© 2002 г. Б. Т. Поляк, д-р техн. наук,
П. С. Щербаков, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

СВЕРХУСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ. I. АНАЛИЗ[1]

Вводится понятие сверхустойчивости линейных систем управления. Условие сверхустойчивости является достаточным условием устойчивости и формулируется в терминах линейных ограничений на элементы матрицы или коэффициенты характеристического полинома. В первой части статьи исследуются свойства сверхустойчивых систем. Доказывается монотонное экспоненциальное убывание норм решений при отсутствии возмущений и равномерная ограниченность решений при наличии ограниченных возмущений. Описывается обобщение на случай нелинейных и нестационарных систем. Исследуются спектральные свойства сверхустойчивых систем. Получено полное решение проблемы робастной сверхустойчивости интервальных матриц.

1 Введение

Устойчивость — ключевое понятие в теории управления. Всякая управляемая система должна быть прежде всего устойчивой, и лишь затем удовлетворять различным ограничениям и оптимизировать тот или иной показатель качества. Однако обычное понятие устойчивости не очень удобно при конструировании линейных систем управления. Во-первых, устойчивость — асимптотическое свойство; в начальные моменты времени может наблюдаться эффект "всплеска" — резкого роста траектории. Во-вторых, множество устойчивых систем невыпукло в пространстве параметров, равным образом невыпукло и множество стабилизирующих регуляторов. Синтез регуляторов заданной структуры (например, регуляторов низкого порядка) связан с серьезными трудностями. Наконец, устойчивость линейных стационарных систем может легко теряться при наличии нестационарных и нелинейных возмущений.

Один из возможных путей преодоления этих трудностей связан с переходом к иному, более узкому классу систем, называемых *сверхустойчивыми*. Такие системы обладают удобными свойствами выпуклости, проблема стабилизации также становится выпуклой в пространстве коэффициентов регулятора и допускает простое решение методами линейного программирования. Более того, легко решаются многие проблемы, представляющие существенные сложности в рамках стандартной теории, такие как задача статической стабилизации по выходу, задача одновременной стабилизации нескольких систем, задача робастной стабилизации при матричной неопределенности и др. Кроме того, можно ставить новые задачи оптимального управления, например задачу минимизации интегрального функционала от модуля (а не квадрата) фазовых переменных. Эти удобные свойства приобретаются потому, что сверхустойчивость формулируется в виде линейных условий на элементы матрицы, а не в терминах собственных значений.

Разумеется, подход, опирающийся на понятие сверхустойчивости, имеет и недостатки. Во-первых, добиться сверхустойчивости труднее, чем устойчивости, и мы не можем гарантировать этого свойства для произвольной управляемой системы со скалярным управлением. Во-вторых, оценки показателей качества, получаемые таким путем, являются их верхними границами, и поэтому найденные управления оказываются лишь субоптимальными.

Достаточные условия устойчивости, выражаемые с помощью неравенств на элементы матрицы системы или коэффициенты ее характеристического полинома, рассматривались ранее в ряде работ [1] – [11]; более подробно ссылки на литературу будут даны в тексте. Основной новый результат настоящей работы — использование подобных условий не только для анализа, но и для синтеза систем управления. Отметим, что сам термин "сверхустойчивость" был впервые введен в [12] для дискретного случая. Краткий вариант работы был опубликован в [13].

Статья состоит из двух частей. В первой решаются задачи анализа для сверхустойчивых систем, во второй — задачи синтеза регуляторов, использующие свойство сверхустойчивости.

2 Сверхустойчивость линейных непрерывных систем

В этом разделе даются определения сверхустойчивости для непрерывных систем и приводятся их основные свойства. Всюду далее, если не указано явно, используется ∞-норма для векторов $x \in \mathbb{R}^n$:

[1]Работа выполнена при подержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 00-15-96018 и 02-01-00127 и в рамках комплексной программы Президиума РАН.

$\|x\| = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ и индуцированная ею 1-норма для матриц $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\Big)$.

Матрицу $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ назовем *сверхустойчивой*, если у нее на диагонали стоят отрицательные числа, и они по абсолютной величине превосходят сумму модулей недиагональных членов по строке:

$$\sigma(A) \;=\; \sigma \doteq \min_i\Big(-a_{ii} - \sum_{j\ne i} |a_{ij}|\Big) \;>\; 0. \tag{1}$$

Величину $\sigma(A)$ назовем *степенью сверхустойчивости* A. Такие матрицы часто называют матрицами с отрицательным диагональным доминированием, а иногда $-A$ называют матрицами Адамара. Сверхустойчивые матрицы являются устойчивыми, т.е. $\max_i\{\mathrm{Re}\,\lambda_i\} < 0$, где λ_i — собственные значения A (это сразу следует из теоремы Гершгорина, см. [5]), но не наоборот. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

устойчива ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$), но не сверхустойчива ($\sigma = -4$).

Рассмотрим линейную непрерывную стационарную динамическую систему в пространстве состояний:

$$\dot x(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{3}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний, а $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение. Если матрица A системы сверхустойчива, то такую систему также будем называть *сверхустойчивой*. Основное свойство сверхустойчивых систем описывается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.1 *Если система* (3) *сверхустойчива, то*

а) при $u(t) \equiv 0$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \le \|x_0\|\; e^{-\sigma t} \qquad t \ge 0; \tag{4}$$

б) при $\|u(t)\| \le 1,\ t \ge 0$, и любом начальном $\|x_0\| \le \gamma \doteq \|B\|/\sigma$ имеем

$$\|x(t)\| \le \gamma, \qquad t \ge 0; \tag{5}$$

в) при $\|u(t)\| \le 1,\ t \ge 0$, и любом начальном x_0 будет

$$\|x(t)\| \le \gamma + e^{-\sigma t}\,(\|x_0\| - \gamma)_+, \qquad t \ge 0, \tag{6}$$

где $\alpha_+ = \max\{0,\ \alpha\}$.

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Оценки типа (4)–(6) впервые, по-видимому, были получены Лозинским в [1]. Позже они неоднократно переоткрывались и использовались во многих работах [2]– [8].

