© 2002 г. **Б. Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук,**
П. С. ЩЕРБАКОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

СВЕРХУСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ. II. СИНТЕЗ[1]

Понятие сверхустойчивости, введенное в [1], используется для синтеза стабилизирующих и оптимальных регуляторов. Показано, что регулятор в форме статической обратной связи по выходу, обеспечивающий сверхустойчивость замкнутой системы, может быть найден (если он существует) с помощью методов линейного программирования; обобщением служит задача об отыскании сверхустойчивой матрицы в данном аффинном семействе. Идеология сверхустойчивости оказывается полезной и при решении задач оптимального и робастного управления. Примерами являются проблема подавления ограниченных возмущений, задача об оптимизации интегрального функционала от модуля (а не квадрата) управления и состояния, а также стабилизация интервального матричного семейства и одновременная стабилизация.

1. Введение

В первой части статьи ([1]) было введено понятие сверхустойчивости и проведен анализ сверхустойчивых систем (изучено поведение их решений при отсутствии или наличии внешних возмущений, расположение спектра, робастные свойства и др.). Однако важнейшей особенностью этого понятия является возможность его использования для целей синтеза. Оказывается, многие трудные классические задачи — стабилизация по выходу, синтез регуляторов заданной структуры, равномерное подавление внешних возмущений — допускают простое решение, если потребовать сверхустойчивости замкнутой системы вместо устойчивости. Так, все упомянутые задачи могут быть решены с помощью линейного программирования. Кроме того, могут быть решены и нестандартные задачи оптимального управления, такие как рассматриваемая ниже задача о линейно-линейном (а не линейно-квадратичном) регуляторе.

Разумеется, у такого подхода есть и недостатки. Так, не всякая управляемая линейная система может быть сверхстабилизирована с помощью обратной связи по состоянию; кроме того, при решении задач оптимального управления используются оценки функционалов вместо их точных значений.

Начнем с задач сверхстабилизации. Иначе говоря, ищется обратная связь (по состоянию или по выходу), которая обеспечивает сверхустойчивость замкнутой системы.

Как и в первой части работы, если не указано явно, используется ∞-норма для векторов $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ и индуцированная ею 1-норма для матриц $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\Big)$.

2. Сверхстабилизация непрерывных систем

Рассмотрим непрерывную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $y \in \mathbb{R}^l$ — выход, а $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, которое ищется в форме обратной связи по выходу

$$u = Ky. \tag{2}$$

Замкнутая система приобретает вид

$$\dot{x} = A_c x, \qquad A_c = A + BKC, \qquad A_c = ((m_{ij})), \tag{3}$$

и матрица K называется стабилизирующей, если A_c устойчива ($\mathrm{Re}\,\lambda_i(A_c) < 0$ для всех собственных значений λ_i матрицы A_c), и *сверхстабилизирующей*, если A_c сверхустойчива, т.е. если

$$\sigma \;=\; \sigma(A_c) \;\doteq\; \min_i\Big(-m_{ii} - \sum_{j\ne i} |m_{ij}|\Big) \;>\; 0; \tag{4}$$

в первой части статьи (см. [1]) величина σ была названа степенью сверхустойчивости.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 00-15-96018 и 02-01-00127 и в рамках комплексной программы Президиума РАН.

Вопрос о стабилизируемости системы по выходу, в отличие от стабилизируемости по состоянию, когда регулятор ищется в форме $u = Kx$, очень труден. Ему посвящено множество работ, однако до сих пор проблема остается открытой [2–4]. В то же время вопрос о возможности сверхстабилизации по выходу допускает очень простое решение.

Действительно, элементы $m_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$, матрицы A_c являются аффинными функциями от $K = ((k_{ij}))$:

$$m_{ij} \doteq m_{ij}(K) = a_{ij} + (BKC)_{ij} = a_{ij} + b_i K c_j,$$

где b_i — i-я строка матрицы B, c_j — j-й столбец матрицы C. Например, в задаче стабилизации по состоянию для простейшей системы с одним управлением имеем $y = x$, $m = 1$, т.е. $C = I$, $B = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец, а $K = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор-строка, поэтому элементы матрицы замкнутой системы $A + BK$ равны $a_{ij} + b_i k_j$, где b_i — i-й элемент B, а k_j — j-й элемент K (матрица BK — первого ранга).

Итак, условие сверхустойчивости (4) матрицы A_c имеет вид

$$-m_{ii} > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Введем искусственные переменные $\sigma, n_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$; тогда условие сверхустойчивости A_c можно записать так:

$$\begin{gathered}\sigma > 0,\\ -m_{ii}(K) - \sum_{j \neq i} n_{ij} \geq \sigma, \qquad i = 1, \dots, n,\\ -n_{ij} \leq m_{ij}(K) \leq n_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.\end{gathered} \tag{5}$$

Если эта система линейных неравенств имеет решение k_{ij}, n_{ij}, $i, j = i, \dots, n$, при некотором $\sigma > 0$, то система сверхустойчива. Чтобы проверить существование решения, можно перейти к задаче линейного программирования

$$\begin{gathered}\max \sigma,\\ -m_{ii}(K) - \sum_{j \neq i} n_{ij} \geq \sigma, \qquad i = 1, \dots, n,\\ -n_{ij} \leq m_{ij}(K) \leq n_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j;\end{gathered} \tag{6}$$

в ней переменными являются матрицы $K, N \doteq ((n_{ij}))$ и скаляр σ.

Т е о р е м а 2.1. Если K, σ — решение задачи (6) *и $\sigma > 0$, то обратная связь $u = Ky$ обеспечивает сверхустойчивость замкнутой системы. Если же $\sigma \leq 0$, то сверхстабилизация регулятором вида $u = Ky$ невозможна.*

Этот результат дает полное решение задачи о сверхстабилизирующем статическом регуляторе по выходу (в частности, при $C = I$ приходим к сверхстабилизации по состоянию).

Отметим, что в задаче (6) ищется максимальное (по всем K) значение σ; если эта величина окажется положительной, то получаем сверхстабилизирующий регулятор, максимизирующий степень сверхустойчивости замкнутой системы. Напомним, что в первой части статьи (см. [1]) была получена следующая оценка для состояния сверхустойчивой системы $\dot{x} = A_c x$:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{-\sigma t}, \qquad \sigma = \sigma(A_c). \tag{7}$$

Таким образом, если в задаче (6) окажется $\sigma > 0$, то оно дает наилучшую оценку (7) из всех возможных. Иными словами, помимо построения сверхстабилизирующего регулятора, мы удовлетворяем наиболее жестким из возможных ограничениям на состояние системы.

