©2004 Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

ОБОБЩЕННАЯ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Понятие сверхустойчивости, использованное недавно для решения различных проблем робастности и линейной теории управления, обобщено для достижения большей гибкости. Для непрерывного и дискретного случаев введен класс матриц E, для которых условие сверхустойчивости выполняется после диагонального преобразования. Системы с такими матрицами обладают кусочно-линейными функциями Ляпунова $V(x) = \max_i |x_i/d_i|$. Такие проблемы, как проверка принадлежности $\tilde{A} \subset E$ для интервальных матриц, существование такой обратной связи K, что $A + BK \in E$, наилучшее покомпонентное оценивание, подавление возмущений, – все они сведены к задачам линейного программирования, а потому легко решаемы. Для решения возникающих линейных неравенств предложены эффективные численные методы.

1. Введение

Недавно введенное [1–4] понятие *сверхустойчивости* было использовано в многочисленных приложениях теории автоматического управления, таких как робастный анализ, синтез статической обратной связи по выходу, одновременная стабилизация, робастная стабилизация, подавление возмущений. Однако это свойство слишком жесткое - мы задаемся фиксированной функцией Ляпунова $V(x) = \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Сверхустойчивые матрицы всего лишь узкое подмножество устойчивых матриц, поэтому добиться сверхустойчивости очень сложно. Ниже предложен более гибкий подход, основанный на диагональном преобразовании

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00127) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

к сверхустойчивому виду. Этот подход аналогичен конструированию для линейных систем диагональных квадратичных функций Ляпунова (так называемая *диагональная устойчивость*, см. [5–7]). Здесь же мы составляем кусочно-линейные функции Ляпунова в виде $V(x) = \max_i |x_i/d_i|$. Такие функции были исследованы при проверки устойчивости и при доказательстве сходимости численных методов в [8–10]. Но, насколько автору известно, они никогда не были использованы для целей синтеза регуляторов.

Во втором параграфе мы начинаем с определения класса E обобщенно сверхустойчивых систем (для случаев непрерывного и дискретного времени) и представляем простое описание в терминах линейных неравенств. Также выясняются связи с диагональной устойчивостью. Для нескольких примеров (фробениусовы матрицы, матрицы 2×2, треугольные матрицы) дается исчерпывающее описание множества E. В третьем параграфе обсуждается тема робастности. Мы получаем необходимое и достаточное условие для принадлежности интервальной матрицы классу E, таким образом, это достаточное условие для робастной устойчивости интервальных матриц. Простейшая задача синтеза – сделать замкнутую систему обобщенно-сверхустойчивой с помощью обратной связи по состоянию – полностью решена в разделе 4. Задачи с ограниченными внешними возмущениями рассмотрены в пятом и шестом разделах. Сначала обсуждается проблема наилучшего покомпонентного оценивания: ищется наименьший инвариантный параллелепипед для неуправляемой системы. Далее мы обращаемся к задаче синтеза для подавления возмущений. В седьмом разделе предлагаются специальные численный методы для решения возникающих линейных неравенств. Они описаны для частной задачи одновременной стабилизации, в которой число неравенств может быть велико.

2. Обобщенно-сверхустойчивые матрицы

Напомним, что матрица A $n\times n$ с вещественными элементами a_{ij} является *сверхустойчивой*, если

$$\sigma(A) = \min_i(-a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|) > 0 \tag{1}$$

(сверхустойчивость в непрерывном времени) или

$$||A||_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| < 1 \tag{2}$$

(дискретное время). Для избежания путаницы заметим, что во многих источниках эта норма обозначается как $||A||_\infty$.