Свойство а) — это устойчивость системы по начальному приближению. Из (4) следует, что у сверхустойчивой системы существует функция Ляпунова, не являющаяся квадратичной, именно:

$$V(x) = \|x\|. \tag{7}$$

Такая функция растет линейно по любому направлению: $V(\lambda x) = \lambda V(x)$ для любого x и любого $\lambda \ge 0$; она кусочно-линейна и недифференцируема. В то же время, у нее есть свойства и обычных функций Ляпунова: $V(x) \ge 0$, причем $V(x) = 0$ только для $x = 0$, она выпукла и растет на бесконечности. Функция $v(t) = V(x(t))$, где $x(t)$ — решение системы $\dot x = Ax$, $x(0) = x_0$, монотонно убывает; она, вообще говоря, недифференцируема, но у нее существует левая и правая производные $\dot v_-(t)$, $\dot v_+(t)$, причем

$$\dot v_- \le -\sigma v, \qquad \dot v_+ \le -\sigma v.$$

Подчеркнем, что именно ∞-норма вектора состояний убывает монотонно, но координаты могут осциллировать; таким образом, линейная функция от состояния (например, $y(t) = c^{\mathrm T}x(t)$) не обязана монотонно убывать.

Важно отметить, что отличие от просто устойчивых систем заключается в том, что для устойчивых матриц оценка (4) заменяется на следующую:

$$\|x(t)\| \le C(A,\nu)\|x_0\|e^{-\nu t}, \qquad 0 < \nu < \min_i\{-\mathrm{Re}\,\lambda_i\},$$

где константа $C(A,\nu)$ может быть весьма большой. При этом норма $x(t)$ не убывает монотонно с ростом t, а может возрастать при малых t. Например, для той же матрицы (2) при $x_0 = (1;\ 1)^{\mathrm{T}}$ будет $x(1) \approx (2,207;\ 0,368)^{\mathrm{T}}$, т.е. $\|x(1)\|$ возрастает более чем вдвое по сравнению с $\|x_0\|$. Для сверхустойчивых систем нет этого нежелательного эффекта всплеска на начальном участке траектории.

Свойства б), в) — это устойчивость системы по входу (BIBO устойчивость); ограниченным входам соответствуют ограниченные решения. При этом куб

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \le \gamma\}$$

называется *инвариантным множеством* для (3), т.е. траектории, начинающиеся в этом множестве, остаются в нем при всех допустимых возмущениях u. Подробное исследование инвариантных множеств для линейных систем можно найти в [14].

3 Сверхустойчивость линейных дискретных систем

Изложенное относилось к непрерывному случаю, однако аналогичное понятие можно ввести и для дискретных систем, описываемых не дифференциальными, а разностными уравнениями. Матрицу $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называем *дискретно сверхустойчивой*, если

$$q \doteq \|A\| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) < 1, \tag{8}$$

а величину $1-q$ назовем *степенью дискретной сверхустойчивости* A. Как и в непрерывном случае, такие матрицы устойчивы, т.е. $\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ (поскольку $\rho(A) \le \|A\|$ для любой матричной нормы), но не наоборот. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

устойчива ($\rho = 0$), но не сверхустойчива ($q = 2$).

Дискретную систему

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{9}$$

с матрицей, удовлетворяющей (8), также назовем *сверхустойчивой*. В дальнейшем термин "сверхустойчивость" применяется к матрицам и системам, удовлетворяющим как (1), (3), так и (8), (9); из контекста всегда будет ясно, о непрерывной или дискретной сверхустойчивости идет речь.

Аналогом теоремы 2.1 для дискретных систем является следующий результат.

Т е о р е м а 3.1 *Пусть дискретная система* (9) *сверхустойчива. Тогда*

а) при $u_k \equiv 0$ справедливо

$$\|x_k\| \le q^k\|x_0\|, \qquad k = 1,2,\ldots; \tag{10}$$

б) при $\|u_k\| \le 1,\ k \ge 1$, для любого $\|x_0\| \le \gamma \doteq \|B\|/(1-q)$ будет

$$\|x_k\| \le \gamma, \qquad k = 1,2,\ldots; \tag{11}$$

в) при $\|u_k\| \le 1,\ k \ge 1$, для любого начального x_0 будет

$$\|x_k\| \le \gamma + q^k\,(\|x_0\| - \gamma)_+, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{12}$$

Как и для непрерывного времени, полученные оценки говорят о монотонности убывания нормы решения сверхустойчивой системы и о наличии инвариантного множества — куба

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \le \gamma\}\,.$$

Отличие от просто устойчивых систем заключается в том, что для них оценка (10) заменяется на

$$\|x_k\| \le C(\varepsilon)(\rho+\varepsilon)^k\|x_0\|, \qquad \varepsilon > 0, \quad \rho+\varepsilon < 1,$$

где $C(\varepsilon)$ — некоторая константа, которая может быть весьма большой, т.е. $\|x_k\|$ не убывает монотонно с ростом k, а может возрастать на начальных итерациях.

Заметим, что теорема 3.1 по существу не нова; близкие результаты можно найти во многих руководствах по линейной алгебре, например, см. [5, 6].

Как известно, эффективных методов проверки устойчивости матриц не существует; единственный известный подход — построить характеристический полином, а затем применить критерии устойчивости полиномов. В то же время проверка сверхустойчивости матриц не вызывает никаких проблем, так как эти условия формулируются непосредственно в терминах элементов матрицы, а не ее собственных значений.

4 Сверхустойчивость одномерных дискретных систем

Рассмотрим одномерный аналог сверхустойчивости. Пусть вместо дискретной многомерной системы (9) задана скалярная система, описываемая разностным уравнением n-го порядка:

$$x_k + p_1 x_{k-1} + p_2 x_{k-2} + \ldots + p_n x_{k-n} = u_k, \tag{13}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^1$, $u_k \in \mathbb{R}^1$. Вводя оператор сдвига назад $zx_k = x_{k-1}$, приходим к записи

$$p(z)x_k = u_k, \qquad p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n, \tag{14}$$

и система устойчива (т.е. $x_k \to 0$ при любых начальных условиях $x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}$ и $u_k \equiv 0$), если полином $p(z)$ устойчив, т.е. его корни лежат вне единичного круга, $|\lambda_i| > 1$.

