

©2005 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук,
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОСА С ПОМОЩЬЮ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ¹

Предложен новый подход к управлению хаосом в нелинейных дискретных автономных системах. Желаемая неустойчивая периодическая орбита стабилизируется с помощью малого управления, использующего предсказанную траекторию системы. При этом точное знание цикла не требуется, важно лишь его существование. Разработанный метод обоснован для одномерных и многомерных отображений; его эффективность демонстрируется численным моделированием известных из литературы отображений: логистического, треугольного, кубического, отображения Хенона. Алгоритм прост в реализации, однако его применение ограничено системами, в которых отсутствуют внешние возмущения и неопределенность в модели. Метод представляется весьма перспективным и может найти широкое применение.

1. Введение

Проблема детерминированного хаоса — по-видимому, одна из фундаментальных естественнонаучных концепций XX в. Действительно, существование очень сложных движений в простых детерминированных системах ставит под сомнение всю идеологию детерминизма в природе. Первые примеры сложного поведения систем с простыми моделями были обнаружены довольно давно. Так, еще в 1876 г. Кэли обнаружил нерегулярное строение областей сходимости метода Ньютона для решения очень простых уравнений (типа $z^3 = 1$) в комплексной области. Сегодня сказали бы, что границы этих областей являются фракталами. Позже французские ученые Жюлиа и Фату (1917–1920 гг.) подробно исследовали итерации дробно-рациональных отображений, частным случаем которых являются ньютоновские итерации. Очень большой вклад в теорию хаоса внес украинский математик Шарковский, опубликовавший в 1964 г. статью о сосуществовании циклов одномерных отображений [1]. Эта работа показала, как сложно может быть поведение динамических систем даже в одномерном случае. Однако подлинный взрыв интереса к хаосу начался после публикации работ Лоренца (1963), Рюэля и Такенса (1971) и Мандельброта (1970). После этого термины "*хаос*", "*странный аттрактор*", "*фрактал*" стали общепринятыми, и им посвящена ныне огромная литература. Укажем здесь лишь некоторые книги на русском языке, относящиеся к данной тематике [2 – 15]. В разработке теории и методов анализа хаоса принимали участие как математики, так и физики. В последние десять-пятнадцать лет большой интерес вызвала новая тема, в разработке которой приняли уча-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 02-01-00127, 05-01-00114 и Комплексной программы 19 Президиума РАН

стие и специалисты по теории управления. Эта тема — задача *управления хаосом*; впервые эта проблема, по-видимому, была сформулирована в [16], см. также обзоры [17–21]. Управление хаосом по своим целям и методам значительно отличается от традиционных постановок задач управления. Во-первых, это существенно нелинейная теория; техника стандартной линейной теории здесь неприменима. Во-вторых, цели управления иные — это не задачи оптимального управления, а задачи типа стабилизации хаоса, синхронизации хаотических движений либо, наоборот, хаотизации траекторий. В-третьих, допустимыми считаются лишь малые управления, которые тем не менее полностью изменяют характер движения. Ниже займемся лишь одной, наиболее важной задачей *стабилизации хаоса*. Прочитируем [20]: “Управление хаосом заключается в возмущении хаотической системы с целью стабилизировать данную неустойчивую периодическую орбиту, которая присутствует в хаотическом аттракторе”. В настоящей работе предлагается новый подход к решению задачи для нелинейных дискретных автономных систем, которые при отсутствии управления имеют следующий вид:

$$(1) \quad x_{k+1} = f(x_k).$$

Идея заключается в предсказании траектории системы и использовании аддитивного управления в форме

$$(2) \quad u(x) = \varepsilon \left(f_{m+s}(x) - f_m(x) \right),$$

где ε — длина шага (малая величина, для выбора которой ниже будет предложено простое правило), m — глубина прогноза, а s — желаемый период цикла. Всюду далее через f_m обозначена m -я итерация отображения f , т.е.

$$f_1(x) = f(x), \quad f_m(x) = f(f_{m-1}(x)).$$

В отличие от управления с использованием предыдущих итераций (метод DFC — запаздывающей обратной связи, предложенный в 1992 г. К. Пирагасом для непрерывных систем и позже распространенный на дискретный случай в [22]; новейшие результаты можно найти в [?]), управление в (2) формируется на основе предсказанных итераций для точки x_k . Это позволяет преодолеть многие трудности и ограничения, присущие DFC-методу, в том числе построить стабилизирующее управление (2) при малых ε . Частный случай управления вида (2) с $m = 0$ изучался в [23] (дальнейшие результаты можно найти в [24]), однако добиться малости ε при этом невозможно. Отметим еще некоторые важные отличия метода от большинства известных (и, в частности, от исходного метода OGY, предложенного в [16]). Управление применяется во все моменты времени, а не только в окрестности желаемого цикла (для чего нужно этот цикл знать заранее). Кроме того, не предполагается, что в функции f есть параметр, с помощью которого осуществляется управление.

Одним из возможных применений предлагаемого подхода является не собственно управление, но проверка наличия периодических орбит нелинейных итераций. Если такая орбита неустойчива, то обнаружить ее сложно; с помощью развитого здесь подхода орбита стабилизируется и поэтому легко обнаруживается. Более того, можно пытаться найти все неустойчивые периодические орбиты, их, как будет видно в дальнейшем, может быть много.

Первоначальный вариант работы представлен в [25]. Исходная идея прогнозирующего управления вида (2) была предложена студентом В.П. Масловым. Впоследствии в вычислениях и обсуждениях принимали участие С.В. Ефремов, Н.А.Мещеряков и Е.Н.Грязина.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе метод (2) изучается применительно к скалярным системам; приводятся результаты моделирования для классических примеров хаотических систем, задаваемых логистическим, треугольным и кубическим отображениями. Третий раздел посвящен n -мерному случаю, и в качестве примера рассматривается отображение Хенона. Вопросы практической реализации обсуждаются в разделе 4.

2. Скалярный случай

Рассмотрим разомкнутую скалярную нелинейную дискретную систему вида

$$(3) \quad x_{k+1} = f(x_k), \quad x_k \in \mathbf{R}^1, \quad k = 1, \dots,$$

у которой имеется s -цикл (периодическая орбита длины s): $x_1^*, x_2^*, \dots, x_s^*$, т.е. $x_{i+1}^* = f_i(x_i^*), i = 1, \dots, s-1, x_1^* = f_s(x_s^*)$, при этом $x_1^* \neq f_m(x_1^*), m < s$. Случай $s = 1$ соответствует неподвижной точке отображения f . Всюду в статье знание цикла не предполагается, единственное, что требуется, — существование цикла периода s . Такая информация часто бывает доступна, например, на это указывает известная теорема Шарковского об упорядочивании циклов [1]. Нас интересует случай *неустойчивого цикла* (неустойчивой периодической орбиты), и целью является его стабилизация с помощью малых управляющих воздействий.

