

PACS 02.30.Yy

© 2008 г. Я.И. ПЕТРИКЕВИЧ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ¹

Предлагается новый подход к задаче стабилизации систем регуляторами низкого порядка, основанный на генерировании случайных устойчивых полиномов или матриц и их проектировании на пространство параметров регулятора.

1. Введение

Задача стабилизации регуляторами низкого порядка является одной из фундаментальных задач в теории управления линейными системами. Регуляторы низкого порядка, особенно ПИ- и ПИД-регуляторы, широко используются в практической деятельности [1, 2]. Задача синтеза таких регуляторов сводится к отысканию устойчивого полинома или матрицы в аффинном семействе, что, как известно, является NP-сложной задачей [3, 4], и до сих пор не существует универсального теоретического подхода к построению такого регулятора для заданного объекта. Более того, до сих пор не разработаны способы проверки существования стабилизирующих регуляторов фиксированной структуры для заданного объекта.

Рандомизированный подход, ставший очень популярным за последние несколько лет, уже применялся для решения задач стабилизации (см., например, [5]). Однако большинство подобных прямых методов малоэффективны потому, что они имеют дело с пространством коэффициентов полинома, тогда как область устойчивости системы в пространстве параметров регуляторов обычно очень мала.

Предлагается решение задачи стабилизации на основе случайного генерирования устойчивых полиномов или матриц и их проектирования на множество характеристических полиномов (матриц) системы. Такой способ весьма эффективен, если существует достаточно большая область устойчивости в пространстве параметров регулятора. Но на практике эта область, как правило, очень мала, что практически исключает возможность случайного попадания в нее при проектировании случайных полиномов. В таких ситуациях предлагается использовать итеративный алгоритм сдвига нестабилизирующих проекций случайных устойчивых полиномов в область устойчивости в пространстве параметров регулятора.

В работе рассматриваются в основном дискретные SISO- и MIMO-системы, поскольку для них существуют простые и эффективные алгоритмы генерирования устойчивых полиномов и матриц. Модификация предложенных алгоритмов на случай непрерывного времени не представляет особой трудности. Приведено несколько численных примеров, демонстрирующих простоту и высокую эффективность предложенного подхода.²

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-08-01474, № 08-08-00371) и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22.

² Предварительные результаты были представлены на конференции [6].

2. Дискретные SISO-системы

Рассмотрим дискретную SISO-систему (т.е. систему с одним входом и одним выходом), состоящую из объекта с известной передаточной функцией

$$G(z) = \frac{a(z)}{b(z)}, \quad \deg a(z) \leq \deg b(z)$$

и регулятора вида

$$(1) \quad C(z) = \frac{d(z, q)}{f(z, q)},$$

в котором $q = (q_1, \dots, q_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ – вектор неизвестных коэффициентов передаточной функции регулятора, входящих в числитель и знаменатель линейным образом. Пусть степени полиномов $d(z, q)$, $f(z, q)$ фиксированы, и тем самым структура регулятора полностью определена. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} p(z, q) &= a(z)d(z, q) + b(z)f(z, q), \\ \deg p(z, q) &= n. \end{aligned}$$

Очевидно, что корни полинома $p(z, q)$ являются функциями от неизвестных параметров: $z_i = z_i(q)$, $i = 1, \dots, n$. Будем считать полином дискретно устойчивым (шуровским), если все его корни z_i лежат внутри единичного круга:

$$C_1 \doteq \{z_i \in \mathbb{C} : |z_i| < 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Задача состоит в отыскании таких значений параметров q^* , при которых $p(z, q^*)$ устойчив (если такие q^* существуют).

Предположим, что старший коэффициент полинома $p(z, q)$ не обращается в нуль ни при каких значениях q . Тогда характеристические полиномы замкнутой системы при изменении q в \mathbb{R}^ℓ образуют аффинное семейство инвариантной степени n :

$$(2) \quad p(z, q) = p_0(z) + \sum_{i=1}^{\ell} q_i p_i(z),$$

где $p_i(z)$, $i = 0, \dots, \ell$ – полиномы, имеющие различные степени.