Скажем, что полином $p(z)$ *сверхустойчив*, если

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i| < 1; \tag{15}$$

для полинома, заданного в чуть более общей форме $p(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n$ условие сверхустойчивости имеет вид $\sum_{i=1}^{n} |p_i| < |p_0|$. Такие полиномы были введены Коном в 1922 г. [11]; заметим, что (15) — это хорошо известное достаточное условие дискретной устойчивости для полиномов. Именно в таком варианте сверхустойчивость рассматривалась и применялась к задачам управления [12, 15]. Если определить 1-норму полинома как сумму абсолютных значений его коэффициентов, то условие (15) запишется как

$$\|p(z) - 1\|_1 < 1. \tag{16}$$

Для одномерных систем со сверхустойчивым $p(z)$ имеют место результаты [12], аналогичные теореме 3.1.

Т е о р е м а 4.1 *Пусть задана скалярная система*

$$p(z)x_k = g(z)u_k,$$

где $g(z) = g_1 z + \ldots + g_m z^m$, *а полином* $p(z) = 1 + p_1 z + \ldots + p_n z^n$ *сверхустойчив. Тогда*

а) при $u_k \equiv 0$ *справедлива оценка*

$$|x_k| \le q^{k/n+1} \max_{-n \le i \le -1} |x_i|, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad q \doteq \|p(z) - 1\|_1;$$

б) при $|u_k| \le 1$, $k = 0, 1, \ldots$, *и любых начальных* $|x_{-n}| \le \gamma, \ldots, |x_{-1}| \le \gamma$, *где*

$$\gamma = \frac{\|g(z)\|_1}{1-q},$$

будет

$$|x_k| \le \gamma, \qquad k = 0, 1, \ldots;$$

в) при $|u_k| \le 1$, $k = 0, 1, \ldots$, *и любых начальных* $x_{-n}, \ldots, x_{-1}$ *будет*

$$|x_k| \le \gamma + q^{k/n+1} \Big(\max_{-n \le i \le -1} |x_i| - \gamma \Big)_+, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Отметим, что стандартный переход от скалярной системы (13) n-го порядка к эквивалентной записи в пространстве состояний (т.е. к канонической управляемой форме) не приводит к сверхустойчивой матрице.

Открытым остается вопрос об одномерном аналоге сверхустойчивости для непрерывных систем. По-видимому, не существует никакого разумного варианта сверхустойчивого полинома, корни которого должны лежать в левой полуплоскости.

5 Сверхустойчивость нестационарных и нелинейных систем

Важным свойством сверхустойчивости в отличие от устойчивости является то, что она сохраняется и в нестационарном случае, а также при наличии нестационарных и нелинейных возмущений. Рассмотрим более общую систему, чем (9):

$$x_{k+1} = A_k x_k + f_k(x_k), \tag{17}$$

где матрицы A_k могут зависеть от времени, а возмущения $f_k(x_k)$ — и от времени k, и от состояния.
Т е о р е м а 5.1 *Пусть для всех k выполнено*

$$\|A_k\| \le r < 1, \quad \|f_k(x_k)\| \le \alpha + \beta\|x_k\|, \quad 0 \le \beta < 1 - r.$$

Тогда для системы (17)

а) при $\alpha = 0$ справедливо

$$\|x_k\| \le q^k\|x_0\|, \qquad q \doteq r + \beta < 1, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

б) при $\alpha > 0$ и $\|x_0\| \le \gamma \doteq \alpha/(1-q)$ справедливо

$$\|x_k\| \le \gamma, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

в) при $\alpha > 0$ и любом x_0 справедливо

$$\|x_k\| \le \gamma + q^k(\|x_0\| - \gamma)_+, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 3.1.

Важно отметить, что для устойчивых систем аналогичная теорема неверна; в частности, для них не выполняется свойство а): решения системы $x_{k+1} = A_k x_k$ могут не стремиться к нулю, даже если все матрицы A_k устойчивы. Например, пусть

$$A_0 = A_2 = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = A_3 = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

тогда при $x_0 = (0;\ 1)^{\mathrm{T}}$ будет $x_{2k} = (0;\ 2^{2k})^{\mathrm{T}} \to \infty$, хотя все матрицы A_k устойчивы, $\rho(A_k) = 0$.

Непрерывным аналогом теоремы 5.1 служит следующий результат.

Т е о р е м а 5.2 *Пусть для всех $t > 0$ система*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

удовлетворяет условию

$$\sigma(A(t)) \ge \sigma > 0, \quad \|f(t, x)\| \le \alpha + \beta\|x(t)\|, \quad 0 \le \beta < \sigma.$$

Тогда

а) при $\alpha = 0$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \le e^{-(\sigma-\beta)t}\|x_0\|, \qquad t \ge 0,$$

б) при $\alpha > 0$ для любого $\|x_0\| \le \gamma \doteq \alpha/(\sigma - \beta)$ выполняется

$$\|x(t)\| \le \gamma, \qquad t \ge 0,$$

в) при $\alpha > 0$ для любого начального x_0 выполняется

$$\|x(t)\| \le \gamma + e^{-(\sigma-\beta)t}(\|x_0\| - \gamma)_+, \qquad t \ge 0.$$

Отметим, что близкие результаты содержатся в упоминавшихся выше работах [1] – [8].

6 Спектральные свойства сверхустойчивых систем

Сверхустойчивые матрицы образуют подмножество устойчивых матриц. Накладывает ли сверхустойчивость какие-либо ограничения на расположение собственных значений? Обратно, можно ли по расположению собственных значений судить о сверхустойчивости матрицы или о том, что матрица подобна сверхустойчивой? Ниже будут рассмотрены некоторые ответы на подобные вопросы.
Т е о р е м а 6.1 *Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывной системы сверхустойчива, то ее собственные значения лежат в секторе*

$$\mathcal{S}_n = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\arg\lambda - \pi| < (1 - n^{-1})\pi/2\}.$$

Обратно, каждая точка в этом секторе является собственным значением некоторой сверхустойчивой матрицы.

В частности, при $n = 2$ собственные значения лежат в прямом угле, биссектриса которого совпадает с отрицательной полуосью:

$$\lambda_i \in \mathcal{S}_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0, \ -\mathrm{Re}\,\lambda > |\mathrm{Im}\,\lambda|\}, \tag{18}$$

а при росте n сектор стремится к полной левой полуплоскости.

Доказательство приведено в Приложении; оно использует результат [16] о спектре матриц, имеющих кусочно-линейную функцию Ляпунова.