Для непрерывных систем

$$\dot{x} = Ax$$

выполним преобразование $x = Dy$, где $D > 0$ - диагональная матрица. Для новой переменной y имеем

$$\dot{y} = \bar{A}y, \quad \bar{A} = D^{-1}AD.$$

Такое же преобразование может быть проведено для дискретных систем

$$x_{k+1} = Ax_k$$

из которого вытекает

$$y_{k+1} = \bar{A}y_k, \quad \bar{A} = D^{-1}AD.$$

`Определение 1.` *Матрица $A \in E$ (множеству обобщенно сверхустойчивых матриц), если существует диагональная матрица $D > 0$, такая, что $\bar{A} = D^{-1}AD$ сверхустойчива. Чтобы различать непрерывный и дискретные случаи, будем использовать обозначения E_c and E_d соответственно.*

Такие матрицы хорошо известны в численном анализе и управлении, например, см. [11, 9, 12, 6], где могут быть найдены другие ссылки. По-видимому, впервые они были введены Островским [7].

Для решения сверхустойчивой системы $\dot{y} = \bar{A}y$ имеем оценку [1,3] $||y(t)||_\infty \leq e^{-\sigma(\bar{A})t}||y(0)||_\infty$, тогда для решения первоначальной системы $\dot{x} = Ax$ получаем оценку $||D^{-1}x(t)||_\infty \leq e^{-\sigma(\bar{A})t}||D^{-1}x(0)||_\infty$. Это означает, что функция $V(x) = \max_i |x_i/d_i|$ является функцией Ляпунова для $\dot{x} = Ax$ если $A \in E_c$ с оценкой $V(x(t)) \leq e^{-\sigma(\bar{A})t}V(x(0))$. Сходным образом это функция Ляпунова для дискретной системы $x_{k+1} = Ax_k, A \in E_d$ с оценкой $V(x_k) \leq ||\bar{A}||_1^k V(x_0)$.

Отметим еще, что на класс обобщенно-сверхустойчивых систем аналогичным образом переносятся все результаты [1, 3], относящиеся к нелинейным и нестационарным задачам, но мы на этом не будем останавливаться.

Теперь дадим необходимые и достаточные условия для обобщенной сверхустойчивости данной матрицы. Элементы $A, \bar{A}, D$ далее обозначены как $a_{ij}, \bar{a}_{ij}, d_i, \quad i, j = 1, ..., n$.

`Лемма 1.` *$A \in E_c$ тогда и только тогда, когда существует решение $d > 0$ линейных неравенств*

$$(3) \qquad \sum\nolimits_{j \neq i} |a_{ij}| d_j < -a_{ii} d_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

и $A \in E_d$ тогда и только тогда, когда существует решение $d > 0$ линейных неравенств

$$(4) \qquad \sum\nolimits_{j} |a_{ij}| d_j < d_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

Более того, $\sigma(\bar{A}) \geq \sigma > 0$, если существует решение $d > 0$ линейных неравенств

$$(5) \qquad \sum\nolimits_{j \neq i} |a_{ij}| d_j \leq (-a_{ii} - \sigma) d_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

а также $||\bar{A}||_1 \leq q < 1$, если существует решение $d > 0$ линейных неравенств

$$(6) \qquad \sum\nolimits_{j} |a_{ij}| d_j \leq q d_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

Доказательство немедленно следует из условий (1), (2) для сверхустойчивости $\bar{A}$ с учетом $\bar{a}_{ij} = a_{ij} d_j / d_i$. Поэтому для проверки $A \in E$ достаточно решить систему линейных неравенств. Заметим, что (3) выполняется только при $a_{ii} < 0, \quad i = 1, ..., n$, тогда как (4) - при $|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, ..., n$. Это необходимые условия для $A \in E$. Матрицы, удовлетворяющие (3), в [9] названы *квазидоминирующими отрицательными диагональными*, в то время как в [12, 6] - просто *квазидоминирующими.* Матрицы, удовлетворяющие (4), исследованы в [10]. Мы будем придерживаться термина *обобщенно-сверхустойчивые матрицы*, продолжая терминологию [1–4]. Конечно, обобщенно-сверхустойчивые матрицы являются устойчивыми: $E \subset S$ (где S - множество устойчивых матриц), так как $A \in E$ имеет те же собственные значения, что и сверхустойчивая матрица $D^{-1}AD$, которая устойчива. Тогда (3), (4) могут быть рассмотрены как достаточное условие устойчивости.

