfragile  $H_\infty$  output feedback controller design for linear systems // *J. Dynam. Syst. Measurement, and Control*. 2003. V. 125. No. 1. P. 117–123.
86. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез грубых регуляторов на основе линейных матричных неравенств // *АиТ*. 2006. №12. С. 154–162.
87. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы / Андронов А.А. Собр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 183–187.
88. *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962.
89. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
90. *Кунцевич В.М., Кунцевич А.В.* Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // *АиТ*. 2008. №12. С. 105–118.
91. *Kuntsevich V.M., Kuntsevich A.V.* Robust stability and synthesis of nonlinear discrete control systems under uncertainty // *Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea*, July 6–11, 2008. P. 14330–14335.
92. *Кунцевич В.М., Поляк Б.Т.* Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // *Пробл. управления и информатики*. 2009. №6. С. 6–21.

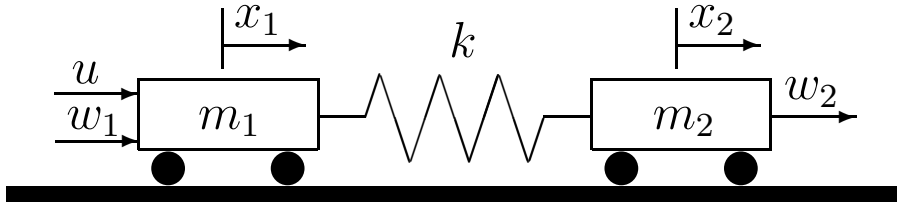


Рис. 1. Двухмассовая система.

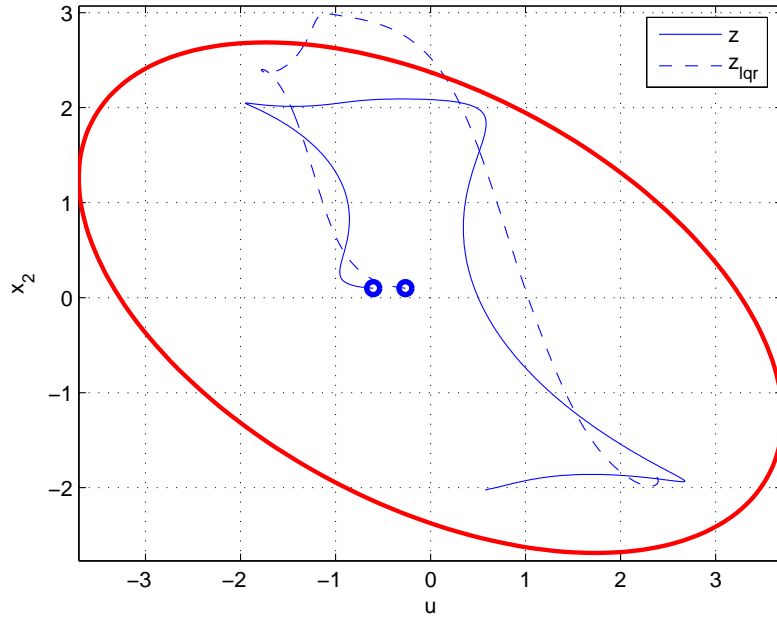


Рис. 2.