Если же матрица A дискретно сверхустойчива, то при $n = 2$ ее собственные значения принадлежат ромбу:

$$\lambda_i \in \mathcal{R}_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\mathrm{Re}\,\lambda| + |\mathrm{Im}\,\lambda| < 1\} \tag{19}$$

и заполняют его; это можно показать непосредственно. При $n > 2$ характеризация расположения собственных значений не столь полна.

Т е о р е м а 6.2 *Множество $\mathcal{R}_n$ всех собственных значений дискретно сверхустойчивых матриц $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ содержит все внутренние точки правильных многоугольников с $2k, k = 1, \ldots, n$ сторонами, вписанными в единичный круг, одна из вершин которых находится в точке $+1$.*

Поэтому, если $|\lambda| < \cos(\pi/(2n))$, то $\lambda \in \mathcal{R}_n$, т.е. любая точка внутри единичного круга принадлежит $\mathcal{R}_n$ для достаточно большого n.

Отметим, что проблема описания множества $\mathcal{R}_n$ близка к известной задаче локализации спектра стохастических матриц, поставленной А.Н.Колмогоровым в 1938 г., частично решенной в [17] и полностью - в [18].

Так как для любой невырожденной матрицы T матрицы A и TAT^{-1} имеют одни и те же собственные значения, то устойчивость инвариантна относительно линейного преобразования координат. Напротив, поскольку сверхустойчивость формулируется в терминах элементов матрицы, а не ее собственных значений, то это свойство может теряться или, что важнее, приобретаться при переходе к другим координатам. Одна из простейших ситуаций, когда устойчивая матрица становится сверхустойчивой в новых координатах, описывается следующей леммой.

Л е м м а 6.1 *Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ дискретной системы имеет различные собственные значения, которые принадлежат ромбу $\mathcal{R}_2$ (19). Тогда невырожденным вещественным линейным преобразованием координат она может быть сделана сверхустойчивой.*

Совершенно аналогичный результат справедлив в непрерывном случае.

Л е м м а 6.2 *Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывной системы имеет различные собственные значения, которые принадлежат сектору $\mathcal{S}_2$ (18). Тогда невырожденным вещественным линейным преобразованием координат она может быть сделана сверхустойчивой.*

Доказательство совпадает с доказательством леммы 6.1.

Обратимся теперь к одномерным системам и исследуем вопрос расположения корней сверхустойчивого полинома. Для этого нам будет удобнее рассматривать дискретный полином в форме

$$p(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n \tag{20}$$

и под его устойчивостью понимать расположение корней *внутри* единичного круга, тогда его сверхустойчивость как и раньше выражается условием

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i| < 1, \tag{21}$$

т.е. из (21) следует, что корни полинома (20) лежат внутри единичного круга (при этом корни полинома $\overline{p}(z)$ с обратным порядком коэффициентов взаимно обратны корням $p(z)$ и располагаются вне единичного круга).

Запишем точку $z \in \mathbb{C}$ в полярных координатах $z = \rho e^{j\theta}$ и введем функцию

$$\varphi_n(\rho, \theta) = \begin{cases} \min\limits_{1\le i<k\le n} \dfrac{\rho^k |\sin i\theta| + \rho^i |\sin k\theta|}{|\sin(k-i)\theta|} & \text{при } \ \theta \ne 0, \theta \ne \pi, \\ \rho & \text{при } \ \theta = 0, \theta = \pi. \end{cases} \tag{22}$$

Т е о р е м а 6.3 *Корни всех сверхустойчивых полиномов* (20)–(21) *заполняют область*

$$\mathcal{P}_n = \{z = \rho e^{j\theta} : \ \varphi_n(\rho, \theta) < 1\}.$$

Обсудим качественный вид области $\mathcal{P}_n$. Прежде всего, для $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ условие $\varphi_n(\rho,\theta) < 1$ означает $\rho < 1$, т.е. интервал $(-1,\ 1)$ лежит в $\mathcal{P}_n$ для любого n. Далее, при $\rho = 1$ и $\theta \neq 0, \pi$ имеем

$$\varphi_n(1,\theta) = \min_{1\le i<k\le n} \frac{|\sin i\theta| + |\sin k\theta|}{|\sin(k-i)\theta|},$$

а поскольку $|\sin(\alpha-\beta)| = |\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta| \le |\sin\alpha| + |\sin\beta|$, то $\varphi_n(1,\theta) \ge 1$. Соответственно, $\varphi_n(\rho,\theta) > 1$ при $\rho > 1,\ \theta \neq 0,\pi$. Таким образом, $\mathcal{P}_n$ лежит в единичном круге (это подтверждает, что сверхустойчивость влечет устойчивость). При этом $\varphi(1,\theta) = 1$, если $\theta = \pm l\pi/m,\ m = 2,\dots,n,\ l < m$. Действительно, достаточно взять $i = 1,\ k = m$, тогда

$$\varphi_n(1,\theta) \le \frac{|\sin\theta| + |\sin m\theta|}{|\sin(m-1)\theta|} = \frac{|\sin\frac{l}{m}\pi| + |\sin l\pi|}{|\sin\frac{m-1}{m}l\pi|} = \frac{|\sin\frac{l}{m}\pi|}{|\sin(l\pi - \frac{l}{m}\pi)|} = 1,$$

а выше было показано, что $\varphi(1,\theta) \ge 1$ при $\theta \neq 0,\pi$, т.е. минимум достигается при $i = 1,\ k = m$, и при этом $\varphi_n(1,\theta) = 1$. Общий вид области $\mathcal{P}_n$ для $n = 2,3,4$ показан на рисунке.