Если регулятор имеет всего два настраиваемых параметра $(q_1, q_2)^T$, то задача о построении регулятора, стабилизирующего заданную систему, легко решается графически, например с помощью D -разбиения [7, 8]. Однако при наличии большего числа неизвестных параметров такие методы уже не применимы. Для решения этой проблемы используем рандомизированный подход, состоящий из трех основных этапов:

- 1) генерирование случайного шуровского полинома;
- 2) его проектирование на множество характеристических полиномов системы и проверка устойчивости проекции;
- 3) локальный сдвиг неустойчивых проекций в пространстве параметров регулятора в область устойчивости.

Рассмотрим каждый из этих этапов подробнее.

2.1. Генерирование устойчивых полиномов

Для генерирования случайного шуровского полинома вида

$$(3) \quad u_n(z) = z^n + u_{n-1}z^{n-1} + \dots + u_1z + u_0$$

используем следующую лемму [9, 10].

Лемма 1. Любой приведенный шуровский полином $u_n(z)$ вида (3) может быть получен с помощью рекуррентной процедуры

$$(4) \quad u_0(z) = 1, \quad u_{k+1}(z) = zu_k(z) + t_k z^k u_k(z^{-1}), \\ |t_k| \leq 1, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Согласно этой лемме *все* устойчивые полиномы *любой* степени, меньшей или равной n , могут быть получены с помощью этой процедуры. В рамках предлагаемого подхода в качестве параметров t_k выбираются независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-1, 1]$. Заметим, что при этом ни коэффициенты, ни корни полученного таким образом полинома не распределены равномерно в соответствующих пространствах. Следует также отметить, что процедура (4) позволяет получать коэффициенты искомого устойчивого полинома $u_n(z)$ непосредственно с помощью параметров Фама-Медича t_k , без перехода в пространство корней полинома. Соотношения, аналогичные (4), применяются также в задачах фильтрации и построения автокорреляционных функций авторегрессионных стохастических процессов и называются рекурсией Левинсона-Дурбина (см., например, [11, 12]).

Замечание 1. В случае непрерывной системы для перехода от шуровского полинома (3) к соответствующему непрерывному устойчивому полиному можно использовать дробно-линейное преобразование комплексной переменной $s = (z + 1)/(z - 1)$, тогда

$$v_n(s) = (s - 1)^n u_n \left(\frac{s + 1}{s - 1} \right) = s^n + v_{n-1} s^{n-1} + \dots + v_1 s + v_0.$$

После применения алгоритма (4) N раз со случайными равномерно распределенными на интервале $[-1, 1]$ параметрами t_k получаем N устойчивых полиномов

$$\tilde{u}_n^j(z) = z^n + u_{n-1}^j z^{n-1} + \dots + u_1^j z + u_0^j, \quad j = 1, \dots, N.$$

2.2. Проектирование на множество характеристических полиномов замкнутой системы

Далее сгенерированные полиномы проектируются на множество характеристических полиномов $p(z, q)$ (т.е. аффинное семейство (2)), в результате чего получаем набор параметров регулятора, минимизирующий расстояние до соответствующего устойчивого полинома-прототипа $u_n^j(z)$.

Так, коэффициенты характеристического полинома $p(z, q)$ определяются вектором $\tilde{p}_q = \tilde{p}_0 + Aq$, где \tilde{p}_0 – вектор коэффициентов полинома $p_0(z)$; матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ составлена из коэффициентов полиномов $p_i(z)$.

