Автоматика и телемеханика, № 6, 2012

Линейные системы

© 2012 г. **М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается проблема оценки времени установления для линейной динамической системы, подверженной воздействию неслучайных ограниченных внешних возмущений. Предлагаемый подход основан на методе инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств. Рассмотрены как непрерывный, так и дискретный варианты задачи. В качестве примера исследуется задача управления двухмассовой системой.

1. Введение

В классических инженерных задачах управления линейными системами с одним входом – одним выходом обычно формулируются требования к переходному режиму, т.е. к реакции системы на единичный скачок. Однако единичный скачок можно рассматривать как частный случай ограниченного внешнего возмущения, поэтому к нему можно применять оценки, получающиеся при использовании подхода, предложенного в [1]. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов и в качестве технического средства использует аппарат линейных матричных неравенств, см. [2–4].

Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений и в равной мере распространяется как на непрерывный, так и на дискретный варианты задачи. Для решения полученных таким образом задач существуют мощные вычислительные методы [5, 6] и пакеты программ.

Методы синтеза регуляторов, основанные на данной идеологии, позволяют решать разнообразные инженерные задачи. Например, если решать задачу минимизации скалярного выхода z при ограничении на скалярный вход $|w(t)| \leqslant 1$ и найденный ограничивающий эллипсоид (в данном случае интервал) задается числом r, то это гарантирует, что реакция на единичный скачок не превосходит r для всех моментов времени; иначе говоря, получаем оценку возможного перерегулирования. Важно, что эта оценка верна не только для нулевых граничных условий, как это принято в стандартной постановке задачи, но и для всех $x(0)$ из инвариантного эллипсоида. Отметим, что задача синтеза стабилизирующего регулятора, обеспечивающего заданное перерегулирование, относится к числу трудных в традиционной теории автоматического регулирования.

В рамках данного подхода могут решаться и другие проблемы – о времени установления, о степени затухания (см. [7]). Решению первой из них и посвящена данная работа.

Предварительные результаты исследования представлены в [8].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ &z = Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \in \mathbb{R}^r$ и L_∞-ограниченным внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2}$$

Пара (A, D) управляема, C – матрица полного ранга.

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, tr – след матрицы, I – единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_P = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным (по состоянию) для системы (1), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_P$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_P$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$ и любых допустимых внешних возмущений w.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_P$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду.

Важно отметить, что инвариантный эллипсоид обладает свойством *притягиваемости* (*аттрактивности*): как показано в [9], траектории системы, исходящие из точек вне инвариантного эллипсоида, стремятся к этому эллипсоиду с течением времени (при этом в некоторый момент времени они могут войти в инвариантный эллипсоид). В дальнейшем это свойство будет использоваться самым существенным образом.

Нетрудно видеть, что если $\mathcal{E}_P$ – инвариантный эллипсоид, то выход системы $z = Cx$, где C – матрица полного ранга, при $x(0) \in \mathcal{E}_P$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^r\colon \quad z^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\},$$

который будем называть *ограничивающим* (*по выходу*), а при $x(0) \notin \mathcal{E}_P$ – стремится к нему. В настоящей работе в качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида выбран критерий следа

$$f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

соответствующий сумме квадратов полуосей эллипсоида $\mathcal{E}_z$. Таким образом, оценка степени влияния ограниченных внешних возмущений w на выход z системы (1) сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида, минимального по критерию (3).

Имеет место следующее предложение.

Предложение 1 [3, 10]. *Эллипсоид $\mathcal{E}_P$ является инвариантным для системы* (1) *тогда и только тогда, когда его матрица $P \succ 0$ удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0 \tag{4}$$

при некотором $\alpha > 0$.

Следствие 1 [1]. *Минимальный по критерию* (3) *ограничивающий эллипсоид для системы* (1) *принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $P = P(\alpha)$, удовлетворяющими уравнению Ляпунова*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{5}$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$, где $\sigma(A)$ – радиус устойчивости матрицы A (т.е. $\sigma(A) = -\max\limits_i \mathrm{Re}\lambda_i(A)$, где $\lambda(A)$ – собственные значения матрицы A). При этом функция

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}$$

строго выпукла на указанном интервале.