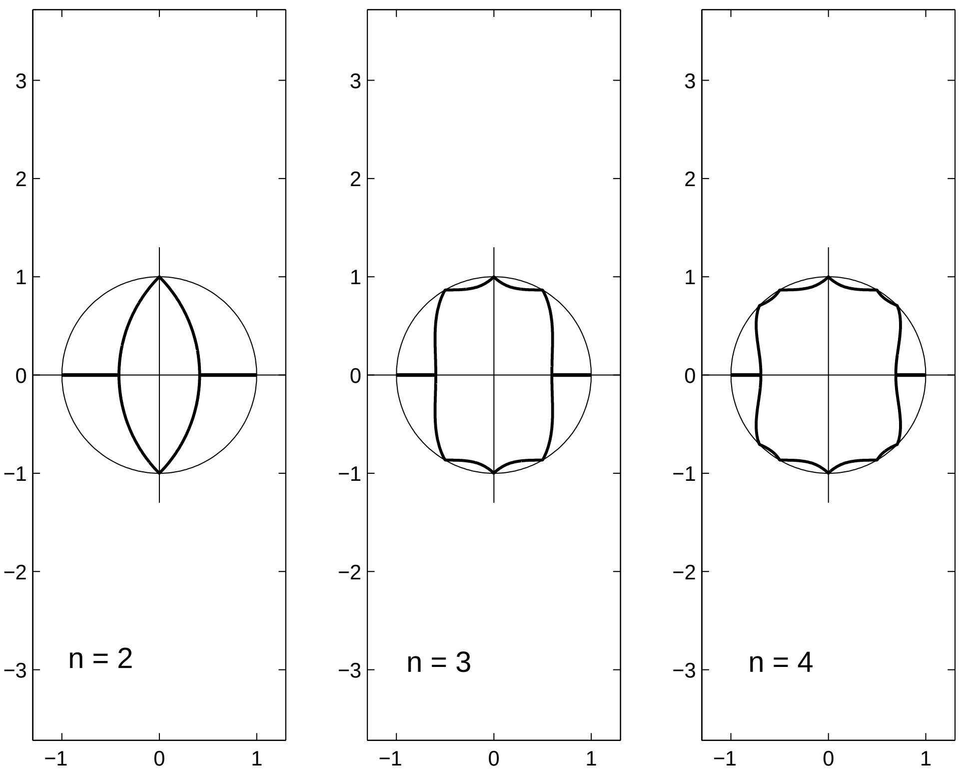

Рис. 1: Вид области $\mathcal{P}_n$ для $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$.

В частности, для $n = 2$ $\mathcal{P}_n$ имеет простое аналитическое описание. Действительно, поскольку

$$\varphi_2(\rho,\theta) = \frac{\rho^2|\sin\theta| + \rho|\sin 2\theta|}{|\sin\theta|} = \rho^2 + 2\rho|\cos\theta|,$$

то множество $\varphi_2(\rho,\theta) < 1$ описывается неравенством $\rho^2 + 2\rho|\cos\theta| < 1$. Это — пересечение двух кругов с центрами в ± 1 и радиуса $\sqrt{2}$. Кроме того, $\mathcal{P}_2$ (как и всякое $\mathcal{P}_n$) содержит вещественный интервал $(-1,\ 1)$.

С ростом n множество $\mathcal{P}_n$ заполняет всю внутренность единичного круга. В самом деле, зафиксируем некоторую точку $z = \rho e^{j\theta},\ |z| = \rho < 1$, и покажем, что найдется такое n, что $\varphi_n(\rho,\theta) < 1$. Действительно, если в (22) взять $i = 1,\ k = n$, то

$$\varphi_n(\rho,\theta) \le \frac{\rho^n|\sin\theta| + \rho|\sin n\theta|}{|\sin(n-1)\theta|}. \tag{23}$$

Если θ/π рационально: $\theta = l\pi/m$, то взяв $n = m$, получим $\sin\theta = 0$ и

$$\varphi_n(\rho,\theta) \le \frac{\rho^n|\sin\theta|}{|\sin(n-1)\theta|} = \rho^n < 1.$$

Если же θ/π иррационально, то $n\theta/\pi$ с ростом n сколь угодно близќо к целому числу и величина $|\sin n\theta|/|\sin(n-1)\theta|$ может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора большого n. Поскольку и $\rho^n \to 0$ при $n \to \infty$, то выражение в правой части (23) может быть сделано меньшим единицы за счет выбора n.

Совсем иное доказательство того же факта (что всякое z, $|z| < 1$, является корнем некоторого сверхустойчивого полинома) следует из леммы 7 в [12].

Заметим еще, что $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{S}_n$, т.е. множество корней сверхустойчивых полиномов содержится в множестве собственных значений дискретных сверхустойчивых матриц. Действительно, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_n \end{pmatrix}$$

при $|a| < 1, \sum_{i=1}^n |p_i| < 1$ дискретно сверхустойчива, а ее собственные значения при $a \to 1$ стремятся к корням полинома (20).

Для полиномов можно иногда делать и обратные выводы — расположение корней может гарантировать сверхустойчивость.

Л е м м а 6.3 *Если для всех корней z_i полинома $p(z)$ (20) выполняется*

$$|z_i| < 2^{1/n} - 1, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{24}$$

то $p(z)$ сверхустойчив, т.е. $\sum\limits_{i=1}^n |p_i| < 1$.

Конечно, оценка (24) редко применима — величина в правой части быстро убывает с ростом n. Тем не менее этот результат не имеет аналогов в матричном случае; так, матрица может иметь все нулевые собственные значения, но при этом не быть дискретно сверхустойчивой.

7 Точность оценок

Еще одна проблема связана с тем, насколько завышены оценки, полученные в теоремах 2.1 и 3.1, которые дают лишь верхние границы для соответствующих величин. Не вполне ясно, сколь сильно они отличаются от истинных значений. Нетрудно построить примеры, показывающие, что разница может быть очень велика. Например, для системы

$$x_{k+1} = Ax_k, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |q| < 1,$$

будет $x_k = 0,\ k \ge 2$, при любом x_0, тогда как (10) дает $\|x_k\| \le |q|^k\|x_0\|$. Однако для этой же матрицы в неоднородной системе $x_{k+1} = Ax_k + u_k$, $\|u_k\| \le 1$, из (11) следует $\|x_k\| \le 1/(1-|q|)$, тогда как $\sup_k \|x_k\| = 1 + |q|$, т.е. разница не столь драматически велика, если $|q|$ не слишком близко к 1.