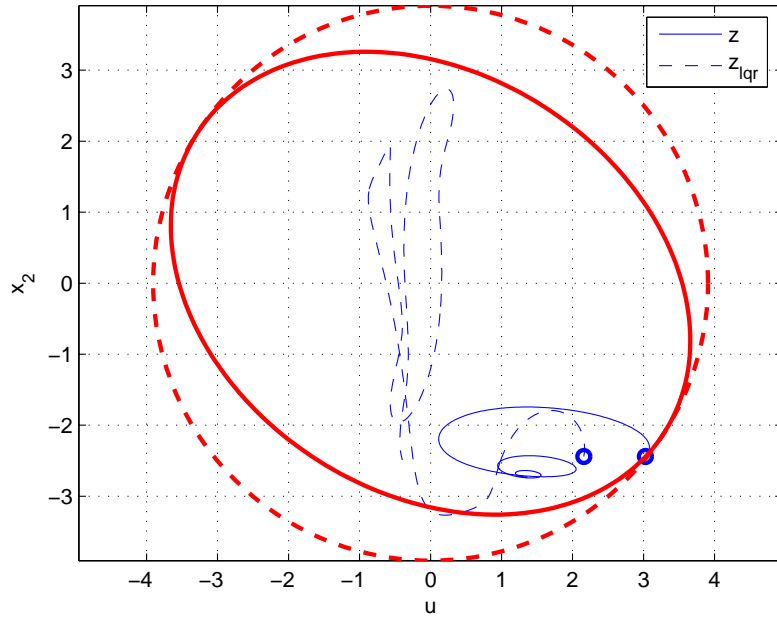


Рис. 3.

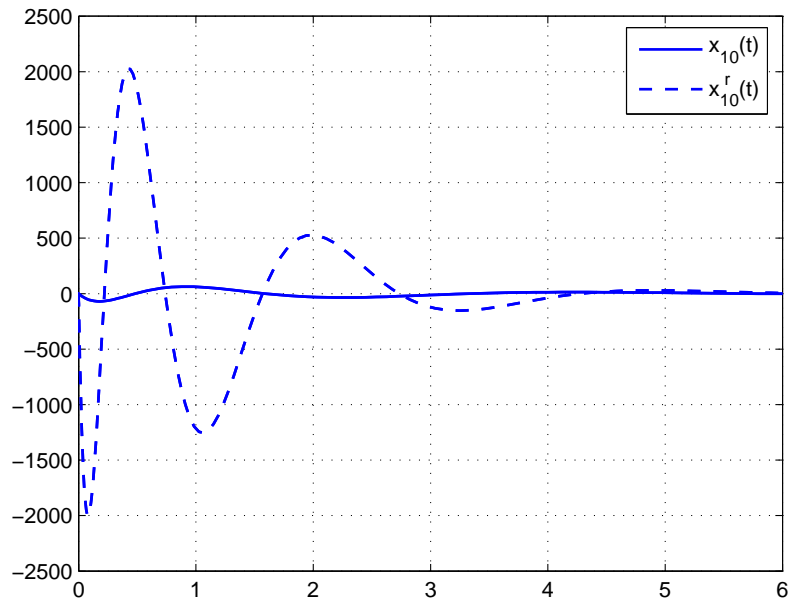


Рис. 4.



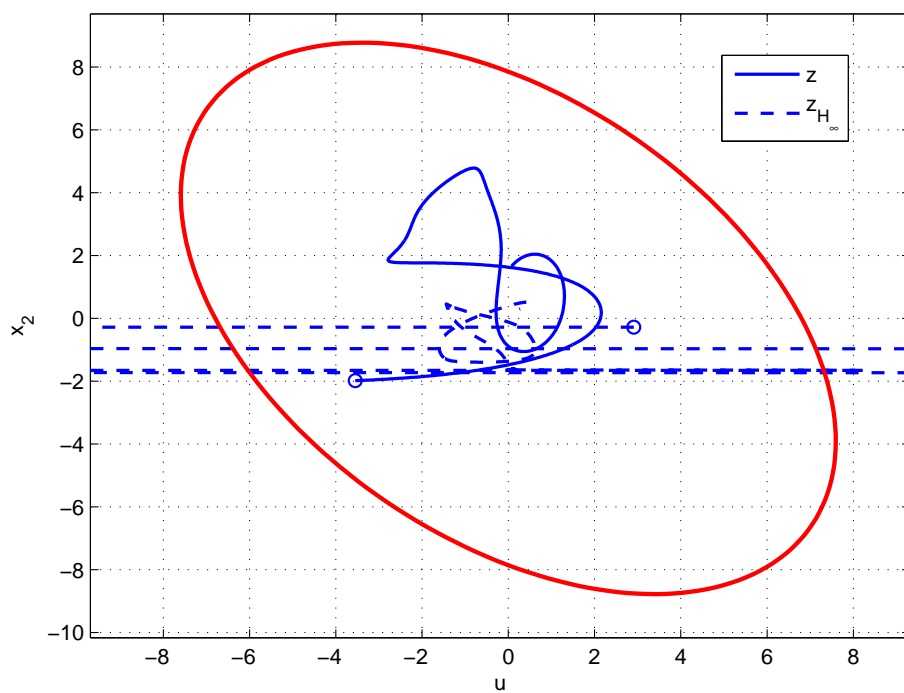


Рис. 5.