Ниже показано, что существует другое описание матриц из E – в терминах собственных значений, а не элементов матрицы. Однако описание, предоставляемое леммой 1, удобнее для наших целей, так как оно позволяет решать многие задачи управления.

`Лемма 2.` ***a.****[12, 13] $A \in E_c$ тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ (с элементами $\bar{a}_{ij} = |a_{ij}|, j \neq i, \bar{a}_{ii} = a_{ii}$) является гурвицевой.*
b.*[14] $A \in E_d$ тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ (с элементами $\bar{a}_{ij} = |a_{ij}|$) является шуровской.*

Теперь опишем отношения между матрицами из E и диагональной устойчивостью.

`Определение 2.` *[6] Матрица $A \in \mathcal{D}$ (множество диагонально устойчивых матриц), если существует положительное диагональное решение неравенства Ляпунова. А именно, $A \in \mathcal{D}_c$ (случай непрерывного времени), если существует диагональная матрица $P > 0$ такая, что $PA + A^T P < 0$, и $A \in \mathcal{D}_d$ (дискретный случай), если существует диагональная матрица $P > 0$ такая, что $A^T PA - P < 0$.*

Известно [12, 6], что $E \subset \mathcal{D}$, т.е. $A \in E_c$ ($A \in E_d$) влечет $A \in \mathcal{D}_c$ ($A \in \mathcal{D}_d$). Однако эти множества матриц не совпадают. Например, $A = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,75 \\ -0,75 & -0,5 \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathcal{D}_d$, но не E_d [6]. Если $a_{ij} \geq 0$ для всех i, j, то $E_d = \mathcal{D}_d = S_d$ (множество матриц, устойчивых по Шуру) [6, лемма 2.7.25]. Стоит упомянуть о том, что проверка диагональной устойчивости сводится к проверке существования решения линейного матричного неравенства, в то время как проверка $A \in E$ сводится к (векторным) линейным неравенствам (3),(4), которые намного проще.

`Пример 1.` Рассмотрим матрицу, приведенную к фробениусовой форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не сверхустойчива (в дискретном смысле) для любых a_i так как условие (2) нарушается, однако если $\sum_i |a_i| < 1$ (условие Кона), то $A \in E_d$ (выбрав $d_1 > d_2 > ... > d_n = 1, d_1 - 1$ достаточно мало). На самом деле легко проверить, что условие Кона также является необходимым условием для $A \in E_d$.

`Пример 2.` $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда необходимым и достаточным условием для $A \in E_c$ будут: $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{11}a_{22} > |a_{12}a_{21}|$, и для $A \in E_d$: $|a_{11}| < 1, |a_{22}| < 1, (1 - |a_{11}|)(1 - |a_{22}|) > |a_{12}a_{21}|$. Условия сверхустойчивости [1, 3] более жесткие: $a_{11} < 0, a_{22} < 0, -a_{11} >$

$|a_{12}|, -a_{22} > |a_{21}|$ (непрерывное время)и $|a_{11}| < 1, |a_{22}| < 1, 1- |a_{11}| > |a_{12}|, 1- |a_{22}| > |a_{21}|$ (дискретное время).

`Пример 3.` Треугольная матрица: $a_{ij} = 0, j < i$. $A \in E_c$ тогда и только тогда, когда $a_{ii} < 0$ для всех i. Действительно, возьмем $\tau_i = \min\{1, -a_{ii}/\sum_{j>i}|a_{ij}|\}$ и выберем $d_n = 1, 0 < d_{i+1} < \tau_i d_i, i = n-1, ..., 1$. Для таких d_i получаем $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|d_j = \sum_{j>i}|a_{ij}|d_j < d_{i+1}\sum_{j>i}|a_{ij}| < \tau_i d_i \sum_{j>i}|a_{ij}| \leq -a_{ii}d_i, i = 1, ..., n-1$, таким образом, условие (3) выполняется для этих i, а для $i = n$ оно очевидно. Тогда для этих матриц обобщенная сверхустойчивость равносильна устойчивости.