Введем в рассмотрение вектор коэффициентов сгенерированного устойчивого полинома, полученного на шаге 2.1: $\tilde{u}^j = (u_{n-1}^j, \dots, u_1^j, u_0^j)^T$. Тогда задача проектирования $\min_q \|p(z, q) - u_n^j(z)\|$ сводится к отысканию

$$\arg \min_q \|Aq + \tilde{p}_0 - \tilde{u}^j\|.$$

Если используется евклидова норма, то с помощью метода наименьших квадратов можно получить решение в явном виде (в предположении, что A имеет полный ранг):

$$q^j = (A^T A)^{-1} A^T (\tilde{u}^j - \tilde{p}_0).$$

При использовании других норм, например ℓ_1 или ℓ_∞ , необходимо решать соответствующую линейную программу. Можно отметить, что выбор той или иной нормы

здесь не является принципиальным, так как он фактически не влияет на качество получаемого результата.

Если на текущем шаге j полученная проекция $p(z, q^j)$ устойчива, то найден стабилизирующий регулятор с параметрами q^j . В противном случае следует продолжить генерирование устойчивых полиномов $u_n^j(z)$ и их проектирование до тех пор, пока не будет найден набор параметров q^j , стабилизирующий систему, либо не исчерпается заданное число попыток N . Более того, представляется разумным не останавливать процесс генерирования-проектирования после первого же найденного стабилизирующего регулятора, а использовать все N попыток. В этом случае результатом может быть целое множество стабилизирующих регуляторов, что дает возможность провести на их основе дальнейшую оптимизацию с использованием какого-либо дополнительного критерия (например, минимизации H_∞ -нормы, максимизации степени устойчивости системы и т.п.).

2.3. Локальный итеративный сдвиг неустойчивых корней

Если после выполнения этапов генерирования и проектирования ни одна из проекций не является устойчивой, то предлагается по возможности улучшить часть неустойчивых проекций с помощью оптимизационной процедуры, которая итеративно сдвигает корни неустойчивого полинома к единичному кругу.

Рассмотрим аффинное семейство (2) характеристических полиномов степени n такое, что полином $p(z, 0)$ неустойчив. Требуется найти такие $q = q^*$, что $p(z, q^*)$ – устойчивый полином.

Предположим, что в пространстве параметров регулятора (1) существует непустая область устойчивости замкнутой системы и имеется некоторая точка q , не стабилизирующая рассматриваемую систему, но расположенная вблизи от области устойчивости. Такие точки можно получать разными способами. Например, если после выполнения этапов генерирования и проектирования все N полиномов-проекций оказались неустойчивыми, то среди них в качестве начальных точек можно выбрать $N_{\text{cand}} \ll N$ наиболее “перспективных” кандидатов с минимальными степенями неустойчивости:

$$(5) \quad \sigma_j = \max_k |z_k|, \quad k = 1, \dots, N_{\text{cand}}.$$

Такой выбор основывается на предположении, что проекции будут располагаться вблизи области устойчивости в пространстве параметров регулятора q .

Приведем алгоритм итеративного сдвига неустойчивых корней характеристического полинома, основанный на результатах теории возмущений [13]. Этот алгоритм, предложенный в [14, 15], работает непосредственно в пространстве параметров регулятора q и итеративно перемещает корни неустойчивого полинома $p(z, q)$ к области устойчивости. Основой алгоритма является следующая лемма [14, 15].

Лемма 2. Пусть $p(z, q)$ – полином степени n от $z \in \mathbb{C}$, зависящий от вещественных параметров $q = (q_1, \dots, q_\ell)^T$. Пусть $p(z, q)$ дифференцируем по q в точке $q = 0$; $z_k \doteq z_k(0)$ – простой корень полинома $p_0(z) \doteq p(z, 0)$.

Тогда для достаточно малого q существует корень $z_k(q)$ полинома $p(z, q)$ такой, что справедливо приближение

$$z_k(q) = z_k + (w^k, q) + o(q),$$

где

$$w^k = -\frac{1}{p'_0(z)} \frac{\partial p(z, q)}{\partial q} \Big|_{\substack{q=0 \\ z=z_k}}.$$

Для аффинного семейства (2) коэффициенты векторов w^k вычисляются в явном виде:

$$w_i^k = -\frac{1}{p_0'(z_k)} p_i(z_k), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Замечание 2. Эти приближения справедливы только для случая простых корней. В случае кратных корней необходимо рассматривать приближения второго порядка.