Предполагается, что дифференцируемая функция f определена на некотором ограниченном интервале $[a, b]$ и отображает его в себя: $f : [a, b] \rightarrow [a, b], f \in C^1$. Число $\mu = f'(x_s^*) \cdot \dots \cdot f'(x_1^*)$ называется *мультипликатором* цикла. Условие $|\mu| < 1$ является достаточным для устойчивости цикла (цикл является *аттрактором*), а $|\mu| > 1$ достаточно для неустойчивости цикла (он называется *репеллером*). Под устойчивостью всюду далее понимается локальная сходимость траекторий к циклу, т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что если $\rho(x_k) < \varepsilon$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m) = 0$, где $\rho(x) = \min_i |x - x_i^*|$. Пусть рассматриваемый цикл неустойчив и $|\mu| > 1$. Чтобы стабилизировать его, добавим к функции f в правой части

(3) управляющий член вида (2). В результате замкнутая система приобретает вид

$$(4) \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = f(x) - \varepsilon \left(f_{(p+1)s+1}(x) - f_{ps+1}(x) \right),$$

$$(5) \quad \frac{|\varepsilon - \varepsilon^*|}{|\varepsilon^*|} < \frac{1}{|\mu|^{1/s}}, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{\mu^p(\mu - 1)},$$

где p — целое неотрицательное число. Обратим внимание на то, что величина ε^* становится сколь угодно малой для достаточно больших значений p и управление также оказывается малым, поскольку f_m ограничены для всех m , а ε убывает вместе с ε^* .

Т е о р е м а 1. Пусть $f \in C^1$ и у системы (3) имеется неустойчивый s -цикл с мультипликатором μ , $|\mu| > 1$. Тогда для системы (4) с произвольным $p \geq 1$ и любым ε , удовлетворяющим (5), этот цикл устойчив.

Доказательство этой и следующих теорем вынесены в Приложение.

Важной отличительной особенностью предлагаемой схемы управления является ее глобальное поведение. Теорема 1 обеспечивает лишь локальную сходимость метода, однако, если применять ее к стабилизации хаотического движения, обладающего так называемым *свойством перемешивания*, то можно ожидать, что для системы с управлением это свойство также сохраняется (поскольку F близка к f), т.е. после некоторого числа итераций траектория попадет в область притяжения стабилизированного цикла.

Проиллюстрируем сказанное на нескольких известных примерах скалярных хаотических систем.

П р и м е р 1: логистическое отображение. Рассматривается

$$(6) \quad f(x) = \lambda x(1 - x), \quad 0 \leq \lambda \leq 4,$$

для которой $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Поведение итераций (3) этого отображения изучено очень хорошо и обсуждается во всех книгах по хаосу [2–15], [26, 27]. При $\lambda < 1$ имеется неподвижная точка $x^* = 0$, которая устойчива, при $1 < \lambda < 3$ появляется еще одна неподвижная устойчивая точка $x^* = 1 - 1/\lambda$, при дальнейшем увеличении λ происходит бифуркация, появляется устойчивый 2-цикл и т. д. Важно, что при $\lambda > 3,84$ у отображения (6) существуют s -циклы для любого s , причем все они неустойчивы, и поведение системы полностью хаотично. Таким образом, представляет интерес стабилизация периодических орбит (6) при значениях λ , близких к 4; положим $\lambda = 3,9$. Моделирование проводилось следующим образом. Бралось 100 начальных точек x_0 на равномерной сетке на $[0, 1]$, и для каждой из них осуществлялось K итераций метода (4), (5) с различными значениями s, p и μ ; точки x_K выводились на график. В (5) полагали $\varepsilon = \varepsilon^* = 1/\mu^p(1 - \mu)$, где величина μ для желаемого s -цикла рассчитывалась так, как описано ниже в разделе 4.

Приведем типичные результаты моделирования. Для $s = 1$ (стабилизация неподвижной точки) значение $\mu = 2 - \lambda = -1,9$ для $x^* = 1 - 1/\lambda = 0,7436$ можно получить в явном виде, и при этом оказывается, что метод глобально стабилизирует желаемую неподвижную точку, причем довольно быстро, см. рис. 1 (здесь $K = 150$, $p = 10$). Стабилизация 2-цикла также происходит быстро и очень просто, и при этом возможны значения $p \simeq 15$ и $\varepsilon \simeq 10^{-10}$. При $s = 3$ имеется два 3-цикла, для одного из которых была получена оценка $\mu = -5,17$, и при $K = 2000$, $p = 5$ наблюдалась глобальная стабилизация, см. рис. 2. При $s = 7$ удалось стабилизировать два цикла периода 7 (при $\mu = -90$, и $\mu = 95$). Однако для достижения глобальной сходимости потребовалось большее число итераций, $K = 10000$. При этом для некоторых начальных приближений наряду с 7-циклом стабилизируется также и неподвижная точка $x^* = 1 - 1/\lambda = 0,7436$. Можно выявить и циклы более высоких периодов, например, 8 циклов длины 11. В качестве "рекордных" длин циклов отметим, что проводилось систематическое исследование циклов периода 31, удалось найти и стабилизировать 133 таких цикла, при этом бралось $p = 0$, а μ достигало значений порядка 10^8 , т. е. $\varepsilon \sim 10^{-8}$.

П р и м е р 2: треугольное отображение. Рассмотрим

$$(7) \quad f(x) = \lambda(1 - |2x - 1|), \quad 0 \leq \lambda \leq 1;$$

здесь также $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Итерации этого отображения имеют много общего с логистическим отображением — хаотическое поведение появляется при значениях λ , близких к единице. Однако имеется и существенная разница: все циклы (7) неустойчивы для любого $\lambda > 0,5$. Действительно, $|f'(x)| = 2\lambda > 1$ для любой точки $x \neq 0,5$, и $|\mu| = (2\lambda)^s > 1$ для любого s -цикла. Тем не менее эти циклы можно стабилизировать с помощью управлений (4), (5), причем весьма просто, поскольку можно ограничиться значениями $\mu = \pm(2\lambda)^s$. Возьмем $\lambda = 1$, тогда никакой цикл не содержит точку 0,5 и теорема 1 применима (как видно из ее доказательства, дифференцируемость $f(x)$ требуется только в точках цикла). Величины n_s (количество s -циклов) и соответствующие значения мультипликаторов μ известны [26], см. табл.