Следствие 1 позволяет свести задачу поиска минимального ограничивающего эллипсоида к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале. Заметим, что все минимальные ограничивающие эллипсоиды удовлетворяют уравнению (5) вне зависимости от конкретного выбора критерия.

Главная задача состоит в оценке *времени установления*. Пусть P – матрица инвариантного эллипсоида для системы (1). Как было отмечено выше, траектории системы, исходящие из точек вне инвариантного эллипсоида, стремятся к этому эллипсоиду с течением времени. Оценим время T_γ, за которое траектории системы, исходящие из точки x_0 вне эллипсоида с матрицей γP, $\gamma > 1$, достигнут этого эллипсоида (в частности, для скалярного случая в инженерной практике обычно берут $\gamma = 1{,}05$).

3. Основной результат

В следующей теореме дана оценка скорости сходимости траекторий рассматриваемой системы к инвариантному эллипсоиду.

Т е о р е м а 1. *Для скорости сходимости траекторий системы* (1) *к инвариантному эллипсоиду с матрицей P, удовлетворяющей условию* (5) *с $\alpha = \alpha_P$, справедлива оценка*

$$\rho(t) \leqslant \rho(0)\, e^{-\alpha_P t}, \tag{6}$$

где $\rho(t) = V_P\big(x(t)\big) - 1$, а $V_P(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x$ – квадратичная функция Ляпунова на пространстве состояний системы.

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Из теоремы 1 нетрудно получить оценку для времени установления в рассматриваемой динамической системе.

Т е о р е м а 2. *Пусть P – матрица инвариантного эллипсоида для системы* (1), *x_0 — начальное состояние системы. Тогда для времени установления справедлива оценка*

$$T_\gamma \leqslant \frac{1}{\alpha_P} \ln \frac{x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1}.$$

С л е д с т в и е 2. *Если начальное состояние системы* (1) *принадлежит эллипсоиду с матрицей δP, $\delta \geqslant \gamma > 1$, то в предположениях теоремы 2*

$$T_\gamma \leqslant \frac{1}{\alpha_P} \ln \frac{\delta - 1}{\gamma - 1}\,.$$

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно видеть, что, в силу линейности, к моменту времени T_γ выход z системы (1) заведомо достигнет эллипсоида с матрицей $\gamma C P C^{\mathrm{T}}$ (напомним, что $C P C^{\mathrm{T}}$ – матрица ограничивающего эллипсоида).

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 2 был найден "физический смысл" параметра α в следствии 1: пара (P, α), удовлетворяющая соотношению (5), определяет матрицу P инвариантного эллипсоида и гарантированную экспоненциальную скорость α стремления квадратичных функций Ляпунова вдоль решений системы (1) при данной матрице P извне к этому эллипсоиду.

Заметим также, что естественно задаться целью найти внешнее возмущение $\widetilde{w}(t)$, удовлетворяющее ограничению (2), которое максимизирует $\dot{V}_P(x, w)$ (так называемое *наихудшее возмущение*). Как показано в [1], наихудшее возмущение задается формулой

$$\widetilde{w}(t) = \frac{D^{\mathrm{T}} P^{-1} x(t)}{\|D^{\mathrm{T}} P^{-1} x(t)\|}\,.$$

В частности, если возмущение одномерно, то

$$\widetilde{w}(t) = \operatorname{sign}\big(D^{\mathrm{T}} P^{-1} x(t)\big).$$

Полученный результат легко обобщается на задачу синтеза оптимального управления. Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + B_1 u + Dw, \quad x(0) = x_0,\\
&z = Cx + B_2 u,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ – выход системы, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление, $w(t) \in \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2); пара (A, B_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема. Будем искать регулятор K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx,$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида) подавляет воздействие внешних возмущений w.

В следующем утверждении теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной минимизации.

Предложение 2 [1]. *Решение $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{\alpha}$ задачи*

$$\operatorname{tr}\,[CPC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2YC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1Y + (B_1Y)^{\mathrm{T}} & D \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ и скалярному параметру α, определяет матрицу $C\widehat{P}C^{\mathrm{T}} + C\widehat{Y}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Y}C^{\mathrm{T}} + B_2\widehat{Z}B_2^{\mathrm{T}}$ минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида по выходу системы (7) и статический регулятор по состоянию $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$, оптимально подавляющий внешние возмущения.