П р и м е р 1. Рассмотрим простой пример сверхстабилизации по состоянию. Пусть $n = 2,\ m = 1$, т.е.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad u = Kx, \quad K = k = (k_1\ k_2). \tag{8}$$

Тогда

$$A_c = A + BK = \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 k_1 & a_{12} + b_1 k_2 \\ a_{21} + b_2 k_1 & a_{22} + b_2 k_2 \end{pmatrix},$$

и условие сверхустойчивости принимает вид

$$a_{11} + b_1 k_1 \ < \ -|a_{12} + b_1 k_2|, \qquad a_{22} + b_2 k_2 \ < \ -|a_{21} + b_2 k_1|.$$

Возьмем для определенности $b_1 = b_2 = 1$; нас интересует, существуют ли k_1, k_2, удовлетворяющие неравенствам

$$a_{11} + k_1 \ < \ -|a_{12} + k_2|, \qquad a_{22} + k_2 \ < \ -|a_{21} + k_1|.$$

Каждое из неравенств выделяет прямой угол на плоскости $\{k_1,\, k_2\}$ (рис. 1).

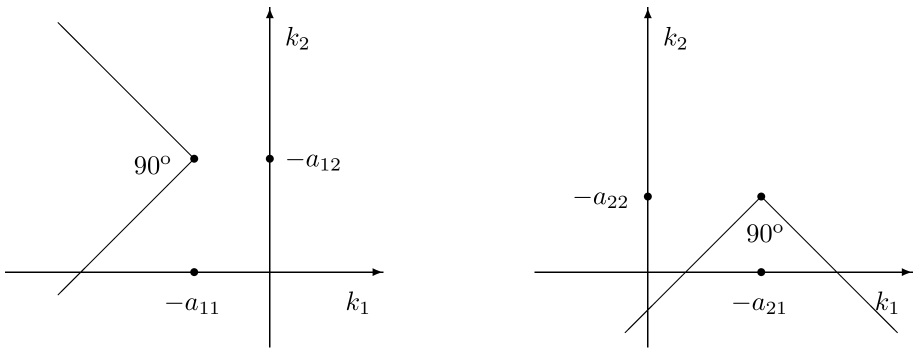

Рис. 1: Коэффициенты сверхстабилизирующего регулятора.

Эти прямые углы содержат общую точку (т.е. решение существует), если и только если вершина одного из них лежит в другом, т.е. удовлетворяется одно из неравенств

$$a_{11} - a_{21} \ < \ -|a_{12} - a_{22}|, \qquad a_{22} - a_{12} \ < \ -|a_{21} - a_{11}|.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\tau \doteq a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12} \ < \ 0.$$

Итак, если $\tau < 0$, то сверхстабилизация возможна; если $\tau \geq 0$, то она невозможна. Мы видим, что не для любой матрицы A можно обеспечить сверхустойчивость; в то же время для любой A, для которой $b = (1 \ \ 1)^{\mathrm{T}}$ не является собственным вектором, пара (A, b) управляема и (обычная) стабилизация с помощью обратной связи $u = kx$ возможна — это классическое решение задачи о размещении полюсов.

Легко выявить и случаи, когда сверхстабилизация заведомо невозможна. Пусть

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = kx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1,$$

и вектор b имеет некоторые координаты нулевыми, например, $b_1 = 0$. Тогда $A_c = A + bk$ имеет такую же первую строку, как и A; если эта строка не удовлетворяла условию сверхустойчивости, т.е. $-a_{11} \leq \sum_{j \neq 1} |a_{1j}|$, то матрица A_c не будет сверхустойчивой ни при каком k. Отсюда, в частности, следует, что для системы, записанной в канонической управляемой форме (с матрицей A во фробениусовой форме и $b = (0 \ \ldots 0 \ 1)^{\mathrm{T}}$), заведомо нельзя добиться сверхустойчивости с помощью обратной связи по состоянию, поскольку у матрицы замкнутой системы изменяется лишь последняя строка, а первые $n-1$ имеют вид $(0 \ \ldots 0 \ 1 \ 0 \ \ldots 0)$, т.е. не удовлетворяют условию сверхустойчивости. Грубо говоря, для возможности сверхстабилизации требуется, чтобы число управлений было достаточно велико и мы могли бы влиять на любую строку в матрице замкнутой системы за счет выбора коэффициентов регулятора.

Итак, сверхстабилизации (даже по состоянию) не всегда можно добиться; в то же время, если решение существует, то оно легко может быть найдено, однако простота решения покупается за счет того, что класс сверхстабилизируемых систем гораздо у́же класса стабилизируемых систем.

При стабилизации систем с помощью обратной связи естественно налагать ограничения на величину матричного коэффициента усиления для того, чтобы ограничить величину применяемого управления. Например, рассмотрим интервальные ограничения на матрицу усиления $K = ((k_{ij}))$:

$$\underline{k}_{ij} \leq k_{ij} \leq \overline{k}_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Чтобы проверить возможность сверхстабилизации системы (1)–(2) при этих дополнительных условиях, достаточно добавить линейные неравенства (9) к ограничениям в задаче линейного программирования (6) и применить к ней теорему 2.1.

Аналогичные дополнительные линейные неравенства появляются при учете ограничений на величину K в матричной 1-норме или ∞-норме.

3. Сверхстабилизация дискретных систем

Все сказанное выше относилось к непрерывным системам; при переходе к дискретному случаю изменения минимальны. Они связаны с тем, что для системы

$$\begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1}, \\ y_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с обратной связью

$$u_k = Ky_k$$

условие сверхустойчивости матрицы $A_c = A + BKC$ записывается как $\|A_c\| < 1$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}(K)| < 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Относительно элементов матрицы K эти условия также записываются как линейные неравенства. Задача линейного программирования, к которой сводится отыскание $\min\limits_K \|A + BKC\|$, аналогичная (6), имеет вид

$$\min q,$$

$$\sum_j n_{ij} \le q, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

$$-n_{ij} \le m_{ij}(K) \le n_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

а возможность сверхстабилизации дается следующим результатом.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть K, q — решение задачи линейного программирования* (10). *Если $q < 1$, то регулятор $u = Ky$ обеспечивает сверхустойчивость матрицы $A_c = A + BKC$ замкнутой системы: $\|A_c\| < 1$; если же $q \ge 1$, то A_c не является сверхустойчивой ни при каком K.*

В некоторых случаях невозможность сверхстабилизации можно установить и не решая задачу линейного программирования (10), а основываясь на следующем результате о двойственности. Наряду с задачей

$$\text{найти} \quad q^* = \min_K \|A + BKC\|_1 \tag{11}$$

рассмотрим двойственную к ней:

$$\begin{gathered} \max \operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y, \\ \|Y\|_\infty \le 1, \\ CY^{\mathrm{T}} B = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $Y = ((y_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — искомая матрица, $\|Y\|_\infty = \max\limits_{1 \le j \le n} \Bigl(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_{ij}| \Bigr)$, а $\operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y$ означает след матрицы $A^{\mathrm{T}} Y$ т.е. $\operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y = \sum\limits_{i,j} a_{ij} y_{ij}$.