Рассмотрим шаг алгоритма. Считаем текущую точку q (одного из выбранных “кандидатов”) началом координат (этого всегда можно добиться путем сдвига). Пусть полином $p(z, 0)$ неустойчив, т.е. у него имеются корни $|z_k(q)| \geq 1$, $k = 1, \dots, m$. Среди всех таких неустойчивых корней выберем “критические” следующим образом: пусть z^w – “наихудший” корень, т.е. $|z^w| > |z_k|$, $k = 1, \dots, m$. Зададим малое число $\varepsilon > 0$ и назовем критическими такие корни z_k^c , которые удовлетворяют условию $|z_k^c| \geq |z^w| - \varepsilon$. Именно эти корни будут подвергаться итеративному сдвигу в область устойчивости. Для этого сначала линеаризуем критические корни в окрестности текущей точки $q = 0$ согласно лемме 2 и рассмотрим их линейные аппроксимации $\tilde{z}_k^c(q)$, считая все эти корни простыми:

$$(6) \quad \tilde{z}_k^c(q) \doteq z_k^c(0) + (w^k, q), \quad k = 1, \dots, m.$$

Далее, зададим малое $\delta > 0$ и будем искать наименьшее q такое, при котором все линеаризованные критические корни (6) становятся устойчивыми с заданной степенью устойчивости $1 - \delta$. Так, получаем следующую задачу выпуклого программирования:

$$(7) \quad \min \|q\| \\ |z_k^c(0) + (w^k, q)| < 1 - \delta, \quad k = 1, \dots, m.$$

Решение \tilde{q} задачи (7), если оно существует, определяет направление сдвига на текущей итерации. Для гарантированного перемещения одновременно *всех* корней изменяемого полинома $p(z, q)$ в область устойчивости, решаем задачу одномерного поиска

$$\alpha_{\min} = \arg \min_{\alpha > 0} \max_k |z_k|,$$

где z_k – корни полинома $p(z, \alpha \tilde{q})$, и находим шаг перемещения α_{\min} , принимая в качестве новой текущей точки $q = \alpha_{\min} \tilde{q}$. В результате степень неустойчивости полинома (5) уменьшается, новая точка q располагается ближе к области устойчивости аффинного семейства (2) по сравнению с первоначальной. Следующая итерация выполняется над измененным полиномом $p(z, q)$ после замены переменной $q := q - \alpha_{\min} \tilde{q}$.

Замечание 3. 1). Если полином $p(z, 0)$ имеет сразу несколько “наихудших” корней либо кратные корни, то следует изменить ограничения в оптимизационной задаче (7) с учетом новых линейных приближений. 2). Ограничения задачи могут оказаться несовместными. В этой ситуации в качестве возможного выхода можно рассматривать выбор в качестве начальной некоторой точки, лежащей в малой окрестности текущей точки (т.е. использовать “возмущенное” значение “кандидата”). 3). Для нахождения направления одновременного сдвига можно также применять другие оптимизационные схемы. Например, при перемещении корней можно макси-

мизировать степень устойчивости замкнутой системы:

$$\begin{aligned} & \max \delta \\ & |z_k^c(0) + (w^k, q)| < 1 - \delta, \quad k = \overline{1, m}, \\ & \|q\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Одним из главных недостатков этого метода является отсутствие гарантированной сходимости. Так как априори нет никакой информации о существовании, расположении и размерах области устойчивости в пространстве параметров регулятора, то теоретически нельзя гарантировать, что такой итеративный сдвиг в результате приведет к стабилизирующей точке, даже если таковая существует. Так, например, метод может “застревать” в локальных минимумах. Однако практическое тестирование предлагаемого подхода на множестве числовых примеров, проведенное для регуляторов различного порядка и структуры, показало его высокую эффективность (см. раздел 4).