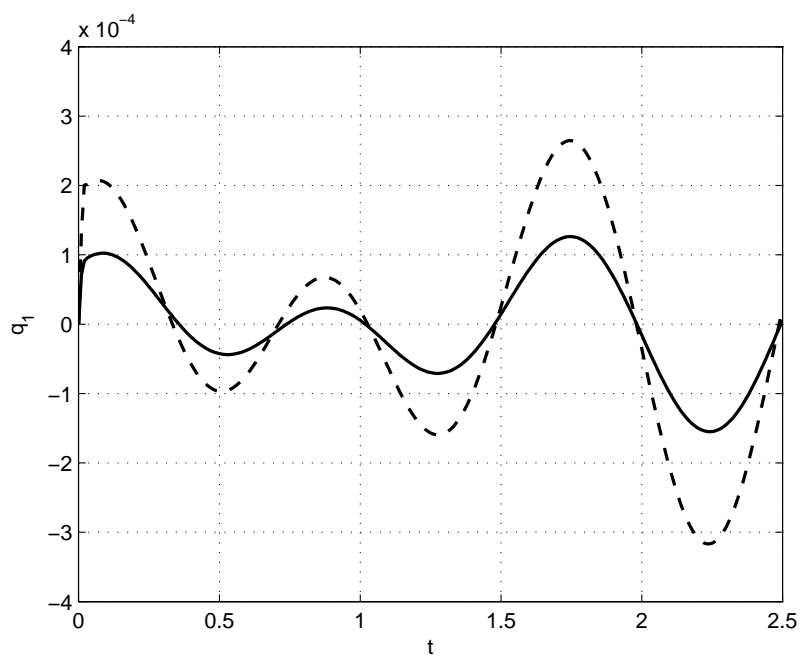


Рис. 6. Траектории  $q_1(t)$  для гармонических возмущений.

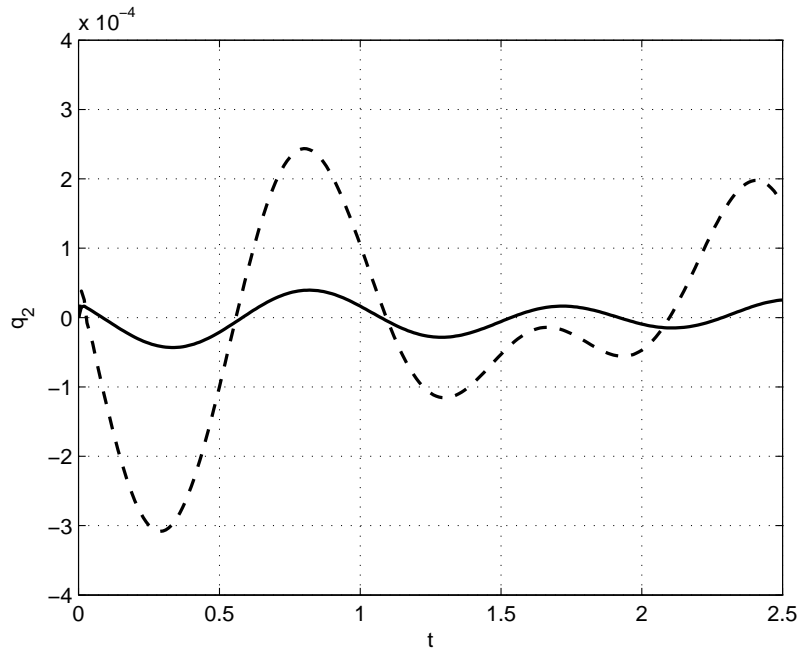


Рис. 7. Траектории  $q_2(t)$  для гармонических возмущений.