Т е о р е м а 3.2. *Оптимальные значения в задачах* (11) *и* (12) *совпадают, а для любого допустимого Y_0 в задаче* (12) *выполняется условие* $\operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y_0 \le q^*$.

Таким образом, если мы найдем матрицу Y_0, удовлетворяющую условиям $\|Y_0\|_\infty \le 1$, $CY_0^{\mathrm{T}} B = 0$ и такую, что для нее $\operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y_0 \ge 1$, то $q^* \ge 1$, а потому сверхстабилизация невозможна.

П р и м е р 2. Рассмотрим пример, аналогичный примеру 1 для непрерывных систем:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u = Kx, \; K = k = (k_1 \; k_2).$$

Выберем

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|Y_0\|_\infty = 1$, $CY_0^{\mathrm{T}} B = Y_0^{\mathrm{T}} b = 0$, и $\operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} Y_0 = 0,5(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$. Таким образом, если $a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21} \ge 2$, то сверхстабилизация невозможна. В действительности, можно показать (рассуждая примерно так же, как в примере 1; разница состоит в том, что вместо двух прямых углов фигурируют два ромба), что условие

$$|a_{11} - a_{12}| + |a_{22} - a_{21}| < 2$$

является необходимым и достаточным для возможности сверхстабилизации.

Отметим, что задача сверхстабилизации для дискретных систем впервые была рассмотрена в [5].

4. Сверхстабилизация одномерных систем

Посмотрим, какие особенности возникают при сверхстабилизации скалярных систем. Пусть одномерный дискретный объект задан передаточной функцией

$$G(z) = \frac{a(z)}{b(z)},$$

где

$$a(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad b(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m.$$

Мы хотим замкнуть его регулятором (см. рис. 2)

$$C(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

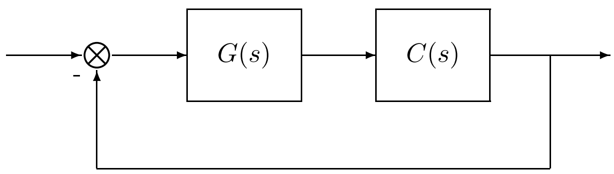

Рис. 2: Стабилизирующий регулятор.

так, чтобы характеристический полином замкнутой системы

$$p(z) = a(z)f(z) + b(z)g(z)$$

был сверхустойчив. Напомним, что в [1] сверхустойчивость дискретного полинома $p(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n$ мы определили как

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i| < |p_0|.$$

Как и при обычной стабилизации, можно было бы выбрать в качестве $p(z)$ произвольный сверхустойчивый полином, решить уравнение Безу

$$a(z)f(z) + b(z)g(z) = 1 \tag{13}$$

(решение существует в предположении взаимной простоты $a(z)$ и $b(z)$) и взять

$$f(z) = p(z)f^0(z) + b(z)r(z), \qquad g(z) = p(z)g^0(z) - a(z)r(z),$$

где $f^0(z)$, $g^0(z)$ — решение (13) минимальной степени $\deg f^0 \le m-1$, $\deg g^0 \le n-1$, а $r(z)$ — произвольный полином. Однако при таком подходе порядок регулятора (степени $f(z)$ и $g(z)$) может оказаться высоким.

Вместо этого зафиксируем степени F и G полиномов $f(z)$ и $g(z)$:

$$f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots + f_F z^F, \qquad g(z) = g_0 + g_1 z + \ldots + g_G z^G,$$

тогда коэффициенты p_i характеристического полинома являются линейными функциями от $f_0, f_1, \ldots, f_F$, $g_0, g_1, \ldots, g_G$, и условие его сверхустойчивости запишется как

$$|p_0(f,g)| > \sum_{i=1}^{l} |p_i(f,g)|, \qquad f = (f_0, \ldots, f_F), \quad g = (g_0, \ldots, g_G),$$

где $l = \max\{n+F, m+G\}$ — степень $p(z)$. Совместность этой системы линейных неравенств может быть проверена путем решения задачи линейного программирования, аналогичной (10). Она может не иметь решения при данных F и G; тогда, увеличивая порядки F и G, последовательно решаем задачи линейного программирования более высокой размерности. В соответствии с теоремой Безу решение заведомо существует при $G = n-1$, $F = m-1$.

Таким образом, одномерная дискретная система всегда может быть сверхстабилизирована, причем порядок сверхстабилизирующего регулятора оказывается заметно ниже, чем при просто стабилизации.

Задача сверхстабилизации для одномерных дискретных систем подробно анализируется в [5]; там же можно найти численные примеры.

5. Нахождение сверхустойчивого элемента в матричном или полиномиальном семействе

Рассмотрим задачу стабилизации систем под несколько иным углом зрения. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, найти устойчивую матрицу X, ближайшую к ней. Расстояние понимается как

$$\mathrm{dist}\,(A, X) \doteq \|A - X\|,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма, а устойчивость может пониматься как в дискретном, так и в непрерывном смысле. В другой формулировке эта задача выглядит следующим образом. Дано аффинное семейство матриц

$$A(q) = A_0 + \sum_{k=1}^{\ell} q_k A_k, \qquad q \in Q \subseteq \mathbb{R}^{\ell}, \tag{14}$$

где $A_0, \dots, A_\ell \in \mathbb{R}^{n\times n}$ заданы. Существует ли в этом семействе хотя бы одна устойчивая матрица? Множество Q либо совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^\ell$, либо является ограниченным выпуклым множеством; как правило — это шар в некоторой норме:

$$Q = \{q \in \mathbb{R}^\ell \colon \|q - q^0\| \le \gamma\}. \tag{15}$$

Происхождение этой задачи — статическая стабилизация по выходу многомерных систем, заданных в пространстве состояний. Действительно, стабилизация системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ регулятором $u = Ky$ сводится к поиску такой матрицы K, что при данных A, B, C матрица $A_c = A + BKC$ устойчива. Рассматривая элементы матрицы K как параметры q, приходим к задаче в форме (14), которая, следовательно, является обобщением проблемы стабилизации по выходу.

Для некоторых частных случаев (например, когда матрицы $A_0, \dots, A_\ell$ симметричны) все эти проблемы допускают простое решение. В общем случае такие задачи являются NP-сложными (см. [6]) и эффективные методы их точного решения отсутствуют. Некоторые численные методы (не дающие, впрочем, гарантии отыскания точного решения) приведены в [7].

При переходе от устойчивости к сверхустойчивости ситуация заметно упрощается и задача сводится к линейному или квадратичному программированию в зависимости от используемой матричной нормы. Рассмотрим задачу о нахождении ближайшей сверхустойчивой матрицы, например, в случае дискретной сверхустойчивости и расстояния во фробениусовой норме. Пусть a_{ij} — элементы данной матрицы A, $\|A\| \ge 1$, а x_{ij} — элементы искомой матрицы X, принадлежащей замыканию множества сверхустойчивых матриц и ближайшей к A. Тогда X является решением задачи квадратичного программирования

$$\begin{gathered} \min \sum_{i,j} (a_{ij} - x_{ij})^2, \\ x_{ii} + \sum_{j\ne i} |x_{ij}| \le 0, \qquad i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{16}$$

Отметим, что если обозначить минимум в этой задаче через γ^*, то ясно, что $\gamma \le \gamma^*$, где γ — расстояние от A до множества устойчивых матриц. Таким образом, минимальное расстояние до сверхустойчивой матрицы является оценкой сверху для расстояния до ближайшей устойчивой матрицы.