3. Дискретные МИМО-системы

Предложенный подход допускает обобщение на случай многомерных систем, заданных в пространстве состояний.

Рассмотрим замкнутую линейную дискретную МИМО-систему, состоящую из объекта

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^\ell$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, и статического регулятора по выходу:

$$u_k = Qy_k,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ – матрица неизвестных параметров регулятора. В этом случае матрица замкнутой системы имеет вид

$$A_{cl}(Q) = A + BQC.$$

Здесь обозначение $A_{cl}(Q)$ призвано подчеркнуть явную зависимость характеристической матрицы системы от неизвестных параметров регулятора Q . Множество всех таких матриц, полученных изменением Q в $\mathbb{R}^{m \times \ell}$, образует аффинное семейство:

$$(9) \quad A_{cl}(Q) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i.$$

Будем считать матрицу дискретно устойчивой, если все ее собственные значения λ_i лежат внутри единичного круга. Задача заключается в отыскании таких значений параметров Q^* , что матрица $A_{cl}(Q^*)$ устойчива (если такие Q^* существуют).

Рассмотрим кратко основные этапы построения стабилизирующего регулятора Q , которые в общем совпадают с одномерным случаем:

- 1) генерирование случайной устойчивой матрицы $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- 2) проектирование ее на множество матриц замкнутой системы $A_{cl}(Q)$ и проверка устойчивости полученной проекции;
- 3) коррекция наиболее “перспективных” неустойчивых проекций.

3.1. Генерирование случайной устойчивой матрицы

В основе алгоритма генерирования случайной устойчивой матрицы W лежит процедура получения случайных шуровских полиномов (4), рассмотренная в разделе 2.1. Так, на j -й итерации сначала генерируем шуровский полином

$$u_n^j(z) = z^n + u_{n-1}^j z^{n-1} + \dots + u_1^j z + u_0^j, \quad j = 1, \dots, N,$$

а затем строим фробениусову матрицу, для которой полученный полином будет являться характеристическим:

$$S_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -u_0^j & -u_1^j & \dots & -u_{n-1}^j \end{pmatrix}.$$

Матрицу S_j используем для построения случайной устойчивой матрицы более общей формы. Для этого применим к ней преобразование подобия: сгенерируем случайную (невырожденную) матрицу $T = rand(n)$ и построим матрицу

$$W^j = TS_j T^{-1},$$

которая и будет на следующем этапе проектироваться на множество матриц замкнутой системы.

Генерирование производится N раз, в результате чего получаем N случайных дискретно устойчивых матриц.

3.2. Проектирование на пространство матриц замкнутой системы

Этот простой шаг основан на предположении, что неизвестные коэффициенты стабилизирующего регулятора могут быть в некотором смысле “близки” к коэффициентам случайной устойчивой матрицы. Поэтому для каждой сгенерированной матрицы W^j будем искать такие значения параметров регулятора Q^j , чтобы расстояние между ней и множеством матриц замкнутой системы $A_{cl}(Q)$ было минимальным:

$$Q^j = \arg \min_Q \|W^j - (A + BQC)\|^2.$$

Если используется фробениусова норма и матрицы B и C полного ранга, то решение выписывается в явном виде:

$$Q^j = (B^T B)^{-1} B^T (W^j - A) C^T (C C^T)^{-1}.$$

На каждом шаге для полученного набора параметров регулятора Q^j проверяется устойчивость матрицы замкнутой системы: если $A_{cl}(Q^j)$ устойчива, то найден стабилизирующий регулятор.

3.3. Локальный итеративный сдвиг собственных значений

Если среди N проекций на множество характеристических матриц нет ни одной устойчивой, то выбираем среди них N_{cand} “кандидатов”, например, с наименьшими степенями неустойчивости $\sigma_j = \max_k |\lambda_k|$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$. Для каждого из выбранных “кандидатов” производится сдвиг его неустойчивых собственных значений вовнутрь единичного круга. В основе этого метода лежит результат о возмущениях собственных значений, являющийся обобщением леммы 2 [14, 15].