Количество s -циклов и значения мультипликаторов.

s	1	2	3	4	5	6
n_s	2	1	2	3	6	9
μ	± 2	-4	± 8	± 16	± 32	± 64

При $s = 1$ и $\mu > 0$ стабилизируется неподвижная точка $x^* = 0$, а при $s = 1$ и $\mu < 0$ точка $x^* = 2/3$. При $s = 2$ обнаруживаем 2-цикл с $\mu < 0$, а при $s = 3$ и $s = 4$ — по два цикла. Удастся также стабилизировать 5-циклы, все 6 таких циклов обнаруживаются (для каждого из двух знаков μ одновременно стабилизируются три 5-цикла). В экспериментах величина p выбиралась из условия $ps \sim 25$, при этом $\varepsilon \sim 10^{-8}$.

В примерах 1 и 2 стабилизировались циклы исходной системы. Однако возможны ситуации, когда замкнутая система будет обладать дополнительными циклами (т. е. у функции $F(x)$ будут циклы, не являющиеся циклами $f(x)$), и они будут стабилизироваться. Такая довольно редкая возможность иллюстрируется следующим примером.

Пример 3: кубическое отображение. Рассмотрим

$$(8) \quad f(x) = x^3 - 2x + c.$$

В [28] показано, что при $c = c^* = 1/\sqrt{3} \approx 0,57735$ данное отображение имеет 3-цикл, однако при других значениях параметра (даже сколь угодно близких к c^*) такого цикла нет. Вычисления проводились при $s = 3, p = 3, c = 0,57, \varepsilon = 0,002$. Тогда у функции $F(x)$ есть цикл длины 3, довольно близкий к циклу $f(x)$ при $c = c^*$. Более того, этот цикл устойчив, и итерации алгоритма (4) при любых начальных условиях из отрезка $[-0,6 \quad 1,5]$ быстро (не более чем за 50 итераций) сходятся к этому циклу. Хотя величина $\varepsilon = 0,002$ относительно велика, на графике функции $f_3(x)$ и $F_3(x)$ практически совпадают, см. рис. 3, где воспроизведен также в увеличенном виде фрагмент вблизи одной из точек цикла. Любопытно поведение итераций (4) без управления при том же значении параметра $c = 0,57$ (рис. 4). Влияние "фантомного" цикла сказывается — время от времени итерации притягиваются к нему, но затем опять проявляется хаотическое поведение. Этот эффект называется *переменяемостью*.

3. Многомерный случай

Рассмотрим n -мерный аналог системы (3):

$$(9) \quad x_{k+1} = f(x_k), \quad x_k \in \mathbf{R}^n, \quad k = 1, \dots$$

Определения s -цикла и мультипликатора — те же, что и в скалярном случае, но теперь мультипликатор является $n \times n$ матрицей Якоби $M = f'(x_s^*) \cdot \dots \cdot f'(x_1^*)$. Подчеркнем, что в многомерном случае мультипликатор зависит от порядка точек x_i^* , т.е. от того, какая из них рассматривается в качестве начальной точки цикла. Например, если это x_i^* , то получаем $M_i = f'(x_{i-1}^*) \cdot \dots \cdot f'(x_i^*)$, где индекс аргумента изменяется циклически: $i-1, i-2, \dots, 1, s, s-1, \dots, i$. Поэтому $M = M_1$, и, вообще говоря, $M_i \neq M_1$ при $i \neq 1$. Но при этом собственные значения матриц M_1, \dots, M_s совпадают (для любых $n \times n$ матриц A, B матрицы AB и BA имеют одни и те же собственные значения: если $ABe = \lambda e$, то умножая на B получим $BAVe = \lambda Ve, BAF = \lambda f, f = Be$). Обозначим через $\mu_i, i = 1, \dots, n$ собственные значения любой из матриц M_j . Цикл устойчив, если спектральный радиус $\rho = \max_i |\mu_i| < 1$, и неустойчив при $\rho > 1$. Матрицу M_i будем также записывать в форме

$M_i = A_i B_i$, где $A_i = f'(x_{i-1}^*) \cdot \dots \cdot f'(x_1^*)$, $B_i = f'(x_s^*) \cdot \dots \cdot f'(x_i^*)$, $A_1 = I$, $B_1 = M$, $B_i A_i = M$. Будем пользоваться таким же законом управления, как и в скалярном случае:

$$(10) \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = f(x) - \varepsilon(f_{(p+1)s+1}(x) - f_{ps+1}(x)),$$

$$\frac{|\varepsilon - \varepsilon^*|}{|\varepsilon^*|} < \frac{1}{|\mu|^{1/s}}, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{\mu^p(\mu - 1)},$$

но при этом выбор μ осуществляется так, как указано ниже. Приведем простейший результат о стабилизации.

Т е о р е м а 1. Допустим, что $f \in C^1$ и у системы (9) имеется неустойчивый s -цикл с мультипликатором M , причем $\rho > 1$. Пусть далее $\mu_n = \mu$ вещественно, $|\mu| = \rho$, и $|\mu_i| < 1, i = 1, \dots, n - 1$. Тогда при достаточно большом p этот цикл является устойчивым циклом для системы (10).

По поводу поведения ε можно сказать то же, что и в одномерном случае — с ростом p величина ε убывает. Если (как это и предполагается для хаотических систем) функция f ограничена, то отсюда следует малость управлений. Кроме того, из локальной устойчивости и свойства перемешивания для хаотических систем можно ожидать, что метод (10) обладает не только локальной, но и глобальной устойчивостью.

Любопытно посмотреть, как выглядит метод для линейных задач. Пусть, например, $f(x) = Ax$, где A невырождена, тогда $x^* = 0$ — единственная неподвижная точка, и никаких циклов более высокого порядка не существует. Пусть у матрицы A есть единственное неустойчивое вещественное собственное значение μ , $|\mu| > 1$, а все другие собственные значения по модулю меньше единицы. Тогда метод (10) можно несколько изменить (упростить его для этого случая), придав ему вид

$$(11) \quad x_{k+1} = Ax_k - \varepsilon A^{p+1} x_k, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{\mu^p}, \quad \frac{|\varepsilon - \varepsilon^*|}{|\varepsilon^*|} < \frac{1}{|\mu|}.$$

Такие итерации сходятся к нулю при достаточно больших p (тогда как исходные $x_{k+1} = Ax_k$ расходятся), и, по-видимому, такой метод является новым. Однако в отличие от нелинейного случая (где функция $f(x)$ предполагалась ограниченной) член $\varepsilon A^{p+1} x_k$ не является малым на начальных итерациях, хотя и стремится к нулю с ростом k .