Теперь мы можем перейти к решению различных задач управления, связанных со свойствами обобщенной сверхустойчивости.

3. Робастность

Рассмотрим семейство интервальных матриц:

$$\tilde{A}{=}A + \Delta, \quad |\Delta_{ij}| \leq m_{ij} \quad i, j = 1, ..., n.$$

Возникает вопрос: можно ли сделать все матрицы $D^{-1}\tilde{A}D$ сверхустойчивыми, используя общую матрицу D?

`Лемма 2.` *$\tilde{A} \in E$ с общей $D > 0$ тогда и только тогда, когда следующие линейные неравенства имеют решение $d > 0$:*

$$\sum_{j\neq i}(|a_{ij}| + m_{ij})d_j < (-a_{ii} - m_{ii})d_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{7}$$

(непрерывное время), и

$$\sum_{j}(|a_{ij}| + m_{ij})d_j < d_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{8}$$

(дискретное время).

Действительно, применим условия (3), (4) к элементам $\tilde{a}_{ij}$ матрицы $\tilde{A}$ и выберем наихудшие значения Δ_{ij}. Заметим, что условия (7), (8) могут быть переписаны как $\bar{A} + M \in E$, где $\bar{A}$ – матрица из леммы 2.

Вышеназванные условия менее жесткие, чем для робастной устойчивости интервальных матриц, полученные в [1, 3] на основе сверхустойчивости.

Имея в виду, что $A \in E$ влечет $A \in \mathcal{D}$, получаем достаточные условия диагональной устойчивости (сравните с [6, теорема 3.4.17]).

4. Стабилизация

Дана непрерывная система

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

или дискретная система

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

Как выбрать обратную связь по состоянию $u = Kx$, чтобы сделать замкнутую систему обобщенно-сверхустойчивой? Обозначим b_{is}, k_{sj} элементы матриц B, K.

`Теорема 1.` *Матрица K, такая, что $A + BK \in E$, существует тогда и только тогда, когда следующие линейные неравенства имеют решение $d_i > 0, y_{sj}$:*

$$(9) \qquad \sum\nolimits_{j \neq i} |a_{ij} d_j + \sum_s b_{is} y_{sj}| < -a_{ii} d_i - \sum_s b_{is} y_{si}, \qquad i = 1, ..., n$$

(непрерывное время), и

$$(10) \qquad \sum\nolimits_{j} |a_{ij} d_j + \sum_s b_{is} y_{sj}| < d_i, \qquad i = 1, ..., n$$

(дискретное время). Тогда $D = diag(d_i), k_{sj} = y_{sj}/d_j$.

Доказательство этой и следующих теорем приведено в Приложении.

Заметим, что если условия (9), (10) заменены на следующие:

$$(11) \quad \sum\nolimits_{j \neq i} |a_{ij} d_j + \sum_s b_{is} y_{sj}| \leq (-a_{ii} - \sigma) d_i - \sum_s b_{is} y_{si}, \qquad i = 1, ..., n$$

$$(12) \qquad \sum\nolimits_{j} |a_{ij} d_j + \sum_s b_{is} y_{sj}| \leq q d_i, \qquad i = 1, ..., n$$

с некоторыми $\sigma > 0, q < 1$, то можно оценить $\sigma(D^{-1}\tilde{A}D), ||D^{-1}\tilde{A}D||_1$, а именно: $\sigma(D^{-1}\tilde{A}D) \geq \sigma, ||D^{-1}\tilde{A}D||_1 \leq q$ (сравните с аналогичным результатом леммы 1).

`Пример 4.` Рассмотрим дискретную систему в канонической управляемой форме

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда всегда существует $K = (k_1, ..., k_n)$ такое, что $A + BK \in E_d$. Действительно, выбрав k_i так, что $\sum_i |a_i - k_i| < 1$, в соответствие с примером 1 матрица $A + BK \in E_d$.