Лемма 3. Пусть $A(Q)$ – вещественная $n \times n$ матрица, зависящая от вектора вещественных параметров $Q = (q_1, \dots, q_\ell)^T$ и пусть $A(Q)$ дифференцируема в точке $Q = 0$. Обозначим

$$D_i \doteq \left. \frac{\partial A(Q)}{\partial q_i} \right|_{Q=0}.$$

Пусть $\lambda_k \doteq \lambda_k(0)$ – алгебраически простое собственное значение матрицы $A = A(0)$; x_k и y_k – правый и левый [нормированные] собственные векторы матрицы $A(0)$, соответствующие λ_k :

$$Ax = \lambda x, \quad x_k^* x_k = 1; \quad y^* A = \lambda y^*, \quad y_k^* y_k = 1.$$

Тогда для достаточно малого Q найдется собственное значение $\lambda_k(Q)$ матрицы $A(Q)$ такое, что

$$(10) \quad \lambda_k(Q) = \lambda_k + \sum_{i=1}^{\ell} y_k^* D_i x_k q_i + o(Q).$$

Для аффинной зависимости (9) $A(0) = A_0$, $D_i = A_i$, и тогда соотношение (10) определяет линейные приближения к возмущенным собственным значениям следующим образом:

$$\lambda_k(Q) \approx \tilde{\lambda}_k(Q) = \lambda_k + (w_i^k, Q); \quad w_i^k = y_k^* A_i x_k; \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Здесь $\lambda_k(Q)$ – простое собственное значение матрицы A_0 , x_k и y_k – соответствующие этому собственному значению правый и левый собственные векторы матрицы A_0 .

На каждом шаге у текущего “кандидата” определяются критические собственные значения, которые линейризуются согласно лемме 3 и к которым затем применяется алгоритм сдвига собственных значений, аналогичный алгоритму сдвига корней полинома в разделе 2.3.

4. Численные примеры

Рассмотрим несколько иллюстративных примеров, демонстрирующих высокую эффективность предложенного в работе рандомизированного подхода к построению стабилизирующих регуляторов. Будем рассматривать регуляторы с двумя настраиваемыми параметрами, так как в этом случае можно отобразить результаты на плоскости и сравнить их с уже известными методами.

Пример 1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из объекта с двумя неустойчивыми полюсами, заданного передаточной функцией

$$G(z) = \frac{z^2 - 0,2z + 0,57}{z^4 + 0,4z^3 - 1,57z^2 - 0,424z + 0,3696}$$

и ПИ-регулятора вида

$$(11) \quad C(z) = \frac{q_1 + q_2 z}{z}.$$

В этом случае характеристический полином принимает вид

$$p(z, q) = p_0(z) + q_1 p_1(z) + q_2 p_2(z), \quad \deg p(z, q) = 5,$$

где $p_0(z) = z^5 + 0,4z^4 - 1,57z^3 - 0,424z^2 + 0,3696z$, $p_1(z) = z^2 - 0,2z + 0,57$, $p_2(z) = z^3 - 0,2z^2 + 0,57z$. С помощью процедуры (4) генерируем $N = 1000$ шуровских

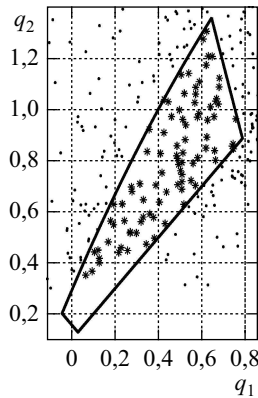


Рис. 1.