П р и м е р 4: отображение Хенона. Этот классический двумерный пример впервые был рассмотрен в [29] и обсуждается практически во всех книгах по хаосу:

$$(12) \quad y_{k+1} = 1 - 1,4y_k^2 + z_k, \quad z_{k+1} = 0,3y_k, \quad k = 1, \dots$$

Точки x_{40} , $x = (y, z)^T$ для начального x_1 , выбираемого на равномерной сетке на $S = [-1, 4] \times [-1, 4] \times [-0, 4, 0, 4]$ изображены на рис. 5; видна также структура “странного аттрактора”. На рис. 6 изображена траектория системы для некоторого фиксированного

начального x_1 ; сложное движение по точкам странного аттрактора является характерным.

Известно, что у такого отображения существует неустойчивая неподвижная точка $x^* = (0, 6314 \quad 0, 1894)$; собственные значения соответствующей ей матрицы M равны $(-1, 92 \quad 0, 15)$, так что условия теоремы 2 выполнены с $\mu = -1, 92$. Имеется также один 2-цикл $x_1^* = (-0, 4758 \quad 0, 2927)$, $x_2^* = (0, 9758 \quad -0, 1427)$, который тоже неустойчив. На рис. 7 изображено поведение компоненты y для типичной траектории при стабилизации методом (10) неподвижной точки ($\mu = -1, 92$); эта точка обладает глобальной устойчивостью. Схожие результаты получены при стабилизации 2-цикла ($s = 2, \mu = -3, 01$). Для $s = 4$ наличие циклов и значения их мультипликаторов μ неизвестны. Подбором удалось найти значение $\mu = -9$, при котором 4-цикл стабилизируется. Результаты моделирования приведены на рис. 8 (дана первая компонента для типичной траектории) и рис. 9 (для той же траектории изображены последние 20 итераций на плоскости x ; все они лежат в 4-цикле). Во всех приведенных экспериментах типичное значение величины ε было $\varepsilon \sim 10^{-4} - 10^{-5}$.

В теореме 2 предполагалось, что имеется одно доминирующее собственное значение матрицы M , большее по модулю единицы (и оно вещественно), а остальные собственные значения меньше единицы по модулю. Такая ситуация встречается достаточно часто, однако бывают мультипликаторы с произвольным расположением собственных значений. В этом случае теорема может быть обобщена за счет усложнения алгоритма (требуется знание всей матрицы M).

Прежде всего, без ограничения общности можно считать, что $s = 1$, т. е. исследуется случай неподвижной точки x^* (действительно, в общем случае можно заменить f на f_s и искать неподвижную точку отображения f_s). Тогда мультипликатор — это $n \times n$ матрица Якоби

$$M = f'(x^*)$$

с собственными значениями μ_1, \dots, μ_s . Неподвижная точка устойчива, если $\rho = \max_i |\mu_i| < 1$ и неустойчива, если $\rho > 1$.

Используем закон управления

$$(13) \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = f(x) - E(f_{p+2}(x) - f_{p+1}(x)),$$

который отличается тем, что скаляр ε заменен матрицей E . Пусть $M = T\Lambda T^{-1}$, $T \in R^{n \times n}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i = \mu_i$, $\mu_i \in R$, $i = 1, \dots, t$, $\lambda_i = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ -v_i & u_i \end{pmatrix}$, $\mu_i = u_i \pm jv_i$, $i = t+1, \dots, n$, $j = \sqrt{-1}$. Иначе говоря, мультипликатор M вещественным линейным преобразованием T приведен к вещественно-диагональной форме, где вещественным собственным значениям отвечают диагональные элементы, а каждой паре комплексных собственных

значений $\mu_i = u_i \pm jv_i$ отвечает вещественный блок 2×2 , также расположенный на диагонали. Построим E так:

$$E = T\tilde{\Lambda}T^{-1}, \tilde{\Lambda} = (\varepsilon_i),$$

где $\varepsilon_i = 0$, если $|\mu_i| < 1$, и

$$\varepsilon_i^* = \frac{1}{\mu_i^p(\mu_i - 1)}, \quad \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_i^*|}{|\varepsilon_i^*|} < \frac{1}{|\mu_i|},$$

в противном случае. При этом все действия с комплексными числами μ_i понимаются как их реализации в виде 2×2 вещественных матриц λ_i .

Теорема 1. Пусть x^* — неустойчивая неподвижная точка отображения f , а у матрицы $M = f'(x^*)$ все собственные значения различны и не лежат на единичной окружности. Тогда x^* будет устойчивой неподвижной точкой итераций (13).

4. Практические аспекты

Оценивание величины μ . В некоторых из рассмотренных примерах значение мультипликатора стабилизируемого цикла либо было известно заранее, либо его можно посчитать без труда (например, для неподвижных точек или 2-циклов, а также любых циклов треугольного отображения). Однако в общем случае величина μ недоступна: это относится к ситуациям, когда s велико, или когда мы не располагаем аналитическим выражением для функции f , а ее значения даются некоторым алгоритмом. Тем не менее, величина μ может быть эффективно оценена; особенно просто такие оценки получаются в скалярном случае ($n = 1$). Введем функцию $g(x) = f_s(x) - x$ и посчитаем ее значения на равномерной сетке $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $x_{i+1} - x_i = d$ (предполагается, что интервал $S = [a, b]$, $f : S \rightarrow S$ известен). Определим теперь точки изменения знака: $g(x_i)g(x_{i+1}) < 0$, — они являются кандидатами на нули функции g , т.е. кандидатами на точки s -циклов функции f . При этом точки, составляющие t -циклы (т.е. когда $t < s$ — делитель s) также являются нулями g , их исключаем из рассмотрения. Итак, величины $(g(x_{i+1}) - g(x_i))/d$ представляют собой хорошие оценки для μ при условии, что d достаточно мало.