Отметим, что $\widehat{P}$ является матрицей инвариантного эллипсоида замкнутой системы (7). Поэтому с учетом теоремы 2 приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для времени установления в системе (7) с регулятором $\widehat{K}$ справедлива оценка*

$$T_\gamma \leqslant \frac{1}{\widehat{\alpha}} \ln \frac{x_0^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x_0 - 1}{\gamma - 1}\,, \tag{8}$$

где x_0 – начальное состояние системы вне эллипсоида с матрицей $\gamma\widehat{P}$, $\gamma > 1$.

В частности, если начальное состояние системы принадлежит эллипсоиду с матрицей $\delta\widehat{P}$, $\delta \geqslant \gamma > 1$, то

$$T_\gamma \leqslant \frac{1}{\widehat{\alpha}} \ln \frac{\delta - 1}{\gamma - 1}\,.$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть ограничение на величину управления задается явным образом:

$$\|u\| \leqslant \mu. \tag{9}$$

Как показано в [1], ограничение (9) для управляемой системы (7) гарантируется выполнением линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{10}$$

где P – матрица инвариантного эллипсоида системы, а $Y = KP$. При этом неравенство (10) добавляется в качестве дополнительного ограничения в формулировку предложения 2.

4. Дискретный случай

Предложенный подход позволяет получить оценку для времени установления в дискретной динамической системе

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{11}$$

с начальным условием x_0, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние, $z_k \in \mathbb{R}^r$ – выход, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$\|w_k\| \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Таким образом, здесь рассматриваются l_∞-ограниченные внешние возмущения. Пара (A, D) управляема, C – матрица полного ранга.

Инвариантный эллипсоид для дискретной системы определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_P = \left\{x_k \in \mathbb{R}^n\colon \quad x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным (по состоянию) для системы (11), если из условия $x_0 \in \mathcal{E}_P$ следует $x_k \in \mathcal{E}_P$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \dots$ и любых допустимых внешних возмущений w_k.

Как и в непрерывном случае, инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости.

Следующее утверждение является дискретным аналогом предложения 1.

П р е д л о ж е н и е 3 [1]. *Эллипсоид $\mathcal{E}_P$ является инвариантным для системы (11) тогда и только тогда, когда его матрица $P \succ 0$ удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$\frac{1}{\alpha} APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0 \tag{13}$$

при некотором $0 < \alpha < 1$.

Следствие 3. Минимальный по критерию (3) *ограничивающий эллипсоид для системы* (11) *принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $P = P(\alpha)$, удовлетворяющими дискретному уравнению Ляпунова*

$$\frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{14}$$

на интервале $\rho^2(A) < \alpha < 1$, где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A. При этом функция $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}$ строго выпукла на указанном интервале.

Как вытекает из теоремы 4, в дискретном случае траектории системы сходятся к инвариантному эллипсоиду со скоростью геометрической прогрессии; ее знаменателем служит значение параметра α, соответствующее данному эллипсоиду.

Теорема 4. Для скорости сходимости траекторий системы (11) *к инвариантному эллипсоиду с матрицей P, удовлетворяющей условию* (14) *с $\alpha = \alpha_P$, справедлива оценка*

$$\rho_k \leqslant \rho_0 \alpha_P^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

где $\rho_k = V_P(x_k) - 1$, а $V_P(x_k) = x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k$ – квадратичная функция Ляпунова на пространстве состояний системы.

Из теоремы 4 нетрудно получить оценку для времени установления k_γ, за которое траектории рассматриваемой дискретной системы, исходящие из точки x_0 вне эллипсоида с матрицей γP, $\gamma > 1$, достигнут этого эллипсоида.

Теорема 5. Пусть P – матрица инвариантного эллипсоида для системы (11), *x_0 — начальное состояние системы. Тогда для времени установления справедлива оценка*

$$k_\gamma \leqslant \log_{\alpha_P} \frac{\gamma - 1}{x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0 - 1}.$$

Полученный результат, как и в непрерывном случае, обобщается на задачу синтеза оптимального управления. Отметим, что замечание 2 в дискретном случае также сохраняет свою силу.