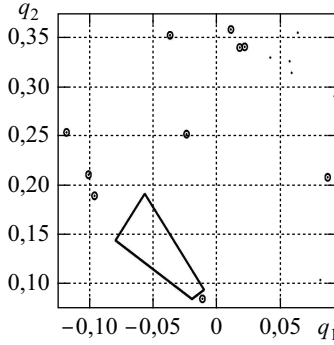


Рис. 2.

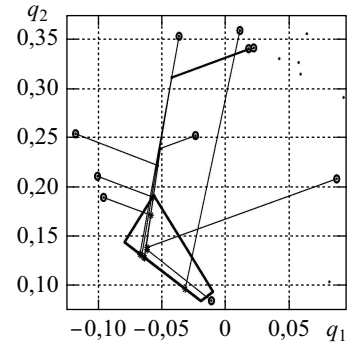


Рис. 3.

полиномов 5-й степени. В результате было найдено 90 устойчивых проекций, соответствующих параметрам стабилизирующих регуляторов (отмечены звездочками на рис. 1).

Для сравнения на рис. 1 также отображены границы области устойчивости характеристического полинома $p(z, q)$ в пространстве параметров регулятора q_1 и q_2 , полученные методом D -разбиения. В этом примере область устойчивости в пространстве параметров регуляторов достаточно велика, так что уже после этапов генерирования и проектирования было получено множество стабилизирующих проекций. В следующем примере рассмотрим случай, когда область устойчивости мала и проектирование не дает ни одной устойчивой проекции.

Пример 2. Найдем параметры регулятора вида (11), стабилизирующего объект с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{z^2 - 0,5z + 0,8}{z^4 - 0,1z^3 - 1,9825z^2 + 0,1772z + 0,8211}.$$

Было произведено $N = 2000$ испытаний, в результате которых все проекции оказались неустойчивыми (рис. 2). Из найденного множества проекций выберем 10 “кандидатов”. На рис. 2 выделена область устойчивости, полученная с помощью D -разбиения, и выбранные “кандидаты” отмечены кружками.

Зададим $\delta = 0,001$ и к каждому из “кандидатов” применим предложенный выше алгоритм перемещения корней характеристического полинома в область устойчивости. В итоге после 1–2 итераций для каждой начальной точки был найден стабилизирующий регулятор (рис. 3).

Пример 3. В [16] была рассмотрена задача синтеза регулятора, стабилизирующего непрерывный объект с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{17(s+1)(16s+1)(s^2-s+1)}{s(-s+1)(-s+90)(4s^2+s+1)}$$

и оптимального по критерию H_∞ . Регулятор представлен в форме передаточной функции заданной структуры с шестью неизвестными параметрами:

$$C(s) = \frac{q_1 + q_2s + q_3s^2}{q_4 + q_5s + q_6s^2}.$$

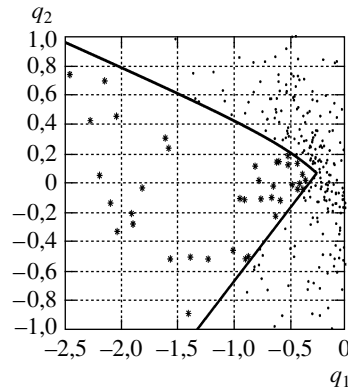


Рис. 4.

С помощью нетривиальных выкладок в [16] был найден один регулятор, служащий начальной точкой для построения оптимального регулятора:

$$C^0(s) = \frac{-0,7772 - 0,7568s - 2,4861s^2}{1 - 0,3136s - 0,857s^2}.$$

Если применить предложенный рандомизированный подход, то можно получить целый набор различных регуляторов, среди которых можно выбрать наилучший согласно некоторому дополнительному критерию. Так, например, при проведении 1000 испытаний было получено 345 различных наборов параметров, стабилизирующих систему. Среди них как достаточно близкие по значению к параметрам регулятора $C^0(s)$, например $q = (-0,5844, -0,6621, -2,0951, 1, -0,2935, -0,9322)$, так и значительно отличающиеся от них: $q = (-2,2926, -9,0457, -10,2542, 1, -7,4866, -6,4104)$.