Если понимать расстояние, например, в интервальной норме $\|A - X\| = \max_{ij} |a_{ij} - x_{ij}|$, то минимизируемая квадратичная функция в (16) заменяется на линейную, и приходим к задаче

$$\begin{gathered} \min \max_{i,j} |a_{ij} - x_{ij}|, \\ x_{ii} + \sum_{j\ne i} |x_{ij}| \le 0, \qquad i = 1, \dots, n, \end{gathered} \tag{17}$$

которая стандартными приемами сводится к задаче линейного программирования. Совершенно аналогичная задача линейного программирования получается в случае ∞-нормы: $\|A-X\|_\infty = \max_j \sum_i |a_{ij} - x_{ij}|$.

В случае дискретной сверхустойчивости разница состоит лишь в том, что в (16) или (17) ограничения на x_{ij} заменяются на

$$\sum_j |x_{ij}| \le 1, \qquad i = 1, \dots, n,$$

которые также сводятся к системе линейных неравенств на элементы x_{ij}.

В некоторых случаях задача имеет явное решение; простейший из них — дискретная сверхустойчивость и 1-норма: дана матрица A, $\|A\|_1 \ge 1$, найти X, $\|X\|_1 \le 1$, минимизирующую $\|A-X\|_1$. Решение этой задачи достигается на

$$X^* \doteq \arg \min_{\|X\|_1 \le 1} \|A - X\|_1 = \frac{A}{\|A\|_1},$$

и

$$\min \|A - X\|_1 \;=\; \|A - X^*\|_1 \;=\; \|A\|_1 \Big(1 - \frac{1}{\|A\|_1} \Big) \;=\; \|A\|_1 - 1.$$

Можно также наложить дополнительные ограничения на элементы искомой матрицы X, например, вида $\underline{x}_{ij} \le x_{ij} \le \overline{x}_{ij}$ или $|x_{ij} - x^0_{ij}| \le \gamma$, $i, j = 1, \dots, n$, где $X^0 = ((x^0_{ij}))$ — некоторое номинальное значение. Это лишь добавит линейных ограничений на переменные x_{ij} в (16) или (17). В такой постановке задача формулируется как отыскание сверхустойчивой матрицы в семействе матриц, и если рассматривать элементы X как параметры, то приходим к аффинному семейству (14) и поиску в нем сверхустойчивой матрицы.

Эту задачу можно решать как и раньше, находя ближайшую сверхустойчивую матрицу к некоторой выбранной $A = ((a_{ij}))$: например, для непрерывного случая, расстояния в интервальной норме и ограничениях $\|q - q^0\|_\infty \le \gamma$ приходим к задаче

$$\min_q \max_{i,j} \Big| a_{ij} - a^0_{ij} - \sum_{k=1}^{\ell} q_k a^k_{ij} \Big|,$$

$$a^0_{ii} + \sum_{k=1}^{\ell} q_k a^k_{ii} + \sum_{j \ne i} \Big| a^0_{ij} + \sum_{k=1}^{\ell} q_k a^k_{ij} \Big| \le 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

(здесь $A_k = ((a^k_{ij}))$, $k = 0, 1, \dots, \ell$), которая сводится к задаче линейного программирования относительно q. Если q^* — ее решение и $\|q^* - q^0\|_\infty = \gamma^* \le \gamma$, то в семействе (14), (15) имеется сверхустойчивая матрица $A(q^*)$, причем она является ближайшей в интервальной норме к данной матрице A.

Можно поступить и иначе, проверяя совместность системы неравенств. Например, для того же непрерывного случая и при ограничениях на параметры $\|q - q^0\|_\infty \le \gamma$ элементы $a_{ij}(q)$ матрицы $A(q)$ (14) являются аффинными функциями от q, система неравенств имеет вид

$$-a_{ii}(q) - \sum_{j \ne i} |a_{ij}(q)| > 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$|q_i - q^0_i| \le \gamma, \qquad i = 1, \dots, \ell,$$

и если она разрешима (что проверяется путем свед́ения к задаче линейного программирования), то в семействе (14), (15) имеется сверхустойчивая матрица. Поскольку сверхустойчивая матрица является также и устойчивой, то если решение существует, то оно также есть решение задачи о нахождении устойчивой матрицы в аффинном семействе.

Таким же образом решается вопрос для случая дискретной сверхустойчивости и других норм.

Все рассмотренные выше матричные задачи могут формулироваться для полиномов. Дано аффинное семейство

$$\mathcal{P}(z, Q) = \Big\{ p(z, q) = p^0(z) + \sum_{i=1}^{\ell} q_i p^i(z), \quad \deg p^i(z) < \deg p^0(z), \quad q \in Q \subseteq \mathbb{R}^\ell \Big\}, \tag{18}$$

где $p^i(z)$, $i = 0, \dots, \ell$ — заданные полиномы; существует ли в нем хотя бы один устойчивый полином? Как и для матричных семейств, множество Q может совпадать с $\mathbb{R}^\ell$ или может быть задано в форме ограничений на норму (15), либо в виде интервальных ограничений

$$Q = \{q \in \mathbb{R}^\ell\colon\ \underline{q}_i \le q_i \le \overline{q}_i,\ \ i = 1, \ldots, \ell\}. \tag{19}$$

Такая задача является обобщением проблемы стабилизируемости систем регуляторами заданной структуры.

В частном случае, когда сами коэффициенты полинома $p(z, q)$ являются неопределенными параметрами q_i, задачу можно сформулировать следующим образом. Дан неустойчивый полином $p^0(z)$; найти ближайший устойчивый полином той же степени. Расстояние между полиномами $a(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ и $b(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$ понимается как $\operatorname{dist}(a(z), b(z)) = \|a - b\|$, где $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ — векторы коэффициентов $a(z), b(z)$, а $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда, как и в матричном варианте, если

$$\min_{p(z,q)\in\mathcal{P}} \operatorname{dist}\Big(p^0(z),\, p(z,q)\Big) = \gamma^* \le \gamma,$$

где $\mathcal{P}$ — множество устойчивых полиномов, то решение задачи о нахождении устойчивого полинома в семействе (18) с $p(z, q) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_n z^n$ и ограничениями (15) существует; в противном случае — не существует.