5. Пример: двухмассовая система

Продемонстрируем предложенный подход на примере задачи управления так называемой *двухмассовой системой* – системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k и скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1). Эта задача часто используется как тестовая для различных методов синтеза регуляторов (см. [11]).

К левому телу приложено управление u для компенсации влияния внешнего возмущения w, $|w| \leqslant 1$, воздействующего на правое тело.

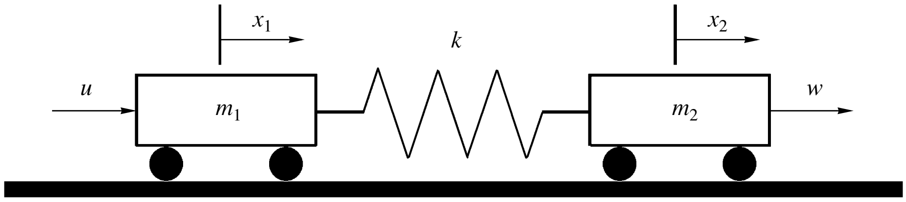

Рис. 1. Двухмассовая система.

Пусть x_1, v_1 – координата и скорость левого тела, а x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

есть вектор фазового состояния системы. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1,\\
\dot{x}_2 &= v_2,\\
\dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u,\\
\dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w.
\end{aligned}$$

В качестве выхода системы возьмем сам вектор фазового состояния ($z = x$) и введем ограничение на управление: $|u| \leqslant 2{,}3$. При единичных параметрах системы с помощью предложения 2 с учетом замечания 2 была найдена матрица минимального инвариантного эллипсоида

$$\widehat{P} \approx \begin{pmatrix} 22{,}0261 & 20{,}4368 & -3{,}0616 & -6{,}1821\\ 20{,}4368 & 25{,}4940 & 0{,}5007 & -3{,}5437\\ -3{,}0616 & 0{,}5007 & 4{,}8668 & 0{,}1293\\ -6{,}1821 & -3{,}5437 & 0{,}1293 & 6{,}0424 \end{pmatrix}$$

и оптимальный регулятор

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -0{,}6946 & 0{,}3263 & -1{,}3324 & -0{,}3439 \end{pmatrix}.$$

При этом $\widehat{\alpha}\approx 0{,}2780$. Для численного решения использовались пакеты SeDuMi и YALMIP на базе системы Matlab.

Согласно теореме 3 при $\delta = 2$ и $\gamma = 1{,}05$ время установления не превосходит

$$T_{1,05} \approx 10{,}7760.$$

На рис. 2 показаны проекции на плоскость (x_2, v_2) найденного инвариантного эллипсоида с матрицей $\widehat{P}$ (сплошная линия), эллипсоида с матрицей $\gamma\widehat{P}$ (штриховая линия) и эллипсоида с матрицей $\delta\widehat{P}$ (пунктирная линия).