`Пример 5.` $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, система с непрерывным временем. Этот пример был рассмотрен в [2, 3], и были найдены условия существования такой матрицы $K = (k_1, k_2)$, что $A + BK$ сверхустойчива. Условия (9) для этого примера имеют вид: $|a_{12}d_2 + y_2| < -a_{11}d_1 - y_1, |a_{21}d_1 + y_1| < -a_{22}d_2 - y_2$. Действуя, как в [2, 3], получаем, что эти условия эквивалентны $(a_{11} - a_{21})d_1 + (a_{22} - a_{12})d_2 < 0$; последнее неравенство имеет решение $d > 0$ тогда и только тогда, когда $\min\{a_{11} - a_{21}, a_{22} - a_{12}\} < 0$. В [2, 3] условие сверхстабилизации путем обратной связи было $a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12} < 0$, что намного более ограничительно. Аналогичные вычисления для дискретного случая дают: $A \in E_d$ тогда и только тогда, когда $\min\{|a_{11} - a_{12}|, |a_{21} - a_{22}|\} < 1$.

Теорема 1 предоставляет простые вычислительные средства проверки того, можно ли сделать матрицу обобщенно-сверхустойчивой с помощью обратной связи. Однако общие аналитические условия для такого сведения не известны.

Подход на основе сверхустойчивости может быть использован для синтеза обратной связи не только по состоянию, но и по выходу [2, 3]. К сожалению, этого не удается сделать для обобщенной сверхустойчивости в общем случае; одним из исключений для дискретных систем служит пример 4 с обратной связью по выходу.

`Пример 6.` Рассмотрим дискретную систему в канонической форме с выходом $y_k \in R^m$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \qquad . \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

где A, B те же, что в примере 4. Задача заключается в нахождении такой матрицы $K = (k_1, ..., k_m)$ (если она существует), что $A + BKC \in E_d$. Необходимым и достаточным условием для существования такой матрицы является разрешимость линейных неравенств $\sum_{i=1}^{n} |a_i + \sum_s k_s c_{si}| < 1$. Действительно, это условие Кона (см. пример 1) для матрицы $A + BKC$, которая также имеет фробениусов вид. Соответствующие результаты по диагональной устойчивости можно найти в [6, с.218].

Используя теорему 3.2 из работы [2], можно получить следующий результат о невозможности статической обратной связи по выходу, делающей дискретную систему обобщенно сверхустойчивой.

`Лемма 4.` *Пусть найдутся матрица Z и диагональная матрица $D > 0$ такие, что $TrA^T Z \geq 1, ||D^{-1}ZD||_\infty \leq 1, CZB = 0$. Тогда $A + BKC \notin E_d$ для всех K.*

Напомним, что $||A||_\infty = \sum_j \max_i |a_{ij}|$.

5. Наилучшая оценка состояния

Дана непрерывная

$$\dot{x} = Ax + Cw$$

или дискретная

$$x_{k+1} = Ax_k + Cw_k$$

система с ограниченными внешними возмущениями:

$$||w(t)||_\infty \leq 1, \quad ||w_k||_\infty \leq 1.$$

Тогда можно оценить инвариантный параллелепипед $\mathbf{B}$, для которого из $x(0) \in \mathbf{B}$ следует $x(t) \in \mathbf{B}$ при всех $t \geq 0$ и произвольных $||w(t)||_\infty \leq 1$ (или из $x_0 \in \mathbf{B}$ следует $x_k \in \mathbf{B}$ для всех $k \geq 0$ и любых $||w_k||_\infty \leq 1$). Задача: выбрать "наименьший", в некотором смысле, параллелепипед. Ниже $d_{\max}, d_{\min}$ обозначают наибольшее и наименьшее значения d_i.