Такой подход можно распространить и на многомерный случай, — минимизацию функции $\|g(x)\|$ осуществляем либо на сетке, либо с помощью какой-нибудь оптимизационной процедуры, например, типа `fmin` в системе MATLAB. Пусть x_0 — какой-нибудь локальный минимум, и $\|g(x_0)\| \approx 0$. Проведем m итераций ($m \sim 10$): $x_1 = f_s(x_0), \dots, x_m = f_s(x_{m-1})$ и вычислим $a = (x_m - x_{m-1}, x_{m-1} - x_{m-2})$, $r_1 = \|x_m - x_{m-1}\|$, $r_2 = \|x_{m-1} - x_{m-2}\|$, $q = a/(r_1 r_2)$. Тогда при значениях $|q|$, близких к единице, величина a/r_2^2 представляет собой приемлемую оценку для μ .

Выбор величины p . Из выражений (5), (10) видно, что чем больше p , тем меньше ϵ . Однако вследствие ошибок округления при представлении данных в компьютере значения p не могут выбираться слишком большими, иначе функция $f_m(x)$ не может быть вычислена точно для больших m . Рассмотрим примеры. Для $f(x) = 4x(1 - x)$ имеем $f_m(0) = 0$ при любом $m \geq 1$, но при этом $f_m(\epsilon) \approx 4^m \epsilon$ для малых ϵ и не слишком больших m . Поэтому ошибка, присутствующая в x и равная машинной точности $\epsilon_{ps} = \epsilon = 2^{-52}$, приводит к ошибке вычисления $f_m(x)$, равной 2^{2m-52} , так что глубина прогноза m , которая не приводит к слишком грубым ответам, должна быть $m \sim 20$. В других ситуациях ограничения не столь жесткие: если точки $x_i, x_{i+1} = f(x_i), i = 1, \dots, m$ распределены приблизительно равномерно на $[0, 1]$, то $\mathbf{E}|f'(x)| = 2$, и $\mathbf{E}|f'_m(x)| = 2^m$, поэтому допустимы значения $m \sim 40$. То же справедливо для треугольного отображения $f(x) = (1 - |2x - 1|), |f'_m(x)| = 2^m$ при любых x, m . Можно считать, что выбор $s(p + 1) \sim 25$ сравнительно безопасен для этих примеров; этот вывод подтвердился во всех численных экспериментах. В целом же, рост ошибок округления зависит от так называемых *показателей Ляпунова*, которые удается оценивать. Отметим, что условие $s(p + 1) \sim 25$ накладывает ограничения на длины стабилизируемых циклов; значение $s = 31$ для логистического отображения, которое приводилось выше, близко к предельно возможному (при этом приходится брать $p = 0$).

Величина K . Как упоминалось выше, Теоремы 1 - 3 обеспечивают лишь локальную устойчивость периодических орбит. Как правило, чем больше s и p , тем меньше область притяжения стабилизированного цикла. Вследствие хаотической природы движения, траектории все же попадают в область притяжения устойчивой орбиты, но при большем числе итераций K . Это объясняет тот факт, что с ростом s, p для стабилизации цикла требуются все большие значения K . Так, в Примере 1 для глобальной стабилизации 7-цикла приходилось проводить $K = 10000$ итераций, в то время как для стабилизации неподвижной точки оказалось достаточно сделать $K = 150$ итераций.

5. Заключение

Предложен простой и эффективный метод стабилизации неустойчивых s -циклов в нелинейных дискретных системах, использующий малые аддитивные управления. Он основан на прогнозировании траектории на m и $m + s$ итераций вперед, где m имеет вид $ps + 1$, а p достаточно велико. Главное предположение — это возможность выполнить подобное прогнозирование достаточно точно, иначе говоря функция $f(x)$ предполагается известной (или заданной неким алгоритмом) и возмущения при ее вычислении отсутствуют. Метод может использоваться также для обнаружения и подсчета всех циклов.

Среди направлений будущих исследований, связанных с предлагаемым подходом — исследование задач синхронизации хаотических движений, задач с непрерывным време-

нем (то есть описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями), а также большой круг применений метода к задачам механики, экономики, физики, теории коммуникаций. Эти проблемы предполагается рассмотреть в будущих публикациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Цикл $x_1^*, x_2^*, \dots, x_s^*$ отображения f остается циклом для функции f_m при любом m , поэтому $F(x_i^*) = f(x_i^*) - \varepsilon(f_{p(s+1)+1}(x_i^*) - f_{ps+1}(x_i^*)) = x_{i+1}^*$, т.е. он также является циклом и для F . Вычислим мультипликатор для (4): $\nu = F'(x_s^*) \cdot \dots \cdot F'(x_1^*)$. Поскольку $f'_s(x_i^*) = \mu$, $f'_{ps}(x_i^*) = \mu^p$, $f'_{ps+1}(x_i^*) = \mu^p f'(x_{i+1}^*)$, то получаем $F'(x_i^*) = (1 - \varepsilon\mu^p(\mu - 1))f'(x_i^*)$. Перемножая эти равенства для $i = 1, \dots, s$, приходим к выражению для мультипликатора F :

$$(14) \quad \nu = (1 - \varepsilon\mu^p(\mu - 1))^s \mu.$$

Теперь, чтобы убедиться в устойчивости цикла, достаточно показать, что $|\nu| < 1$. Действительно, имеем $|\nu| = |(1 - \varepsilon\mu^p(\mu - 1))|^s |\mu| < |(1 - (\varepsilon^*(1 \pm (1/|\mu|^{1/s})))\mu^p(\mu - 1))|^s |\mu| = 1$, поскольку функция $|1 - c\varepsilon|^s$ достигает максимума при крайних значениях ε . ■