На первый взгляд, такая задача очень близка к задаче о робастной устойчивости полиномов, эффективные методы решения которой хорошо известны (например, см. [8]). Разница между ними в том, что в задаче о робастной устойчивости речь идет о существовании хотя бы одного неустойчивого полинома в семействе (18), (19) (или (18), (15)), тогда как мы ищем хотя бы один устойчивый полином в том же семействе. Как и в матричном случае, эта разница в постановке приводит к кардинальной перемене в сложности задач, которые оказываются NP-сложными (см. [6, 9]). Приближенные способы их решения можно найти в [7].

В то же время, задача поиска ближайшего сверхустойчивого полинома очень проста (напомним, что сверхустойчивость полиномов мы определили только для случая дискретного времени). Действительно, пусть $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ — коэффициенты данного неустойчивого полинома $p(z)$, а $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ — коэффициенты искомого полинома $q(z)$, принадлежащего замыканию множества сверхустойчивых полиномов. Минимизируя расстояние между $p(z)$ и $q(z)$ в евклидовой норме, получаем задачу квадратичного программирования

$$\min \sum_{i=0}^{n} (p_i - q_i)^2,$$

$$-|q_0| + \sum_{i=1}^{n} |q_i| \le 0$$

(как и выше, линейные ограничения на модули переменных сводятся к линейным ограничениям на сами переменные). Совершенно аналогичным образом задача формулируется для других норм, таких как 1-норма или ∞-норма; тогда приходим к задаче линейного программирования.

Иногда решение находится в явном виде. Как и для матриц, это случай 1-нормы; ограничимся моническими полиномами ($p_0 = q_0 = 1$.) Тогда задача сводится к $\min \|p(z) - q(z)\|_1$ при условиях $\|q - 1\|_1 \le 1, q_0 = 1$. Решением здесь является полином $q^*(z) = 1 + (p(z) - 1)/\|(p - 1)\|_1$, а минимум равен

$$\min \|p(z) - q(z)\|_1 = \|p - 1\|_1 - 1.$$

6. Оптимальное управление

Если система может быть сделана устойчивой с помощью обратной связи по выходу или состоянию, то можно попытаться оптимизировать при этом некоторый показатель качества. Мы рассмотрим две задачи, одна связана с наилучшим подавлением внешних ограниченных возмущений, вторая — с минимизацией некоторого интегрального показателя качества процесса. Однако вместо устойчивости замкнутой системы потребуем ее сверхустойчивости и изучим вытекающие из этого последствия.

6.1. Подавление ограниченных возмущений

Рассмотрим многомерную непрерывную систему, заданную в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D_1 w, && x(0) = x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, && \|w(t)\| \le 1, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $y \in \mathbb{R}^l$ — выход, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, а $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ — внешнее возмущение, относительно которого предполагается лишь ограниченность во все моменты времени. Мы ищем регулятор по выходу $u = Ky$ и прежде всего требуем, чтобы он сверхстабилизировал замкнутую систему

$$\dot{x} = A_c x + Dw, \qquad A_c \doteq A + BKC, \quad D \doteq D_1 + BKD_2, \tag{21}$$

т.е. чтобы

$$\sigma(A_c) > 0,$$

где $\sigma(A_c)$ определяется (4). Среди всех таких регуляторов ищем тот, который минимизирует критерий

$$J = \sup_{\|w\| \le 1} \sup_t \|x(t)\|,$$

т.е. наилучшим образом подавляет влияние ограниченных возмущений (в более общей постановке можно интересоваться не состоянием $x(t)$, а какой-нибудь линейной функцией от него). Классические задачи такого типа, в которых требуется устойчивость (а не сверхустойчивость) замкнутой системы, рассматриваются в рамках так называемой теории l_1-оптимизации [10–12]. Они очень трудны даже для скалярных систем (особенно в непрерывном времени), и их удовлетворительное решение получено лишь в частных случаях. Покажем, что переход от устойчивости к сверхустойчивости существенно упрощает задачу подавления ограниченных возмущений и допускает обобщение на многомерные системы, причем случаи дискретного и непрерывного времени охватываются единообразно просто.

Прежде всего, напомним, что для непрерывной сверхустойчивой системы (21) с $\|w(t)\| \le 1$ в [1] была получена оценка

$$\|x(t)\| \le \frac{\|D\|}{\sigma(A_c)} = \frac{\|D_1 + BKD_2\|}{\sigma(A + BKC)}$$

при условии, что $\|x(0)\| \le \frac{\|D\|}{\sigma(A_c)}$. Воспользуемся этой оценкой и будем минимизировать ее по всем K при условии, что регулятор K — сверхстабилизирующий. Вводя параметр $\sigma > 0$, приходим к задаче

$$\min_{K,\sigma} \frac{\|D_1 + BKD_2\|}{\sigma}\,, \tag{22}$$

$$\sigma(A + BKC) \ge \sigma > 0. \tag{23}$$

Как и выше, при фиксированном σ такую задачу нетрудно преобразовать к системе линейных неравенств относительно элементов матрицы регулятора K.

Т е о р е м а 6.1. *Если задача параметрического линейного программирования* (22)–(23) *имеет решение K, σ с оптимальным значением J^* критерия* (22), *то регулятор $u = Ky$ сверхстабилизирует систему* (20) *и при любых начальных условиях $\|x(0)\| \le J^*$ будет $\|x(t)\| \le J^*$, $t > 0$.*

Таким образом, полученный регулятор минимизирует норму вектора состояний равномерно по t, что предотвращает нежелательные эффекты типа всплеска.

Мы отмечали, что не всякая система может быть сверхстабилизирована. Поэтому решения в задаче (22)–(23) может и не существовать, однако, если она и разрешима, то величина J^* дает лишь верхнюю оценку оптимального значения критерия.

Совершенно аналогично задача решается в дискретном времени; в этом случае мы имеем дело с системой

$$\begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + D_1 w_{k-1}, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \qquad \|w_k\| \le 1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{24}$$

и ищем регулятор $u_k = Ky_k$, сверхстабилизирующий замкнутую систему

$$x_k = A_c x_{k-1} + Dw_{k-1}, \qquad A_c \doteq A + BKC, \quad D \doteq D_1 + BKD_2, \tag{25}$$

т.е. такой, что $\|A_c\| < 1$. Аналогично непрерывному случаю, мы пользуемся оценкой

$$\|x_k\| \le \frac{\|D\|}{1 - \|A_c\|} = \frac{\|D_1 + BKD_2\|}{1 - \|A + BKC\|},$$

полученной в [1] для дискретной сверхустойчивой системы (25) с $\|w_k\| \le 1$, и, вводя параметр $0 \le q < 1$, сводим задачу минимизации этой оценки к параметрической задаче линейного программирования

$$\min_{K,q} \frac{\|D_1 + BKD_2\|}{1 - q},$$

$$\|A + BKC\| \le q.$$

Рассмотрим теперь одномерную дискретную систему, описываемую скалярным разностным уравнением

$$a(z)y_k = b(z)u_k + w_k, \tag{26}$$

где

$$a(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad b(z) = b_1 z + \ldots + b_m z^m \tag{27}$$

— полиномы, а z — оператор сдвига назад, т.е. $z^i y_k = y_{k-i}$. Отметим, что $b(0) = 0$, т.е. y_k зависит от $u_{k-1}, \ldots, u_{k-m},\ y_{k-1}, \ldots, y_{k-n}$, а полином $a(z)$ всегда можно отнормировать так, чтобы $a(0) = 1$. Как и выше, относительно помехи w будем предполагать лишь ее ограниченность для всех моментов k, т.е.

$$|w_k| \le r, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

где $r > 0$ — некоторая константа. Нас интересует выбор стабилизирующего управления u в форме обратной связи:

$$u_k = -\frac{f(z)}{g(z)} y_k = -C(z) y_k, \tag{29}$$

которое минимизирует критерий

$$J \doteq \sup_w \sup_k |y_k|. \tag{30}$$

Иначе говоря, мы хотим, чтобы при наихудших возмущениях выход системы был бы по возможности малым.