`Теорема 2.` *Если существует диагональная матрица $D > 0$ такая, что $\tilde{A} = D^{-1}AD$ сверхустойчива, то из условия*

$$(13) \qquad ||x(0)||_\infty \leq \gamma = \frac{d_{\max}||C||_1}{d_{\min}\sigma(\tilde{A})}, \quad \left(||x_0||_\infty \leq \gamma = \frac{d_{\max}||C||_1}{d_{\min}(1 - ||\tilde{A}||_1)} \right)$$

вытекает, что $||x(t)||_\infty \le \gamma, t \ge 0 \quad (||x_k||_\infty \le \gamma, k \ge 0)$ *для непрерывных (дискретных) систем. Наименьшее значение* γ *достигается при решении следующих параметрических задач линейного программирования:*

$$\begin{array}{rcl} & & \min \beta/\sigma \\ \sum_{j\neq i} |a_{ij}| d_j & \le & (-a_{ii} - \sigma) d_i, \qquad i = 1, ..., n, \\ 1 & \le & d_i \le \beta, \quad i = 1, ..., n \end{array} \tag{14}$$

(с переменными d, β *и параметром* $\sigma > 0; \gamma_{opt} = \beta ||C||_1/\sigma$*) для непрерывного, и*

$$\begin{array}{rcl} & & \min \beta/(1-q) \\ \sum_{j} |a_{ij}| d_j & \le & q d_i, \qquad i = 1, ..., n, \\ 1 & \le & d_i \le \beta, \quad i = 1, ..., n \end{array} \tag{15}$$

(с переменными d, β *и параметром* $q < 1; \gamma_{opt} = \beta ||C||_1/(1-q)$*) для дискретного случаев.*

В приведенном выше анализе *"наилучший"* параллелепипед понимался как имеющий минимальную среди возможных наибольшую сторону; другие критерии оптимальности (например, объем параллелепипеда) ведут к другим оптимизационным задачам. Заметим, что предложенные оценки γ_{opt} всего лишь верхние границы для $\max_w \max_t ||x(t)||_\infty$.

6. Гашение возмущений

Рассмотрим линейные системы с управлением и ограниченными внешними возмущениями:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cw$$

(непрерывное время) или

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Cw_k$$

(дискретное время), где

$$||w(t)||_\infty \le 1, \quad ||w_k||_\infty \le 1.$$

Задачей является нахождение такой обратной связи $u = Kx$, чтобы для замкнутой системы можно было гарантировать оценку $||x(t)||_\infty \le$

$\gamma \quad (||x_k||_\infty \le \gamma)$ с наименьшей γ, используя технику оценивания из предыдущего раздела. Совмещая (11), (12) и теорему 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Решим параметрическую задачу линейного программирования*

$$\min \beta/\sigma$$

$$(16) \qquad \sum\nolimits_{j\neq i} |a_{ij}d_j + \sum_s b_{is}y_{sj}| \le (-a_{ii}-\sigma)d_i - \sum_s b_{is}y_{si}, \quad i = 1,...,n,$$

$$1 \le d_i \le \beta, \quad i = 1,...,n$$

с переменными β, d, Y и параметром $\sigma > 0$. Если она имеет решение, оптимизируем его по σ; обозначим $\beta^*, d^*, Y^*, \sigma^*$ соответствующие оптимальные значения. Тогда для обратной связи $u = Kx$ (где $K = Y^*D^{-1}, D = diag(d_1^*, ..., d_n^*)$) можно гарантировать следующую оценку решения замкнутой непрерывной системы

$$||x(t)||_\infty \le \frac{\beta^*||C||_1}{\sigma^*}, \quad 0 \le t < \infty$$

при условии, что $x(0)$ удовлетворяет этому неравенству. Аналогично, для дискретного случая, решаем задачу

$$\min \beta/(1-q)$$

$$(17) \qquad \sum\nolimits_{j} |a_{ij}d_j + \sum_s b_{is}y_{sj}| \le qd_i, \qquad i = 1,...,n,$$

$$1 \le d_i \le \beta, \quad i = 1,...,n$$

и оптимизируем по параметру $q < 1$. Для оптимальных значений β^*, d^*, Y^*, q^* положим K, как в предыдущем случае. Тогда для замкнутой системы с $u = Kx$ выполняется следующее неравенство

$$||x_k||_\infty \le \frac{\beta^*||C||_1}{1-q^*}, \quad 0 \le k < \infty$$

при условии, что оно выполняется для x_0.