Некоторое представление о консерватизме оценок (10), (11) можно получить с помощью численного моделирования, генерируя сверхустойчивые системы (матрицы) случайно и сравнивая $\sup_k \|x_k\|$ и полученные оценки. Во-первых, покажем как можно случайно генерировать сверхустойчивые матрицы из $\mathbb{R}^{n\times n}$; рассматриваем случай дискретного времени. Нам потребуется генерировать вектор $x \in \mathbb{R}^n$, равномерно распределенный на единичном симплексе $\{\sum_{i=1}^n x_i \le 1,\ x_i \ge 0\}$. Такое распределение задается n-мерным распределением Дирихле со всеми параметрами, равными 1 (см. [19]); оно, в свою очередь, может быть получено следующим образом:

$$x = \left(\frac{\xi_1}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \xi_k}, \quad \frac{\xi_2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \xi_k}, \quad \dots, \quad \frac{\xi_n}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \xi_k} \right),$$

где $\xi_k,\ k = 1,\dots,n+1$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с плотностью $f(x) = e^{-x}$ [19]. Наконец, показательно распределенная величина ξ генерируется как $\xi = -\ln u$, где u равномерно распределено на $[0,\ 1]$ [19]. Приведем алгоритм случайного генерирования равномерно распределенных дискретно сверхустойчивых матриц.

Алгоритм.

1. Сгенерировать случайный вектор $s \in \mathbb{R}^n$, равномерно распределенный на $[0,\ 1]^n$;
2. Для каждого $i = 1,\dots,n$ сгенерировать n-мерный вектор a_i, равномерно распределенный на единичном симплексе $\{\sum_{j=1}^n a_{ij} \le 1,\ a_{ij} > 0\}$ и отнормировать его на поверхность симплекса $\{\sum_{j=1}^n a_{ij} \le s_i,\ a_{ij} > 0\}$, т.е. $a_i \longrightarrow \dfrac{s_i}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} a_i$;
3. Расставить случайным образом знаки $+$ и $-$ у чисел a_{ij}.

На шаге 1 получаем вектор строчных сумм; на шаге 2 получаем сверхустойчивую матрицу $A = ((a_{ij}))$ с положительными элементами и $\|A\| = \max_i s_i$; на шаге 3 делаем знаки a_{ij} произвольными.

Эксперимент 1. В однородной системе $x_k = Ax_k$ консерватизм оценки (10) связан с заменой $\|A^k\|$ на ее оценку сверху $\|A\|^k$. Известно, что $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$, где $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ — спектральный радиус A, т.е. асимптотически величина $\|x_k\|$ ведет себя как ρ^k, а не как $\|A\|^k$. Для случайно сгенерированных сверхустойчивых матриц вычислялось отношение $\|A\|/\rho$ и усреднялось по $N = 1000$ реализаций; для размерностей $n = 2;\ 5;\ 10$ и 20 это соотношение составило $1,90;\ 2,76;\ 3,73;\ 5,17$.

Эксперимент 2. Рассматривалась система с возмущением

$$x_{k+1} = Ax_k + u_k, \qquad \|u_k\| \le 1,$$

для которой

$$x_k = A^{k-1}x_0 + A^{k-2}u_0 + A^{k-2}u_1 + \ldots + u_{k-1}.$$

Генерировались сверхустойчивые матрицы с положительными элементами; для них максимум $\|x_k\|$ по всем допустимым возмущениям и всем начальным условиям $\|x_0\| \le 1$ достигается при $u_i \equiv e$, $x_0 = e$, где e — вектор из единиц; тогда $x_k = (I + A + \ldots + A^{k-1})e$ (здесь I — единичная матрица), и супремум по k равен $\sup_k \sup_u \|x_k\| = \|(I-A)^{-1}e\| = \|(I-A)^{-1}\|$, а оценка (11) дает $\|x_k\| \le 1/(1-\|A\|)$ (напомним, что $\|x\| = \max_i |x_i|$, а $\|A\| = \max_i \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$). При моделировании мы ограничивались матрицами со степенью сверхустойчивости $1 - q = 1 - \|A\| \ge 0,05$. Отношение величин $1/(1 - \|A\|)$ и $\|(I - A)^{-1}\|$ усреднялось по $N = 1000$ реализаций; для размерностей $n = 2;\ 5;\ 10$ и 20 оно составило соответственно $1,53;\ 2,51;\ 3,41$ и $4,32$.

8 Робастная сверхустойчивость

Выше рассматривались задачи, в которых описание объекта было известно точно (т.е. матрицы A, B заданы). В реальных задачах неизбежно присутствует неопределенность в описании объекта, а системы должны быть спроектированы так, чтобы быть работоспособными (в частности, устойчивыми) при наличии неопределенности, т.е. робастными. Проблемам робастности посвящена огромная литература (см., например, [20]), однако многие из них очень трудны и до сих пор не имеют решения. Одной из них является задача о робастной устойчивости интервального семейства матриц.

Рассмотрим интервальное матричное семейство, заданное в следующей форме:

$$A = ((a_{ij})), \qquad a_{ij} = a_{ij}^0 + \gamma\Delta_{ij}, \quad |\Delta_{ij}| \le m_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{25}$$

Здесь $A_0 \doteq ((a_{ij}^0))$ — номинальная матрица, $\gamma \ge 0$ — числовой параметр, Δ_{ij} — неопределенности, а $m_{ij} \ge 0$ — заданные числа, образующие матрицу $M = ((m_{ij}))$. Пусть матрица A_0 гурвицева; требуется найти радиус устойчивости семейства, т.е. наибольшее $\gamma_{\max}$, для которого робастная устойчивость сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{\max}$. Известно [21] (дополнительные ссылки и обсуждение можно найти в [22]), что эта задача является NP-сложной и для нее не существует эффективных методов решения. Покажем, что задача о *робастной сверхустойчивости* интервальных матриц чрезвычайно проста.

Пусть номинальная матрица A_0 сверхустойчива, т.е.

$$\sigma(A_0) \doteq \min_i\Big(-a_{ii}^0 - \sum_{j\ne i} |a_{ij}^0|\Big) > 0.$$

Потребуем, чтобы условие сверхустойчивости сохранялось для всех матриц семейства:

$$-(a_{ii}^0 + \gamma\Delta_{ii}) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}^0 + \gamma\Delta_{ij}| > 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

т.е. чтобы семейство было робастно сверхустойчивым. Ясно, что это неравенство будет выполнено для всех допустимых Δ_{ij} тогда и только тогда, когда

$$-a_{ii}^0 - \gamma m_{ii} - \sum_{j\neq i} \Big(|a_{ij}^0| + \gamma m_{ij} \Big) > 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

т.е. при

$$\gamma < \gamma^* \doteq \min_i \frac{-a_{ii}^0 - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}^0|}{\sum\limits_j m_{ij}}. \tag{26}$$

В частности, если $m_{ij} \equiv 1$ (масштабы изменения всех элементов матрицы одинаковы), то

$$\gamma^* = \frac{\sigma(A_0)}{n}. \tag{27}$$

Таким образом, мы в явном виде находим *радиус сверхустойчивости* γ^* интервального матричного семейства; величина γ^* представляет собой нижнюю оценку радиуса устойчивости $\gamma_{\max}$.