Задача (26)–(30) является сложной (так же, как и ее многомерный вариант, рассмотренный выше). Имеющиеся в литературе методы решения основаны на параметризации всех стабилизирующих регуляторов с последующей оптимизацией по параметру, и задача сводится к бесконечномерной задаче линейного программирования. Решение достигается на конечномерном векторе, по которому восстанавливается оптимальный регулятор. Основная трудность при этом — высокий порядок получаемых оптимальных регуляторов (часто он оказывается гораздо выше порядка самого объекта), который к тому же невозможно оценить заранее. Еще хуже ситуация в задаче с непрерывным временем (L_1-оптимизация); здесь оптимальный регулятор $u = C(s)y$ может оказаться бесконечномерным, т.е. оптимальная функция $C(s)$ не является дробно-рациональной.

Подойдем к проблеме с позиций сверхустойчивости и покажем, что такой подход к подавлению ограниченных возмущений существенно упрощает задачу; в частности, возможно построение оптимального регулятора заданного порядка. Характеристический полином замкнутой системы равен

$$p(z) = a(z)g(z) + b(z)f(z),$$

и она принимает вид

$$p(z)y_k = g(z)w_k, \qquad |w_k| \le r, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{31}$$

Аналогично $a(z)$ мы можем отнормировать полином $g(z)$ так, чтобы $g(0) = 1$; в сочетании с условиями $a(0) = 1$, $b(0) = 0$ это дает $p(0) = 1$, т.е. характеристический полином равен

$$p(z) = 1 + p_1 z + \ldots + p_n z^n.$$

Потребуем, чтобы он был сверхустойчивым, т.е. $\sum_{i=1}^n |p_i| < 1$, или, иначе, чтобы

$$\|p(z) - 1\|_1 < 1,$$

где 1-норма полинома определяется как сумма абсолютных значений его коэффициентов. В [1] для выхода системы (31) со сверхустойчивым полиномом $p(z)$ была получена оценка

$$|y_k| \ \le \ \frac{\|g\|_1}{1 - \|p-1\|_1}\, r$$

для всех k. Таким образом, чтобы минимизировать $\sup_k |y_k|$ — максимум модуля выхода — можно минимизировать (по $f(z)$ и $g(z)$) величину

$$\gamma(f, g) \doteq \frac{\|g\|_1}{1 - \|p-1\|_1}\, r \tag{32}$$

в предположении, что знаменатель этого выражения положителен. Вводя параметр $q,\ 0 \le q < 1$, мы приходим к задаче

$$\min_{f,g} \|g\|_1/(1-q), \qquad \|ag+bf-1\|_1 \le q, \qquad g(0)=1. \tag{33}$$

Зафиксируем степени F и G полиномов $f(z)$ и $g(z)$:

$$f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots + f_F z^F, \qquad g(z) = 1 + g_1 z + \ldots + g_G z^G,$$

и значение параметра q. Тогда с помощью стандартных приемов (см. раздел 3) задача (33) может быть преобразована в задачу линейного программирования относительно переменных $f_0, f_1, \ldots, f_F$, $g_1, \ldots, g_G$. Решая ее при различных $0 \le q < 1$ и оптимизируя по q, мы находим минимум γ^* величины (32), а сам регулятор $C(z) = f(z)/g(z)$ гарантирует оценку

$$\sup_k |y_k| \le r\gamma^* \tag{34}$$

для замкнутой системы. Может оказаться, что при слишком малых F и G решение задачи (33) не существует даже при $q \approx 1$, т.е. полином $p(z)$ не может быть сделан сверхустойчивым; тогда порядки F и G полиномов регулятора следует увеличить. Важно отметить, что здесь не возникает проблем с высокими порядками. В самом деле, согласно теореме Безу, в предположении взаимной простоты $a(z)$, $b(z)$ уравнение $ag + bf - 1 = 0$ разрешимо с $G \le n-1$, $F \le m-1$, и ограничения в (33) совместны при $q = 0$, т.е. задача (33) заведомо имеет решение при $G = n-1$, $F = m-1$.

Описанный способ проще, чем l_1-оптимизация. Более того, он позволяет строить оптимальный регулятор заданного порядка. Однако оценка (34) является лишь верхней гранью для $\sup_k |y_k|$, поэтому l_1-оптимизация может дать лучшее значение этого критерия.

Подход к задаче подавления ограниченных возмущений, основанный на идее сверхустойчивости, впервые предложен в [5]. Сходный подход к построению оптимальных регуляторов заданного порядка для скалярных систем был впервые предложен в [13], см. также [14]. Близкие задачи рассматривались в [15, 16].

6.2. Линейно-линейный регулятор

Классической задачей в теории управления является задача о линейно-квадратичном регуляторе: для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0,$$

найти стабилизирующее управление в форме $u = Kx$, минимизирующее квадратичный интегральный показатель качества

$$J = \int_0^\infty \Big(x^{\mathrm T} R x + u^{\mathrm T} S u\Big) dt.$$

Решение этой задачи хорошо известно (см., например, [17]).

Однако можно рассматривать задачу оптимального управления, в которой показатель качества линейный:

$$J = \int_0^\infty \Big(\|x\| + \alpha\|u\|\Big) dt.$$

Такую задачу естественно называть задачей о *линейно-линейном регуляторе*; она возникает, например, в некоторых постановках задачи l_1-оптимизации [18] и в инженерных приложениях [19], но систематические методы ее решения неизвестны. Однако, как и во многих проблемах, рассмотренных выше, решение легко получить, заменив устойчивость на сверхустойчивость. Действительно, потребовав, чтобы матрица $A_c = A + BK$ замкнутой системы была сверхустойчивой и воспользовавшись оценкой (7), после очевидных преобразований получаем

$$J \le \frac{\Big(1 + \alpha\|K\|\Big)\|x_0\|}{\sigma(A+BK)}.$$

Теперь можно минимизировать по правую часть этого неравенства, представляющую собой верхнюю границу для J. Эта задача в свою очередь сводится к параметрическому линейному программированию

$$\min_{K,\sigma} \frac{1}{\sigma}\Big(1 + \alpha\|K\|\Big),$$
$$\sigma(A+BK) \ge \sigma > 0$$

совершенно аналогично тому, как это делалось выше.