Доказательство теоремы 2 следует логике доказательства теоремы 1; разница заключается в том, что произведение матриц некоммутативно. Для вычисления матричного мультипликатора $N = F'(x_s^*) \cdot \dots \cdot F'(x_1^*)$ цикла $x_1^*, x_2^*, \dots, x_s^*$ отображения F вычислим каждый сомножитель. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции $f'_m(x_i^*) = f'_{m-1}(x_{i+1}^*)f'(x_i^*)$ и определением мультипликатора M_i , получаем $f'_{ps}(x_i^*) = M_i^p$, $f'_{ps+1}(x_i^*) = M_{i+1}^p f'(x_i^*) = f'(x_i^*)M_i^p$, $M_i^p = A_i M^{p-1} B_i$, откуда $F'(x_i^*) = f'(x_i^*)(I - \varepsilon A_i (M^p - M^{p-1}) B_i)$. По индукции отсюда получаем $F'(x_{i-1}^*) \cdot \dots \cdot F'(x_1^*) = A_i (I - \varepsilon M^p (M - I))^{i-1}$ и приходим к $N = F'(x_s^*) \cdot \dots \cdot F'(x_1^*) = A_{s+1} (I - \varepsilon M^p (M - I))^s = M (I - \varepsilon M^p (M - I))^s$. Собственные значения ν_i мультипликатора N выражаются через собственные значения μ_i мультипликатора M :

$$(15) \quad \nu_i = \mu_i (1 - \varepsilon \mu_i^p (\mu_i - 1))^s.$$

Далее, для $i = n$, $\mu_n = \mu$ в соответствии с (10) имеем $|\nu_n| < 1$ как и для одномерного случая, а для $i \neq n$ будет $|\nu_i| \leq |\mu_i| (1 + \frac{|\mu_i|^p |1 - \mu_i|}{|\mu|^p |\mu - 1|})$. Поскольку $|\mu_i| < 1$ по условиям теоремы, то $|\mu_i|^p / |\mu|^p$ стремится к нулю с ростом p , т.е. $|\nu_i| < 1$ для достаточно большого p . Заключаем, что для таких p будет $r = \max_{1 \leq i \leq n} |\nu_i| < 1$, то есть рассматриваемый цикл является устойчивым для отображения F . ■

Доказательство теоремы 3 основывается на аналоге формулы (15)

$$(16) \quad \nu_i = \lambda_i (1 - \varepsilon_i \lambda_i^p (\lambda_i - 1)),$$

которая оказывается справедливой для рассматриваемого метода. Далее, при $|\lambda_i| < 1$ выбирается $\varepsilon_i = 0$, то есть $|\nu_i| = |\lambda_i| < 1$, а при $|\lambda_i| > 1$ будет $|\nu_i| < 1$ в силу тех же выкладок, что и при доказательстве теоремы 1. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя //Украинск. матем. журн. 1964. ь 1. С. 61–71.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002.
3. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. Ижевск: РХД, 2004.
4. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. Ижевск: РХД, 2002.
5. Неймарк Ю.И., Ланда Л.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
7. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
8. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004.
9. Анищенко В.С., Астахов В.В. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Ижевск: РХД, 2003.
10. Фрадков А.Л., Якубовский О.А. (ред.) Управление молекулярными и квантовыми системами. Ижевск: РХД, 2003.
11. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Ижевск: РХД, 2004.
12. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Ижевск: РХД, 2004.
13. Симо С., Смейл С., Шенсине А. и др. Современные проблемы хаоса и нелинейности. Ижевск: РХД, 2002.
14. Синай Я.Г., Шильников Л.П. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
15. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
16. Ott E., Grebogi C. Yorke J.A. Controlling chaos// Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
17. Chen G., Yu X.(eds) Chaos control. Lect. Notes Contr. Inf. Sci. 2003. No. 292.

18. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific, 1998.
19. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения, части I, II // АиТ. 2003. Ъ 5, С.3–45; 2004, Ъ 4, С.3–34.
20. *Arecchi F.T., Bocolletti S., Ciofini M. u др.* The control of chaos: theoretical schemes and experimental realizations // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. V 8. P. 1643–1655.
21. *Bocolletti S., Grebogi C. Lai Y.-C.* The control of chaos: theory and applications // Physics Reports. 2000. V. 329. P. 103–197.
22. *Ushio T.* Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems // IEEE Trans. Circ. Syst. 1996. V. 43. P. 815–816.
23. *Ushio T., Yamamoto S.,* Prediction-based control of chaos // Physics Letters A. 1999. V. 264. No. 1. P. 30–35.
24. *Hino T., Yamamoto S. Ushio S.* Stabilization of unstable periodic orbits of chaotic discrete-time systems using prediction-based feedback control // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. V. 12. No. 2. P. 439–446.
25. *Polyak B.T., Maslov V.P.* Controlling chaos by predictive control // Proceedings of 16th World IFAC Congress. Praha, July 2005.
26. *Gumovskiy I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems. Lect. Notes in Math. 1980. No. 809.
27. *Mira Ch.* Chaotic dynamics. Singapore: World Scientific, 1987.
28. *Li M.-C.* Point bifurcation and bubbles for a cubic family // Journ. Difference Equat. and Appl. 2003. V. 9. No. 6. P.553–558.
29. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69–77. Русский перевод: "Двумерное отображение со странным аттрактором", в сб. "Странные аттракторы", М.: Мир. 1981. С. 152–163.