Аналогичные формулы справедливы и в дискретном случае: если $\|A_0\| < 1$, то семейство матриц (25) остается сверхустойчивым при

$$\gamma < \gamma^* \doteq \min_i \frac{1 - \sum\limits_j |a_{ij}^0|}{\sum\limits_j m_{ij}}, \tag{28}$$

а в случае $m_{ij} \equiv 1$

$$\gamma^* = \frac{1 - \|A_0\|}{n}. \tag{29}$$

9 Заключение

Введено понятие сверхустойчивой линейной системы (непрерывной или дискретной). Условие сверхустойчивости формулируется с помощью линейных ограничений на элементы матрицы системы; оно является более жестким условием, чем устойчивость. Сверхустойчивые системы обладают рядом полезных свойств. Так, при отсутствии возмущений норма решения монотонно экспоненциально убывает, а при наличии ограниченных возмущений норма решения остается ограниченной (при всех t) величиной, которая допускает эффективную оценку. Свойство сверхустойчивости обобщается и на нестационарные и нелинейные системы. Исследованы спектральные свойства сверхустойчивых систем. Наконец, проблема робастной сверхустойчивости интервальных матриц допускает простое решение (в отличие от аналогичной трудной проблемы робастной устойчивости).

Авторы признательны Е.С.Пятницкому, А.С.Немировскому, M.Halpern, M.Sznaier, D.Siljak за полезные обсуждения и литературные ссылки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2.1. Покажем, что для сверхустойчивой A

$$\|e^{At}\| \le e^{-\sigma t}.$$

Для малых $t = \delta t$ справедливо $e^{A\,\delta t} \approx I + A\,\delta t$, т.е. для элементов m_{ij} матрицы $e^{A\,\delta t}$ имеем

$$\begin{aligned} m_{ii} &\approx 1 + a_{ii}\,\delta t > 0, \\ m_{ij} &\approx a_{ij}\,\delta t, \end{aligned}$$

так что

$$\|e^{A\delta t}\| \,=\, \max_i \sum_j |m_{ij}| \quad \approx \quad \max_i \Big(|1 + a_{ii}\,\delta t| + \delta t \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \Big)$$
$$= \quad \max_i \Big(1 + (a_{ii} + \sum_{j\neq i} |a_{ij}|)\,\delta t \Big) \;\le\; 1 - \sigma\,\delta t \;\le\; e^{-\sigma\,\delta t}.$$

Поэтому для произвольного $t = N\,\delta t,\ \delta t$ мало, справедливо

$$\|e^{At}\| = \|e^{AN\,\delta t}\| \le \|e^{A\,\delta t}\|^N \le \Big(e^{-\sigma\,\delta t}\Big)^N = e^{-\sigma t}.$$

Отсюда, используя явную формулу для решения системы (3):

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau,$$

получаем оценки теоремы.

Доказательство теоремы 3.1. Утверждение а) следует из того, что для любого $k \ge 1$ справедливо

$$\|x_k\| \;\le\; \|A\|\,\|x_{k-1}\| \;=\; q\|x_{k-1}\|.$$

В общем случае имеем для любого $k \ge 1$

$$\|x_k\| \;\le\; \|A\|\,\|x_{k-1}\| + \|B\|\,\|u_{k-1}\| \;\le\; q\|x_{k-1}\| + \|B\|$$

и по индукции получаем

$$\|x_k\| \;\le\; \frac{\|B\|}{1-q} + q^k \Big(\|x_0\| - \frac{\|B\|}{1-q} \Big),$$

откуда следует б) и в).

Доказательство теоремы 6.1. В силу теоремы 1 [16], если матрица A допускает кусочно-линейную функцию Ляпунова с $2n$ гранями, то ее собственные значения лежат в $\mathcal{S}_n$. Обратно, пусть $\lambda = -a + jb \in \mathcal{S}_n$, т.е. $a > 0, b > 0, a/b > \mathrm{tg}(\pi/(2n))$ (мы можем считать $b > 0$ без ограничения общности). Возьмем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\beta & 0 & 0 & \dots & -\alpha \end{pmatrix},$$

ее собственные значения равны $-\alpha + \beta\sqrt[n]{-1}$. Выберем то значение корня, которое равно $\exp(j\pi/n)$. Тогда при выборе $\alpha = a + b\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}, \beta = \frac{b}{\sin(\pi/n)}$ это собственное значение будет равно λ. При этом $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha - \beta = a - b\mathrm{tg}(\pi/(2n)) > 0$, т.е. матрица A будет сверхустойчивой.

Доказательство теоремы 6.2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k-1}\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_k \in R^{k\times k}, A \in R^{n\times n}, 1 \le k \le n$. Она дискретно сверхустойчива при $|\beta| < 1$, а ее собственные значения равны $\beta\sqrt[k]{-1}$ и нулю (при $k < n$). Для $\beta \to 1$ есть собственное значение, стремящееся к числу $\exp(j\pi/n)$. Для дискретно сверхустойчивой матрицы A матрица вида $c_0 + c_1 A + \ldots + c_k A^k, \sum_{i=0}^k |c_i| \le 1$ тоже сверхустойчива и у нее есть собственное значение, близкое к $\sum_{i=0}^k c_i \exp(ji\pi/n)$. Точки такого вида при $\sum_{i=0}^k |c_i| \le 1$ принадлежат внутренности правильного $2k-$угольника M_k, вписанного в единичный круг с одной из вершин в точке $+1$.

Доказательство леммы 6.1. Известно (см., например, [5]), что матрица с различными собственными значениями $\lambda_{2i-1} = u_i + jv_i,\ \lambda_{2i} = u_i - jv_i,\ v_i \ne 0,\ i = 1,\dots,p,\ \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 2p+1,\dots,n$, вещественно подобна блочно-диагональной матрице

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}\,(J_1,\dots,J_p,\,\lambda_{2p+1},\dots,\lambda_n),$$

где блоки $J_i \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ i = 1, \ldots, p$, имеют вид

$$J_i = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ -v_i & u_i \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|u_i| + |v_i| < 1$ для $i = 1, \ldots, p$ и $|\lambda_i| < 1$ для $i = 2p, \ldots, n$, то это и означает дискретную сверхустойчивость матрицы A в новых координатах.