Отметим, что если отбросить член $\alpha\|u\|$, то решение в некоторых ситуациях может вырождаться. Например, если неравенство $\sigma(A+BK) \geq \sigma > 0$ имеет решение при любом σ (что имеет место, в частности, при матрице B квадратной и невырожденной), то σ может быть сделано сколь угодно большим, а J — сколь угодно малым. Однако при этом K и управление u будут очень велики; член $\alpha\|u\|$ отчасти предотвращает этот эффект. В то же время решение может не существовать даже при наличии этого члена. Так, в одномерной системе $\dot{x} = u$ выбор $u = -kx$ дает $J = (\alpha + 1/k)|x_0|$, и оптимум на конечном k не достигается. Такой же эффект имеет место в примере 1 из раздела 2.

Аналогичные результаты можно получить для дискретных систем.

7. Некоторые вопросы робастного синтеза

В первой части ([1]) мы рассматривали задачу анализа робастной сверхустойчивости интервального матричного семейства

$$A = ((a_{ij})), \qquad a_{ij} = a_{ij}^0 + \gamma\Delta_{ij}, \quad |\Delta_{ij}| \leq m_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{35}$$

и получили ее полное решение. Именно, если номинальная матрица $A_0 = ((a_{ij}^0))$ сверхустойчива, то все семейство робастно сверхустойчиво для любого

$$\gamma < \gamma^* \doteq \frac{\sigma(A_0)}{n} \tag{36}$$

(в простейшем случае $m_{ij} \equiv 1$).

Исследуем теперь задачу синтеза сверхстабилизирующего регулятора при наличии неопределенности в описании управляемого объекта — это робастная сверхстабилизация. К этому же кругу вопросов относится так называемая проблема одновременной стабилизации, когда требуется одним регулятором стабилизировать несколько фиксированных систем.

7.1. Робастная сверхстабилизация

Рассмотрим неопределенную непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx; \end{aligned}$$

пусть для простоты вся неопределенность сосредоточена в матрице A и она имеет интервальную форму (35), где $A_0 \doteq ((a_{ij}^0))$ — матрица номинальной системы, $\gamma \geq 0$ — числовой параметр (размах неопределенности), а $m_{ij} \geq 0$ — заданные числа, образующие матрицу $M = ((m_{ij}))$. Существует ли обратная связь

$$u = Ky,$$

стабилизирующая все семейство систем? Как известно (например, см. [6]), даже задача проверки робастной устойчивости интервального семейства (и нахождения радиуса робастной устойчивости) сложна; те же сложности возникают и при робастной стабилизации. В то же время, встав на позиции сверхустойчивости, мы можем без труда получить решение.

В самом деле, представим матрицу $A_c = A + BKC$ замкнутой системы в виде

$$A_c \;=\; A_0 + BKC + \gamma\Delta \;=\; A_c^0(K) + \gamma\Delta, \qquad \Delta = ((\Delta_{ij})),$$

где обозначено $A_c^0(K) = ((a_{ij}^0(K))) = A_0 + BKC$ — матрица номинальной замкнутой системы, аффинно зависящая от K. Неопределенная система сверхстабилизируема данной обратной связью $y = Ku$ тогда и только тогда, когда для всех допустимых Δ выполнено

$$-(a_{ii}^0(K) + \gamma\Delta_{ii}) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}^0(K) + \gamma\Delta_{ij}| > 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Эти неравенства будут выполнены для всех допустимых Δ_{ij}, если и только если совместна следующая система линейных неравенств относительно элементов K:

$$-a_{ii}^0(K) - \gamma m_{ii} - \sum_{j\neq i}\Big(|a_{ij}^0(K)| + \gamma m_{ij}\Big) > 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Как и выше, проверка совместности осуществляется путем сведе́ния к задаче линейного программирования относительно K.

Более того, пусть номинальная система сверхстабилизируема, т.е. задача линейного программирования (см. (6))

$$
\begin{gathered}
\max \sigma, \\
-a_{ii}^0(K) - \sum_{j \neq i} n_{ij} \geq \sigma, \qquad i = 1, \ldots, n, \\
-n_{ij} \leq a_{ij}^0(K) \leq n_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j,
\end{gathered} \tag{37}
$$

имеет решение K, $\sigma > 0$ (теорема 2.1); обозначим $\sigma \doteq \sigma(A_c^0)$. Тогда без труда находим *радиус максимальной робастности* — максимальное значение размаха γ неопределенности, при котором возможна робастная сверхстабилизация. Действительно, если при каком-то K матрица $A_c^0(K)$ номинальной замкнутой системы сверхустойчива, то в соответствии с (36) сверхустойчивость возмущенной системы сохраняется при всех

$$
\gamma < \gamma_K^* \doteq \frac{\sigma(A_c^0(K))}{n}
$$

(для простоты рассматриваем случай $m_{ij} \equiv 1$). Величина $\sigma(A_c^0) > 0$, полученная в (37) в результате оптимизации по всем сверхстабилизирующим регуляторам K, — максимально возможная из всех $\sigma(A_c^0(K))$, поэтому радиус максимальной робастности равен

$$
\gamma^* \doteq \frac{\sigma(A_c^0)}{n}.
$$

Совершенно аналогичные результаты справедливы в дискретном случае.

7.2. Одновременная стабилизация

Задача об одновременной стабилизации возникает во многих практических ситуациях. Пусть объект может работать в нескольких режимах. Переход от одного режима к другому происходит независимо от нашего желания, и информация об этом может отсутствовать; например, такой переход может вызываться отказом какого-либо элемента объекта. Цель управления — выбрать регулятор, обеспечивающий работоспособность (и в первую очередь устойчивость) системы в любом из возможных режимов. Формализацией такой задачи может служить следующая проблема. Имеется m одномерных объектов с передаточными функциями

$$
G_i(s) = \frac{a_i(s)}{b_i(s)}, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{38}
$$

Существует ли регулятор

$$
C(s) = \frac{f(s)}{g(s)}, \tag{39}
$$

который одновременно стабилизирует все эти объекты? Иначе говоря, можно ли найти полиномы $N(s), D(s)$ так, чтобы все характеристические полиномы

$$
p_i(s) = a_i(s)f(s) + b_i(s)g(s), \qquad i = 1, \ldots, m,
$$

были гурвицевыми?

Для $m = 1$ при a_1, b_1, не имеющих общих неустойчивых корней, решение всегда возможно на основе теорема Безу; более того, можно описать все стабилизирующие регуляторы с помощью параметризации Юлы. Для двух объектов решение также может быть получено в том числе и в многомерном случае. Однако уже для $m = 3$ методы решения проблемы неизвестны. Более того, существуют косвенные подтверждения отсутствия "простого" решения. Обзор литературы по этой тематике можно найти в монографии [20].