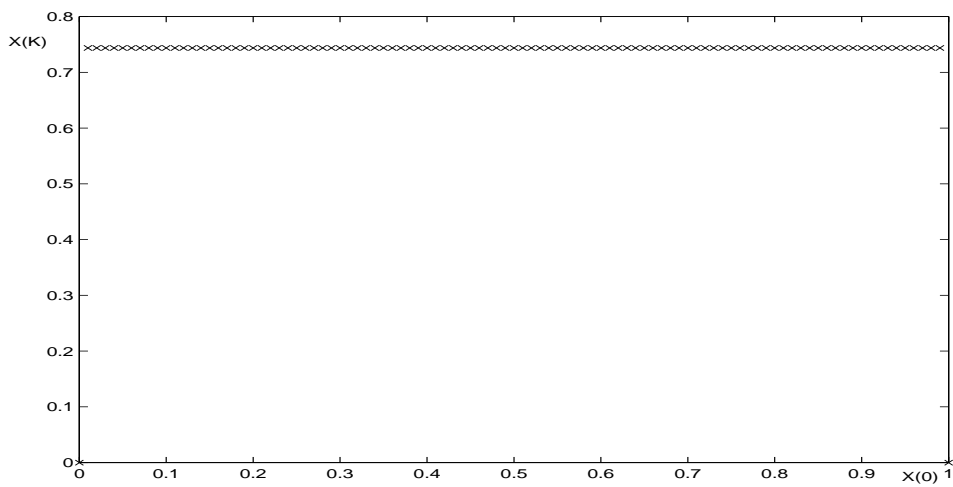


Рис. 1. Стабилизация неподвижной точки логистического отображения

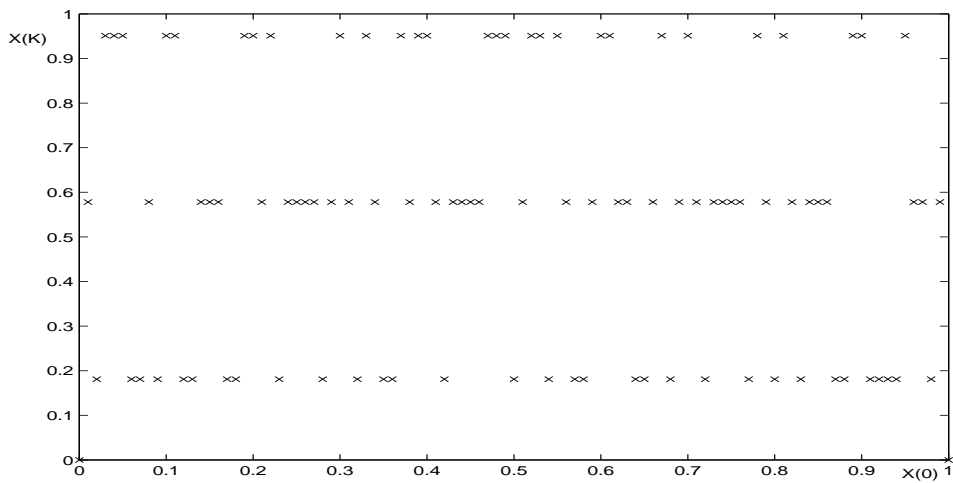


Рис. 2. Стабилизация 3-цикла логистического отображения.

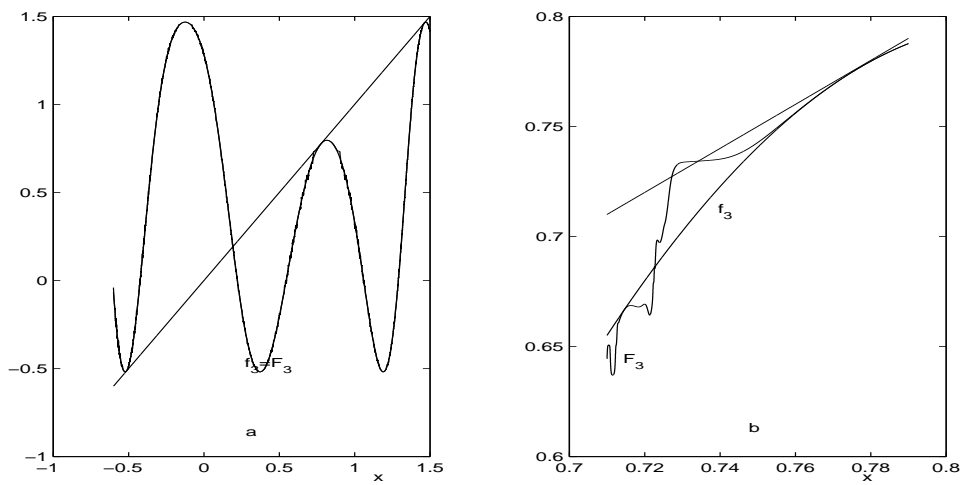


Рис. 3. Сравнение функций $f_3(x)$ и $F_3(x)$ для кубического отображения

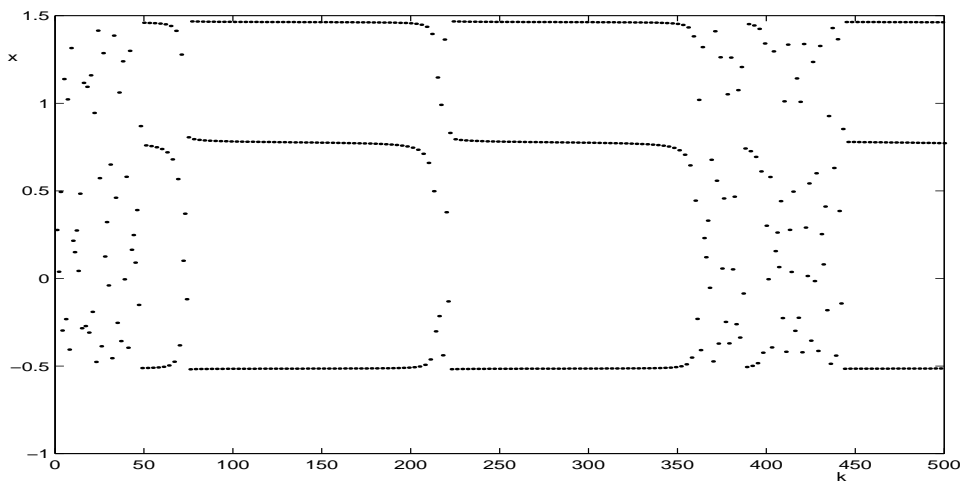


Рис. 4. Неуправляемые итерации для кубического отображения

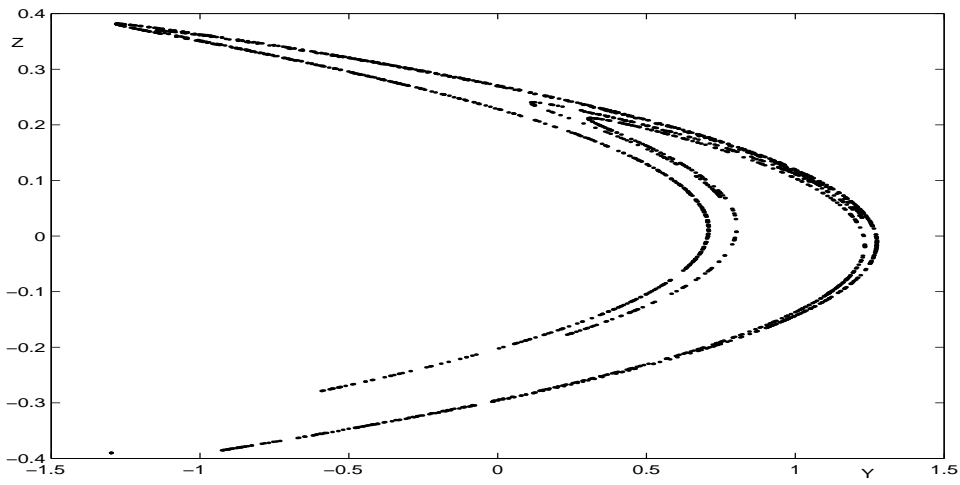


Рис. 5. Странный аттрактор отображения Хенона.