Пример 4. Для непрерывной ММО-системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1,6667 & 0,3333 \\ 0,6667 & -0,6667 & 0 \\ 0 & 0,3333 & -0,3333 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ 0 \ 1)^T$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, будем искать регулятор $Q = (q_1, q_2)^T$, стабилизирующий данную систему по выходу. Семейство матриц замкнутой системы принимает вид

$$A_{cl}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1,6667 & 0,3333 \\ 0,6667 & -0,6667 & 0 \\ 0 & 0,3333 & -0,3333 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае регулятор имеет два неизвестных параметра, поэтому границы области устойчивости замкнутой системы можно построить на плоскости параметров (q_1, q_2) с помощью матричного D -разбиения [8]. Используем этот метод для наглядного сравнения результатов.

В результате применения предлагаемого рандомизированного алгоритма после 1000 испытаний было найдено 78 регуляторов, стабилизирующих систему. На рис. 4 приведен фрагмент неограниченной области устойчивости с границами, найденными методом D -разбиения, и полученные стабилизирующие регуляторы, которые обозначены звездочками.

5. Заключение

Предложен простой и эффективный подход к построению регуляторов фиксированной структуры, стабилизирующих заданную систему. Применение рандомизированных методов позволяет для каждой системы получать целое множество регуляторов. Предложенные методы успешно применяются как к одномерным, так и многомерным системам с дискретным или непрерывным временем. Возможно дальнейшее использование предложенного подхода к решению задач робастной стабилизации, увеличения степени устойчивости системы и т.д.

Автор признателен Б.Т. Поляку и П.С. Щербакову за обсуждение, ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Åström K.J., Hägglund T.* Advanced PID Control. Instrumentation, Systems and Automation Society. Research Triangle Park, NC, 2006.
2. *Ho M.-T., Datta A., Bhattacharyya S.P.* Structure and Synthesis of PID Controllers. London: Springer-Verlag, 2000.
3. *Ромач В.Я.* Теория автоматического управления. М.: Изд-во МЭИ, 2004.
4. *Blondel V., Tsitsiklis J.N.* A survey of computational complexity results in systems and control // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 1249–1274.
5. *Tempo R., Calafiore G., Dabbene F.* Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 2004.
6. *Petrikevich Ya.I., Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Fixed-Order Controller Design for SISO Systems Using Monte Carlo Technique // Proc. 9th IFAC Workshop “Adaptation and Learning in Control and Signal Processing” (ALCOSP’07), St.-Petersburg. 2007. Рукопись доступна на сайте: <http://lib.physcon.ru/>.
7. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
8. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Stability domain in the parameter space: D-decomposition revisited // *Automatica*. 2006. V. 42. № 1. P. 13–26.
9. *Fam A., Meditch J.* A canonical parameter space for linear systems design // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1978. V. 23. № 3. P. 454–458.
10. *Prakash, M.N., Fam A.T.* A geometric root distribution criterion // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1982. V. 27. № 2. P. 494–496.
11. *Franke J.* A Levinson-Durbin recursion for autoregressive-moving average processes // *Biometrika*. 1985. V. 72. № 3. P. 573–581.
12. *Джурри Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.
13. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* A new approach to robustness and stabilization of control systems via perturbation theory // Proc. 14 World Congr. IFAC, Beijing. 1999. V. C. P. 13–18.
15. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Numerical search of stable or unstable element in matrix or polynomial families: A unified approach to robustness analysis and stabilization / *Robustness in Identification and Control, Lecture Notes in Control and Inf. Sci.* V. 245. Springer, 1999. P. 344–358.
16. *Fujisaki Y., Oishi Y., Tempo R.* Mixed Deterministic/Randomized Methods for Fixed Order Controller Design. Technical Report, March 2007. Full text available at Рукопись доступна на сайте: <http://staff.polito.it/roberto.tempio/FOT07.pdf>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 13.03.2008