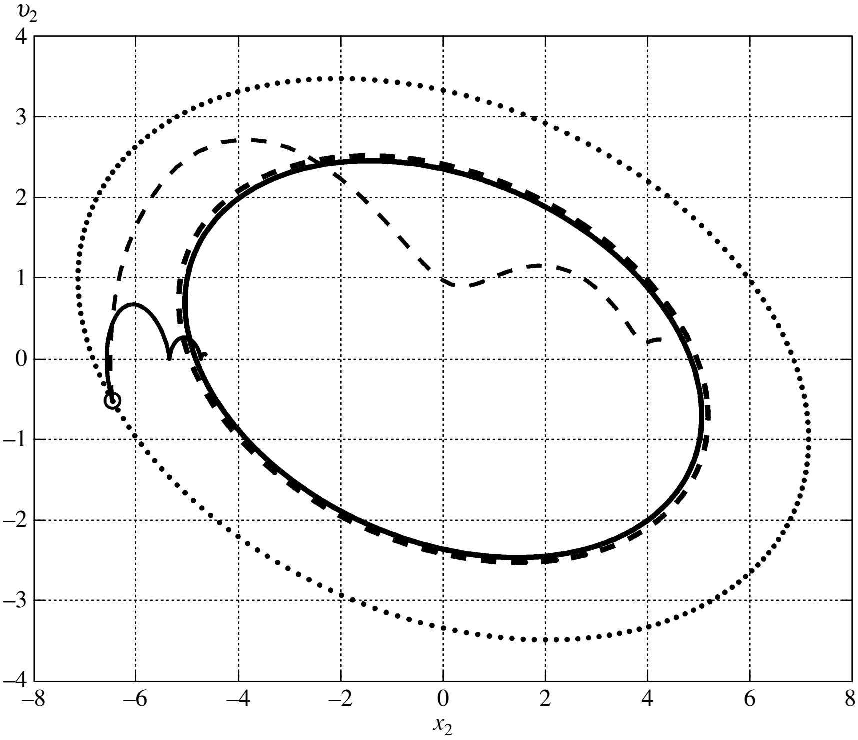

Рис. 2. Проекции эллипсоидов и траекторий.

На этом же рисунке показаны проекции двух траекторий системы, исходящих из одной точки – соответствующей “наихудшему” внешнему возмущению (сплошная линия) и единичной ступеньке (штриховая линия). Конечные точки траекторий соответствуют моменту времени $T_{1,05}$.

6. Заключение

В статье предложен подход к оценке времени установления для линейной динамической системы, подверженной воздействию неслучайных ограниченных внешних возмущений. Он основан на концепции инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств и в равной мере распространяется как на непрерывные, так и на дискретные динамические системы.

Представляется, что предложенный подход имеет большой потенциал и возможности для обобщений. Например, в одной из простейших постановок задача может формулироваться следующим образом. Задана точка x_0 и окрестность нуля Ω; будем минимизировать время T_Ω перехода траекторий системы из начальной точки x_0 в множество Ω. Для этого достаточно найти *наибольший* инвариантный эллипсоид с матрицей $P \subset \Omega$, тогда время перехода из x_0 в этот эллипсоид даст искомую оценку. (Поскольку любой инвариантный эллипсоид содержит достижимое множество $\mathcal{R}$ системы, то при достаточно малой окрестности Ω эта задача может оказаться неразрешимой – может не найтись инвариантного эллипсоида, который бы помещался внутри Ω.)

Автор признателен Б.Т. Поляку и П.С. Щербакову за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – заданные матрицы, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда множества*

$$\Omega_1 = \left\{(P, \alpha):\ \ AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0, \quad \alpha > 0\right\}$$

и

$$\Omega_2 = \left\{(P, \alpha):\ \ AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0, \quad 0 < \beta \leqslant \alpha\right\}$$

совпадают.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$; покажем обратное включение.

Пусть $(P, \alpha) \in \Omega_2$, тогда существует $0 < \beta \leqslant \alpha$ такое, что

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0.$$

При этом

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} = AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^{\mathrm{T}} + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}_{\leqslant 0} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0,$$

т.е. $(P, \alpha) \in \Omega_1$. Лемма П.1 доказана.

Утверждение П.1 (S-процедура, [12]). *Пусть заданы однородные квадратичные формы $f_i(x) = x^{\mathrm{T}} A_i x,\ i = 0, 1, \ldots, m$, в $\mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in$ $\in \mathbb{R}$.*

Если существуют числа $\tau_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m$, такие что

$$A_0 \preccurlyeq \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \tau_i \alpha_i, \tag{П.1}$$

то из

$$f_i(x) \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{П.2}$$

следует

$$f_0(x) \leqslant \alpha_0. \tag{П.3}$$

Обратно, если из (П.2) *следует* (П.3) *и выполняется любое из условий:*

а) $m = 1$;

б) $m = 2$, $n \geqslant 3$ *и существуют числа* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ *и вектор* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, *такие что*

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2,$$

то существуют числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, *при которых справедливы неравенства* (П.1).

Доказательство теоремы 1. Пусть $P \succ 0$ – матрица инвариантного эллипсоида для системы (1). Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V_P(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x$$

на пространстве состояний рассматриваемой системы.