7. Численные методы

Все перечисленные выше задачи были сведены к линейным неравенствам, которые, в свою очередь, могут быть решены обычными методами линейного программирования. Однако число неравенств может быть достаточно большим, и использование итеративных методов, аналогичных предложенным в [15], может быть более эффективным. Покажем применение этих методов к задаче *одновременной стабилизации* , которая еще не была рассмотрена.

Имеем m систем, описываемых уравнениями

$$x_{k+1} = A^l x_k + B^l u_k, \quad l = 1, ..., m. \tag{18}$$

Задача: существует ли обратная связь K такая, что все матрицы $A^l + B^l K \in E_d$ с общей матрицей $D > 0$? Рассмотрим только дискретный случай; непрерывный случай разбирается аналогично. Теорема 1 утверждает, что решение существует тогда и только тогда, когда все m систем линейных неравенств (9), соответствующих каждой системе (18), имеют общее решение, т. е.

$$\sum_j |a^l_{ij} d_j + \sum_s b^l_{is} y_{sj}| < d_i, \qquad i = 1, ..., n, \quad l = 1, ..., m. \tag{19}$$

Тогда можно применить следующий итеративный алгоритм.

`Алгоритм 1.` *Выберем начальное приближение D^0, Y^0 (например $D^0 = I, Y^0 = 0$).*
2. На t шаге имеем D^t, Y^t; выберем случайно (например, с равными вероятностями $1/m$) одну из систем $l(t)$.
3. Если выполняются неравенства $\sum_j |a^{l(t)}_{ij} d^t_j + \sum_s b^{l(t)}_{is} y^t_{sj}| < d^t_i, \quad i = 1, ...n$, положим $D^{t+1} = D^t, Y^{t+1} = Y^t$ и перейдем к шагу 2. В противном случае найдем $i(t)$ - индекс самого нарушенного неравенства (19).
4. Положим

$$\begin{aligned} d^{t+1}_j &= \left(d^t_j - \gamma_t a^{l(t)}_{i(t)j} sign(\varepsilon_j)\right)_+, \quad y^{t+1}_{sj} = y^t_{sj} - \gamma_t b^{l(t)}_{i(t)s} sign(\varepsilon_j), \\ \gamma_t &= \frac{\sum_j \varepsilon_j - d^t_{i(t)} + \delta}{\sum_j \left(a^{l(t)}_{i(t)j}\right)^2 + n \sum_s \left(b^{l(t)}_{i(t)s}\right)^2} \end{aligned}$$

где $\varepsilon_j = |a^{l(t)}_{i(t)j} d^t_j + \sum_s b^{l(t)}_{i(t)s} y_{sj}|$, $\alpha_+ = \max\{0, \alpha\}, \delta > 0$ достаточно мало.

Этот алгоритм является реализацией общей схемы, обоснованной в [15], для неравенств (19). Если они имеют решение, алгоритм завершается за конечное число шагов с вероятностью 1. Подобные алгоритмы применимы и для *робастной стабилизации* (например, когда A – интервальная матрица). В этом случае число неравенств очень велико, и предложенный метод, работающий с одним неравенством на каждом шаге, становится привлекательным с вычислительной точки зрения.

8. Выводы

Предложен новый подход к задачам анализа и синтеза в теории автоматического управления, обобщающий использование сверхустойчивости [1–4]. Задачи сводятся к решению линейных неравенств и могут быть решены либо методами линейного программирования, либо специальными итеративными методами (в случае задач большой размерности).