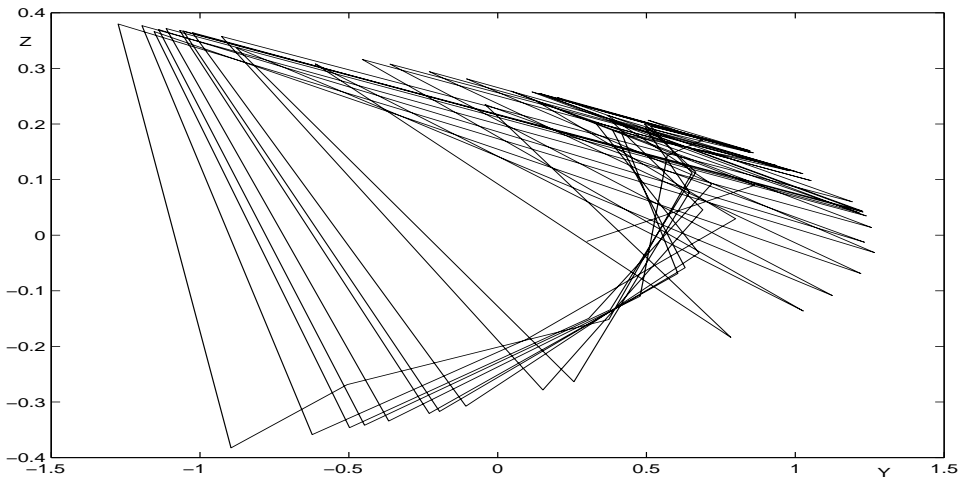


Рис. 6. Индивидуальная траектория отображения Хенона.

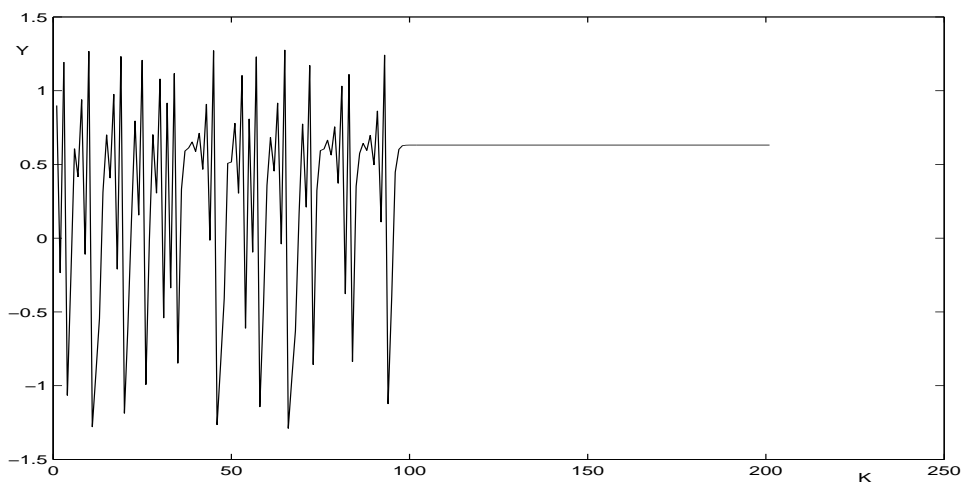


Рис. 7. Стабилизация неподвижной точки отображения Хенона.

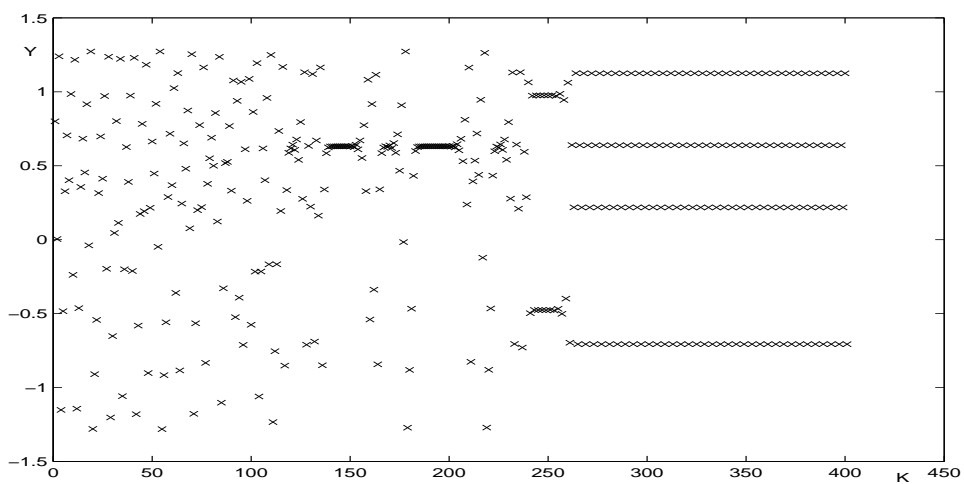


Рис. 8. Стабилизация 4-цикла отображения Хенона; координата y .

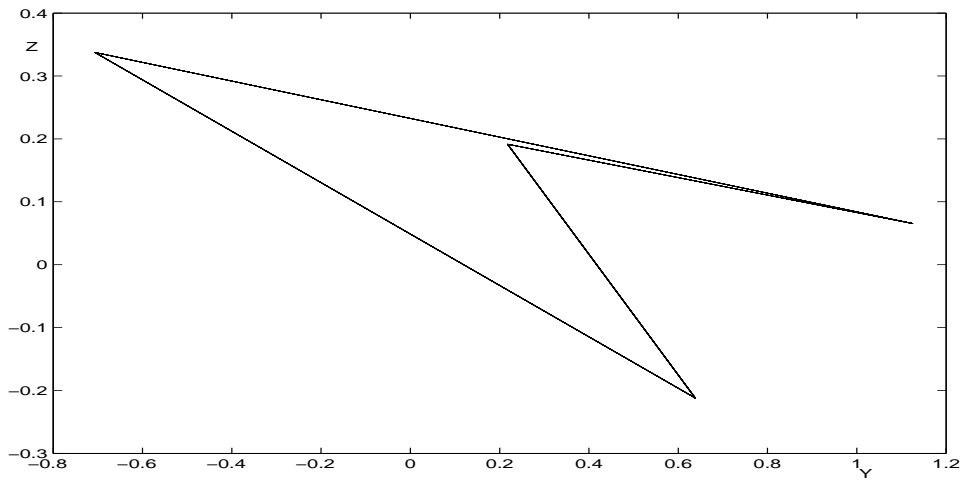


Рис. 9. Стабилизация 4-цикла отображения Хенона; плоскость x