Задача об одновременной стабилизации возникает и в матричном варианте. Даны m линейных систем в пространстве состояний:

$$
\dot{x} = A_i x + B_i u, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{40}
$$

Существует ли один регулятор в форме обратной связи по состоянию

$$
u = Kx, \tag{41}
$$

стабилизирующий все эти системы? Иначе говоря, существует ли матрица K такая, что все матрицы

$$A_c^i \doteq A_i + B_i K, \qquad i = 1, \dots, m,$$

устойчивы? Совершенно аналогично формулируется задача для дискретных систем. Общий метод решения этой задачи неизвестен; ясно лишь, что он не может быть простым, поскольку трудная задача (38)–(39) является здесь частным случаем.

Если же вместо устойчивости рассматривать сверхустойчивость, то задача становится тривиальной, и решение возможно на основе линейного программирования. Действительно, каждое из условий $\sigma(A_i + B_i K) > 0$ является системой линейных неравенств вида (5) относительно элементов K, и мы заключаем, что если у совокупной системы линейных неравенств

$$\sigma(A_i + B_i K) > 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{42}$$

имеется решение K, то регулятор (41) одновременно сверхстабилизирует все m систем (40). Поскольку сверхустойчивость влечет устойчивость, то тем самым разрешается и проблема одновременной стабилизации. Приведенное решение задачи является лишь достаточным, и одновременная стабилизация может быть возможна и тогда, когда система линейных неравенств (42) несовместна.

8. Заключение

Понятие сверхустойчивости, введенное в [1], оказывается весьма полезным для решения задач синтеза регуляторов. Так, в отличие от задачи стабилизации по выходу, задача сверхстабилизации решается с помощью очень простых средств, однако ее решение не всегда существует. Задача об оптимальном подавлении ограниченных возмущений для многомерных систем также допускает решение с помощью методов линейного программирования. Удается решать и нестандартные задачи оптимального управления, такие как минимизация L_1-нормы выхода. Впрочем, в последних задачах мы получаем лишь субоптимальное управление, так как пользуемся оценками решений вместо их точных значений.

В целом можно заключить, что основанный на сверхустойчивости подход к задачам управления является весьма перспективным.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3.2. Перепишем задачу $\min \|A + BKC\|_1$ как задачу условной минимизации

$$\min \|H\|_1,$$
$$H = A + BKC.$$

Составим для нее функцию Лагранжа с матричным множителем Лагранжа $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$L(H, K, Y) = \|H\|_1 + \langle Y,\, H - A - BKC\rangle,$$

где $\langle X,\, Y\rangle$ означает скалярное произведение в пространстве матриц $n \times n$:

$$\langle X,\, Y\rangle = \operatorname{tr} X^{\mathrm{T}} Y = \operatorname{tr} Y X^{\mathrm{T}}.$$

Минимизируя L по K, из условия $\partial L/\partial K = 0$ получаем $\partial L/\partial K = B^{\mathrm{T}} Y C^{\mathrm{T}} = 0$, т.е. $C Y^{\mathrm{T}} B = 0$, поэтому $\langle Y,\, BKC\rangle = \operatorname{tr} Y^{\mathrm{T}} BKC = \operatorname{tr} C Y^{\mathrm{T}} BK = 0$ и

$$L = \|H\|_1 + \langle Y,\, H - A\rangle.$$

Минимум этого выражения по H конечен, лишь если $\|Y\|_\infty \le 1$ (так как $\min\limits_x \Big(\|x\|_p + (x, c)\Big) > -\infty$ тогда и только тогда, когда $\|c\|_q \le 1$ для $1/p + 1/q = 1$). Итак,

$$\psi(Y) \doteq \min_{K,H} L(H, K, Y) = -\langle Y,\, A\rangle, \qquad \psi(Y) > -\infty$$

тогда и только тогда, когда $\|Y\|_\infty \le 1$ и $C Y^{\mathrm{T}} B = 0$. По теореме двойственности для выпуклого программирования имеем

$$\min_{H = A + BKC} \|H\|_1 \;=\; \max_{\psi(Y) > -\infty} \psi(Y).$$

С заменой Y на $-Y$ это и дает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I // АиТ. 2002. №. 8. С. 37–53.

2. *Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback: a survey // Automatica. 1997. V. 33. No. 2. P. 125–137.

3. *Blondel V., Sontag E., Vidyasagar M., Willems J.* Open problems in mathematical systems and control theory. London: Springer, 1999.

4. *Blondel V., Tsitsiklis J. N.* A survey of computational complexity results in systems and control // Automatica. 2000. V. 35. P. 1249–1274.

5. *Polyak B., Halpern M.* Optimal design for discrete-time linear systems via new performance index // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2001. V. 15. No. 2. P. 129–152.

6. *Nemirovskii A. A.* Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Control, Signals, Systems. 1994. V. 6. P. 99–105.

7. *Polyak B. T., Shcherbakov P. S.* Numerical search of stable or unstable element in matrix or polynomial families: A unified approach to robustness analysis and stabilization // Lect. Notes Control Inf. Sci. 1999. V. 245. P. 344–358.

8. *Bhattacharyya S., Chapellat H., Keel L.* Robust control: the parametric approach. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1995.

9. *Padmanabhan P., Hollot C.V.* Complete instability of a box of polynomials // IEEE Trans. Autom. Contr. 1992. V. 37. No. 8. P. 1230–1233.

10. *Dahleh M., Pearson J.* l_1-optimal controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. P. 314–322.

11. *Dahleh M., Diaz-Bobillo I.* Control of uncertain systems: a linear programming approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

12. *Барабанов А.* Синтез минимаксных регуляторов, С.Пб.: Изд-во С.Пб. унив., 1996.

13. *Blanchini F., Sznaier M.* A convex optimization approach for fixed-order controller design for disturbance rejection in SISO systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. P. 784–789.

14. *Вишняков А. Н., Поляк Б. Т.* Синтез регуляторов низкого порядка для дискретных систем управления при наличии неслучайных возмущений // АиТ. 2000. №. 9. С. 112–119.

15. *Киселев О. Н., Поляк Б. Т.* Минимизация перерегулирования в линейных дискретных системах регуляторами низкого порядка // АиТ. 2001. №. 4. С. 98–108.

16. *Halpern M., Polyak B. T.* Optimization-based design of fixed-order controllers for command following // Automatica. 2002 (in press).

17. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

18. *Yu J., Sideris A.* Optimal induced l^1-norm state feedback control //Proc. 36th CDC, San-Diego. 1997. P. 1558–1563.

19. *Ogata K.* Modern cotrol engineering. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1990.

20. *Blondel V.* Simultaneous stabilization of linear systems. London: Springer, 1995.