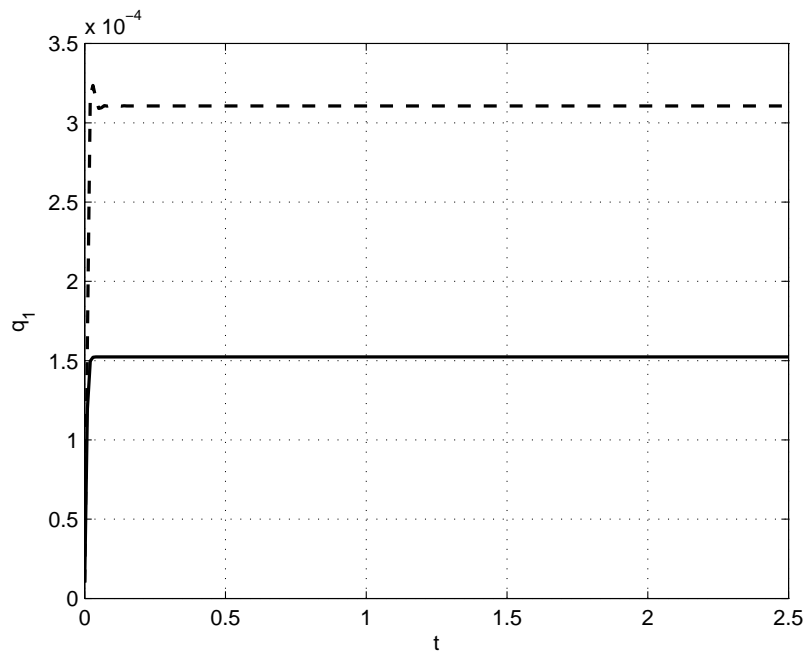


Рис. 8. Траектории  $q_1(t)$  для ступенчатых возмущений.

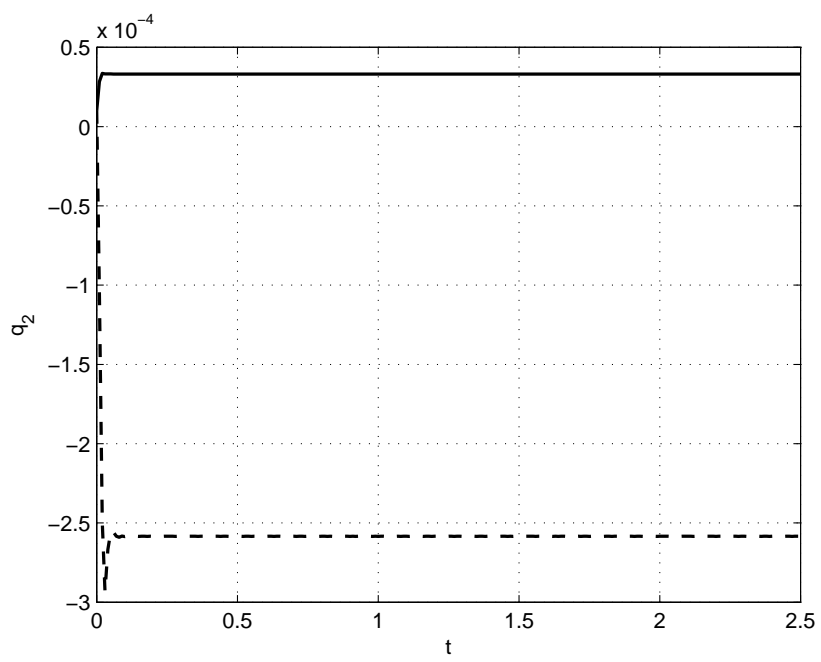


Рис. 9. Траектории  $q_2(t)$  для ступенчатых возмущений.