Как отмечалось выше, инвариантный эллипсоид одновременно является притягивающим. Потребуем выполнения условия

$$\dot{V}_P(x, w) \leqslant -\alpha\bigl(V_P(x) - 1\bigr) \ \text{ при } \ V_P(x) \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1. \tag{П.4}$$

Тогда величина $\alpha > 0$ будет оценкой снизу для экспоненциальной скорости убывания квадратичной функции Ляпунова $V_P\bigl(x(t)\bigr)$ *вне* инвариантного эллипсоида с матрицей P при всех допустимых внешних возмущениях. Найдем ее наибольшее значение α_P.

С учетом того, что производная функции Ляпунова в силу системы имеет вид

$$\dot{V}_P(x, w) = \dot{x}^{\mathrm{T}} P^{-1} x + x^{\mathrm{T}} P^{-1} \dot{x} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1} A)x + 2w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} P^{-1} x,$$

условие (П.4) запишем как

$$\begin{aligned} &x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1} A)x + 2w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} P^{-1} x + \alpha x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant \alpha \\ &\forall (x, w)\colon \ x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1. \end{aligned} \tag{П.5}$$

Введем в рассмотрение вектор $s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1} A + \alpha P^{-1} & P^{-1} D \\ D^{\mathrm{T}} P^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

В результате условие (П.5) примет вид

$$f_0(s) \leqslant 0 \qquad \forall s\colon \ f_1(s) \leqslant -1, \quad f_2(s) \leqslant 1,$$

где $f_i(s) = s^{\mathrm{T}} M_i s$, $i = 0, 1, 2$.

Нетрудно видеть, что условия б) утверждения П.1 выполняются. Следовательно, в силу S-процедуры с двумя ограничениями условие (П.5) эквивалентно существованию $\tau, \mu \geqslant 0$, таких что $\tau - \mu \leqslant \alpha$ и

$$M_0 - \mu M_1 - \tau M_2 \preccurlyeq 0.$$

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P^{-1} + P^{-1}A + \alpha P^{-1} + \mu P^{-1} & P^{-1}D \\ D^{\mathrm{T}}P^{-1} & -\tau I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура в виде

$$A^{\mathrm{T}}P^{-1} + P^{-1}A + (\alpha+\mu)P^{-1} + \frac{1}{\tau}P^{-1}DD^{\mathrm{T}}P^{-1} \preccurlyeq 0.$$

После домножения полученного неравенства слева и справа на матрицу P получаем

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + (\alpha+\mu)P + \frac{1}{\tau}DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0.$$

В силу леммы П.1 можно положить $\tau = \tau_{\max} = \alpha + \mu$; в результате приходим к матричному неравенству

$$\text{(П.6)} \qquad AP + PA^{\mathrm{T}} + (\alpha+\mu)P + \frac{1}{\alpha+\mu}DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0.$$

Таким образом, искомое α_P является решением задачи

$$\alpha \longrightarrow \max \text{ при ограничении (П.6).}$$

С учетом предложения 1 заметим, что α_P – это максимальное значение параметра α в неравенстве (4), которое соответствует матрице P. В частности, с учетом следствия 1 при решении задачи минимизации инвариантного эллипсоида по какому-либо критерию, α_P будет оптимальным значением параметра α.

В результате согласно (П.4) для всех траекторий $x(t)$ вне инвариантного эллипсоида с матрицей P, исходящих из точки x_0, имеем

$$V\big(x(t)\big) \leqslant 1 + \big(V_P(x_0) - 1\big)e^{-\alpha_P t}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку в момент T_γ все траектории, исходящие из точки x_0 вне эллипсоида с матрицей γP, $\gamma > 1$, находятся в этом эллипсоиде, то $V_P\big(x(T_\gamma)\big) \leqslant \gamma$. Поэтому с учетом (6) имеем оценку

$$\gamma \leqslant 1 + (x_0^{\mathrm{T}}P^{-1}x_0 - 1)e^{-\alpha_P T_\gamma},$$

откуда

$$T_\gamma \leqslant \frac{1}{\alpha_P}\ln\frac{x_0^{\mathrm{T}}P^{-1}x_0 - 1}{\gamma - 1}.$$

Теорема 2 доказана.

Л е м м а П.2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – заданные матрицы, $S \succ 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда множества

$$\Omega_1 = \left\{(P,\alpha)\colon\ \frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}DSD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0, \quad 0 < \alpha < 1\right\}$$

и

$$\Omega_2 = \left\{(P,\alpha)\colon\ \frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{\beta}DSD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0, \quad \alpha,\beta > 0,\ \alpha+\beta \leqslant 1\right\}$$

совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$; покажем справедливость обратного включения.