Доказательство теоремы 6.3. Пусть $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ — корень сверхустойчивого полинома (20) или, что то же, $q(z) = 0$, где $q(z) = 1 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_n z^{-n}$. Это означает, что в задаче

$$\begin{array}{c} \min \|p\|_1 \\ q(z) = 0 \end{array}$$

(где переменными являются $p_1, \ldots, p_n$, а z фиксировано) минимальное значение меньше единицы. В вещественной области эта задача минимизации записывается как

$$\begin{array}{llll} \min \|p\|_1 & & & \\ (p,u) = -1 & u \in \mathbb{R}^n, & u_i = \operatorname{Re} z^{-i}, & i = 1, \ldots, n, \\ (p,v) = 0 & v \in \mathbb{R}^n, & v_i = \operatorname{Im} z^{-i}, & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Известно [23], что для такой задачи оптимизации верна теорема двойственности:

$$\min_{(p,u)=-1,\,(p,v)=0} \|p\|_1 \ = \ 1/\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|u + \alpha v\|_\infty.$$

Одномерная задача минимизации по α может быть решена следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_\alpha \|u + \alpha v\|_\infty &= \min_\alpha \max_i |u_i + \alpha v_i| \\ &= \min_\alpha \max_{i,k} \left\{ \left|\frac{u_i}{v_i} + \alpha\right| |v_i|,\ \left|\frac{u_k}{v_k} + \alpha\right| |v_k| \right\} \\ &= \max_{1\le i,k\le n} \frac{|u_i v_k - u_k v_i|}{|v_i| + |v_k|}, \end{aligned}$$

поскольку минимум по α достигается там, где $\left|\frac{u_i}{v_i} + \alpha\right| |v_i| = \left|\frac{u_k}{v_k} + \alpha\right| |v_k|$.

Учитывая, что для $z = \rho^{j\theta}$ величины u_i, v_i имеют вид $u_i = \rho^{-i}\cos i\theta,\ v_i = \rho^{-i}\sin i\theta$, получаем, что

$$|u_i v_k - u_k v_i| = \rho^{-i-k} |\sin(k-i)\theta|.$$

Поэтому, если z — корень сверхустойчивого полинома, то

$$1 \ > \ \min_{q(z)=0} \|p\|_1 \ = \ 1/\max_{1\le i<k\le n} \frac{|\sin(k-i)\theta|}{\rho^k |\sin i\theta| + \rho^i |\sin k\theta|}.$$

Вводя функцию

$$\varphi_n(\rho, \theta) \ \doteq \ \min_{1\le i<k\le n} \frac{\rho^k |\sin i\theta| + \rho^i |\sin k\theta|}{|\sin(k-i)\theta|},$$

последнее условие переписываем в виде $\varphi_n(\rho,\theta) < 1$.

Доказательство леммы 6.3. Пусть $z_i,\ i = 1, \ldots, n$ — корни $p(z)$ и $|z_i| < \alpha$. Тогда

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n,$$

где

$$p_1 = -(z_1 + \ldots + z_n), \quad \ldots, \quad p_n = (-1)^n z_1 \cdots z_n.$$

Отсюда $|p_1| \le |z_1| + \ldots + |z_n| < n\alpha,\ \ldots,\ |p_n| < \alpha^n$ и

$$|p_1| + \ldots + |p_n| \ < \ n\alpha + \ldots + \alpha^n \ = \ (1+\alpha)^n - 1,$$

и условие $\sum_{i=1}^n |p_i| < 1$ гарантируется, если $(1+\alpha)^n - 1 < 1$, т.е. если $(1+\alpha)^n < 2,\ \ \alpha < 2^{1/n} - 1$.

Список литературы

[1] *Лозинский С. М.* Оценка погрешностей приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 92. № 2. С. 225–228.

[2] *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. и др.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[3] *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. III // АиТ. 1986. № 5. С. 38–49.

[4] *Воронов В. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.

[5] *Хорн Р. А., Джонсон С. Р.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[6] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

[7] *Coppel W.* Stability and asymptotic behavior of differential equations. Boston: D. C. Heath, 1965.

[8] *Desoer C., Vidyasagar M.* Feedback systems: input-output properties. N. Y.: Academic Press, 1975.

[9] *Kaszkurevich E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhäuser, 2000.

[10] Š*iljak D. D.* Large-scale dynamic systems: stability and structure. N. Y.: North-Holland, 1978.

[11] *Cohn A.* Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Mathematische Zeitschrift. 1922. V. 14. P. 110–148.

[12] *Polyak B., Halpern M.* Optimal design for discrete-time linear systems via new performance index // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2001. V. 15. No. 2. P. 129–152.

[13] *Поляк Б. Т.* Сверхустойчивые системы управления // Пленарные докл. 12-й Байкальской междунар. конф. "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, 2001. С. 209–219.

[14] *Blanchini F.* Set invariance in control // Automatica. 1999. V. 35. P. 1747–1767.

[15] *Blanchini F., Sznaier M.* A convex optimization approach for fixed-order controller design for disturbance rejection in SISO systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. P. 784–789.

[16] *Бобылева О. Н., Пятницкий Е. С.* Системы с кусочно-линейными функциями Ляпунова // АиТ. 2001. № 9. С. 25–36.

[17] *Дмитриев Н. А., Дынкин Е. Б.* О характеристических числах стохастических матриц // Докл. АН СССР. 1945. т. 49. С. 159–162.

[18] *Карпилевич Ф. И.* О характеристических корнях матриц с неотрицательными элементами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1951. т. 15. С. 361–383.

[19] *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967.

[20] *Bhattacharyya S., Chapellat H., Keel L.* Robust control: the parametric approach. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1995.

[21] *Nemirovskii A. A.* Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Control, Signals and Systems. 1994. V. 6. P. 99–105.

[22] *Blondel V., Tsitsiklis J. N.* A survey of computational complexity results in systems and control // Automatica. 2000. V. 35. P. 1249–1274.

[23] *Qiu L., Davison E. L.* A simple procedure for exact stability robustness computation of polynomials with affine coefficient perturbations // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. P. 413–420.