Автор признателен В.Л. Харитонову за его конструктивную критику сверхустойчивости (которая явилась одним из побуждений для предлагаемого обобщения), а также А.А. Трембе и П.С. Щербакову за комментарии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

`Доказательство теоремы 1.` Обозначим $\tilde{A} = A + BK$ с элементами $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \sum_s b_{is}k_{sj}$, тогда условие (3) для $\tilde{A} \in E_c$ выглядит как

$$\sum\nolimits_{j\neq i} |a_{ij}d_j + \sum_s b_{is}k_{sj}d_j| < -a_{ii}d_i - \sum_s b_{is}y_{si}, \qquad i = 1, ..., n$$

Если обозначить $y_{sj} = k_{sj}d_j$, придем к (9). Аналогично исследуется дискретный случай.■

`Доказательство теоремы 2.` Система $\dot{x} = Ax + Cw$ после замены переменных $x = Dy$ принимает вид $\dot{y} = \tilde{A}y + D^{-1}Cw$ с сверхустойчивой матрицей $\tilde{A} = D^{-1}AD$. Для таких систем имеем [1, 3] оценку $||y(t)||_\infty \le ||D^{-1}B||_1/\sigma(\tilde{A}), 0 \le t < \infty$, если $||y(0)||_\infty \le ||D^{-1}C||_1/\sigma(\tilde{A})$.

$$||x(t)||_\infty = ||Dy(t)||_\infty \le ||D||_1||D^{-1}C||_1/\sigma(\tilde{A}) \le \frac{d_{\max}||C||_1}{d_{\min}\sigma(\tilde{A}),}$$

и получаем неравенство (13) для непрерывного случая. Уравнение для дискретного случая изучается аналогично, используя оценку $||y_k||_\infty \le ||D^{-1}C||_1/(1 - ||\tilde{A}||_1)$.

Теперь подставим верхнюю границу $\sigma(\tilde{A}) \ge \sigma$ для $D > 0$, удовлетворяющей (5), и получим $\gamma \le d_{\max}||C||_1/d_{\min}\sigma$. Можно отмасштабировать D (матрица $\tilde{A} = D^{-1}AD$ остается неизменной при преобразовании

$D \Rightarrow \alpha D$) таким образом, чтобы $d_{\min} = 1$. Кроме того, можно заменить $d_{\max}$ верхней границей $\beta : d_i \leq \beta, i = 1, ..., n$. Тогда оптимизация γ эквивалентна (14). Следуя тем же путем, получим (15) для дискретного случая.■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I: Анализ // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.

2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. II: Синтез // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.

3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

4. Polyak B., Sznaier M., Halpern M., Scherbakov P. Superstable control systems // Proc. 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain. 2002. P. 799–804.

5. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

6. Kazkurewicz E., Bhaya A. Matrix diagonal stability in systems and computation. N.Y.: Springer, 2000.

7. Ostrowski A. Uber die Determinanten mit uberwiegender Hauptdiagonale // Comment. Math. Helv. 1937-38. V. 10. P. 69–96.

8. Rosenbrock H. A Lyapunov function for some naturally occurring linear homogeneous time-dependent equations // Automatica. 1963. V. 1. P. 97–109.

9. Siljak D. Large-scale dynamic systems: stability and structure. N.Y.: North Holland, 1978.

10. Kaszkurewicz E., Bhaya A., Siljak D. On the convergence of parallel asynchronous block-iterative computations // Linear Algebra Appl. 1990. V. 131. P. 139–160.

11. Fiedler M., Ptak V. Diagonally dominant matrices // Czechosl. Math. J. 1967. V. 92. No. 17. P. 429–433.

12. Moylan P. Matrices with positive principal minors // Linear Algebra Appl. 1977. V. 17. P. 53–58.

13. Willems J. Lyapunov functions for diagonally dominant systems // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 519–523.

14. Bertsekas D., Tsitsiklis J. Parallel and distributed computation: numerical methods. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.

15. Polyak B. Random algorithms for solving convex inequalities // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimiz. and Their Appl. Eds. D.Butnariu, Y.Censor and S.Reich. Elsevier, 2001. P. 409–422.