Пусть $(P,\alpha) \in \Omega_2$, тогда существует $0 < \beta \leqslant 1-\alpha$, такое что

$$\frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{\beta}DSD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0.$$

При этом

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}DSD^{\mathrm{T}} = \\ &= \frac{1}{\alpha}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{\beta}DSD^{\mathrm{T}} + \underbrace{\Big(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\beta}\Big)}_{\leqslant 0}DSD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0,\end{aligned}$$

т.е. $(P,\alpha) \in \Omega_1$. Лемма П.2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Пусть $P \succ 0$ – матрица инвариантного эллипсоида для системы (11). Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V_P(x_k) = x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k$$

на пространстве состояний системы.

С учетом свойства притягиваемости инвариантного эллипсоида потребуем выполнения условия

$$V_P(x_{k+1}) - V_P(x_k) \leqslant -\eta\big(V_P(x_k) - 1\big) \ \text{при}\ V_P(x_k) \geqslant 1, \quad w_k^{\mathrm{T}} w_k \leqslant 1. \tag{П.7}$$

Тогда величина $\eta > 0$ будет оценкой снизу для скорости убывания квадратичной функции Ляпунова $V_P(x_k)$ *вне* эллипсоида $\mathcal{E}_P$ при всех допустимых внешних возмущениях. Найдем её наибольшее значение η_P.

В силу S-процедуры с двумя ограничениями (см. утверждение П.1) условие (П.7) эквивалентно существованию $\tau, \mu \geqslant 0$, таких что $\tau - \mu \leqslant \eta$ и

$$\frac{1}{1-\mu-\eta}APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{\tau}DSD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0.$$

В силу леммы П.2 можно положить $\tau = \tau_{\max} = \mu + \eta$; в результате приходим к матричному неравенству

$$\frac{1}{1-(\eta+\mu)} A P A^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{\eta+\mu} D S D^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0. \tag{П.8}$$

Таким образом, η_P является решением задачи

$$\eta \longrightarrow \max \ \text{ при ограничении (П.8).}$$

С учетом предложения 3 заметим, что $1-\eta_P$ есть минимальное значение параметра α в неравенстве (13). В частности, с учетом следствия 3 при решении задачи минимизации инвариантного эллипсоида по какому-либо критерию, $1-\eta_P$ есть оптимальное значение параметра α.

Таким образом, согласно (П.7) для всех траекторий x_k вне инвариантного эллипсоида с матрицей P, исходящих из точки x_0, имеем

$$V_P(x_{k+1}) - 1 \leqslant \alpha_P \big(V_P(x_k) - 1\big),$$

откуда и следует оценка (15). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Поскольку в момент k_γ все траектории, исходящие из точки x_0 вне эллипсоида с матрицей γP, $\gamma > 1$, должны находиться в этом эллипсоиде, то $V_P(x_{k_\gamma}) \leqslant \gamma$. Поэтому согласно (15) имеем оценку

$$\gamma - 1 \leqslant (x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0 - 1)\alpha_P^{k_\gamma},$$

откуда

$$k_\gamma \leqslant \log_{\alpha_P} \frac{\gamma - 1}{x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0 - 1}.$$

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. №3. С. 106–125.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
3. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
4. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // АиТ. 2011. №11. С. 9–59.
5. *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2009.
6. *Boyd S., Vandenberge L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

7. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
8. *Хлебников М.В.* Об оценке времени установления в линейной динамической системе с внешними возмущениями // Тр. Второй традиц. всеросс. молодеж. летней шк. “Управление, информация и оптимизация”. Переславль-Залесский, 20–27 июня 2010 г. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 152–164.
9. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // АиТ. 2010. №4. С. 106–119.
10. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust Nonlinear Contr. 1996. V. 6. P. 899–927.
11. *Reinelt W.* Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints // Proc. Amer. Contr. Conf. Chicago, USA, June 28–30, 2000. P. 1817–1821.
12. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optim. Theory Appl. 1998. V. 99. P. 553–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 01.03.2011