PACS 02.30.Yy

Б. Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук,
М. В. ТОПУНОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОДАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ: УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ

1. Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], посвященной задаче подавления ограниченных внешних возмущений. В ней рассматривался синтез статической обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. При этом задачи анализа и синтеза управления были сведены к эквивалентным условиям в виде линейных матричных неравенств (LMI) и задаче полуопределенного программирования (SDP). В настоящей статье решается та же задача и применяется тот же подход для управления по выходу. При этом используется оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера [2, 3].

В работе [1] дан подробный обзор исследований, посвященных трудной проблеме подавления ограниченных внешних возмущений, и мы не будем здесь его повторять. Это же относится к используемому подходу, основанному на понятии инвариантных эллипсоидов и теории LMI. Отметим лишь, что в работах по LMI [4, 5] рассматривались способы использования наблюдателей для управления по выходу, но не для задач подавления L_∞-ограниченных возмущений. Например, в [5, гл. 8], техника LMI применялась для подавления возмущений, ограниченных в L_2-норме (т.е., убывающих на бесконечности).

По-видимому, наиболее близкой по тематике является работа [6], поэтому подчеркнем различия в полученных результатах. Во-первых, в [6] рассматривается лишь непрерывная задача, тогда как мы анализируем случаи и непрерывного, и дискретного времени. Во-вторых, мы исследуем различные обобщения задачи по сравнению с [6] — случай ненулевых начальных условий, ограниченных управлений, различных критериев оптимальности. В-третьих, нашей целью является систематическое использование техники линейных матричных неравенств и сведение задач к формату полуопределенного программирования, для которого существуют мощные вычислительные средства [7, 8]. Это дает возможность получать численные решения для различных задач (в качестве примера в статье используется задача о двойном осцилляторе).

2. Непрерывная система

Рассмотрим линейную непрерывную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1u + D_1w, \\ y = C_1x + D_2w, \\ z = C_2x + B_2u, \end{cases} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y \in \mathbb{R}^l$, оптимизируемым выходом $z \in \mathbb{R}^r$, управлением $u \in \mathbb{R}^p$

и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:[1]

$$\|w(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Таким образом, мы рассматриваем L_∞-ограниченные внешние возмущения. Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим.

Матрица A не предполагается устойчивой, однако будем считать пару (A, B_1) управляемой, а также $B_2^{\mathrm{T}} C_2 = 0$. Кроме того, будем полагать, что

$$D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0.$$

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Нашей задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z. Эта идеология инвариантных эллипсоидов подробно описана в [1].

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\}, \quad P > 0, \tag{2}$$

называется инвариантным *по переменной x (по состоянию) для динамической системы* (1), *если:*

1) из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$;

2) при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ будет $x(t) \to \mathcal{E}_x$, $t \to \infty$ (при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$).

Другими словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду, а траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида $\mathcal{E}_x$, стремится к эллипсоиду $\mathcal{E}_x$ с течением времени.

Если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид (2), то выход $y = Cx$ при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_y = \{y \in \mathbb{R}^l : \quad y^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} y \leqslant 1\}, \tag{3}$$

а при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ стремится к нему. Этот эллипсоид будем называть ограничивающим по выходу.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В нашем случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы $z(t)$. В этой связи нас будут интересовать минимальные в некотором смысле ограничивающие эллипсоиды по выходу системы.

В качестве целевой функции в данной работе будем рассматривать критерий следа, который соответствует сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида по выходу исходной системы. В качестве критерия можно рассматривать и другие функции, например, объем или наибольшую полуось эллипсоида. Однако, в силу линейности, наиболее прост именно критерий следа. Тем самым, степень влияния L_∞-ограниченных внешних возмущений на выход системы сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида, минимального по критерию следа.

[1]Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, I — единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Отметим, что понятие инвариантного эллипсоида является более полезным и робастным по сравнению с множеством достижимости. В последнем предполагается, что начальные условия — нулевые, однако малое отклонение в начальном условии может привести к тому, что траектория выйдет за пределы множества достижимости. Для инвариантного эллипсоида мы можем учитывать неопределенность в начальном состоянии

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x\colon \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\}, \quad P_0 > 0,$$

требуя, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_x$, т. е.

$$P \geqslant P_0. \tag{4}$$

Если мы непосредственно задаем начальное условие $x(0) \neq 0$, то вместо ограничения (4) на матрицу P добавляется условие

$$x^{\mathrm{T}}(0) P^{-1} x(0) \leqslant 1,$$

очевидным образом представимое в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} I & x^{\mathrm{T}}(0) \\ x(0) & P \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C_1\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + B_1 u + F(y - C_1\widehat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}. \tag{5}$$

Заметим, что для задач фильтрации (т.е. оценки состояний при отсутствии управления) свойства наблюдателя (5) исследованы в [9].

Введем в рассмотрение *невязку* $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$; согласно (1), (5), она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC_1)e + (D_1 - FD_2)w.$$

Таким образом, при построении обратной связи с помощью динамического регулятора $u = K\widehat{x}$ приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + B_1K)\widehat{x} + FC_1 e + FD_2 w, \\ \dot{e} = (A - FC_1)e + (D_1 - FD_2)w. \end{cases}$$

Обратимся к задаче минимизации выхода z системы (1). Имеем:

$$z = C_2 x + B_2 u = C_2(\widehat{x} + e) + B_2K\widehat{x} = (C_2 + B_2K)\widehat{x} + C_2 e = \mathcal{C}g,$$

где $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2K & C_2 \end{pmatrix}$, а $g = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ e \end{pmatrix}$. При этом вектор g является решением дифференциального уравнения

$$\dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + B_1K & FC_1 \\ 0 & A - FC_1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} FD_2 \\ D_1 - FD_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w. \tag{6}$$

Поступим следующим образом: заключим g в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид по выходу z, порожденный матрицей $\mathcal{C}P\mathcal{C}^{\mathrm{T}}$.

Теорема 1. Решение $\widehat{P}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Y}_1$ и $\widehat{Y}_2$ задачи минимизации

$$\mathrm{tr}[C_2(P_1+H)C_2^{\mathrm{T}} + B_2 Z_1 B_2^{\mathrm{T}}] \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} Z+\frac{1}{\alpha}R & Y_2C_1-\frac{1}{\alpha}R & 0 \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\alpha}R & A^{\mathrm{T}}Q_2+Q_2A-Y_2C_1-C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}+\alpha Q_2+\frac{1}{\alpha}R & Q_2D_1 \\ 0 & D_1^{\mathrm{T}}Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2Q_2+Z & I \\ I & -(AP_1+P_1A^{\mathrm{T}}+B_1Y_1+Y_1^{\mathrm{T}}B_1{}^{\mathrm{T}}+\alpha P_1) \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} R & Y_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & I \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P_1 = P_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $R = R^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и числовом параметре $\alpha \in \mathbb{R}$, определяет матрицу $\widehat{\mathcal{C}}\widehat{P}\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{T}}$ ограничивающего эллипсоида по оптимизируемому выходу системы (1), *где*

$$\widehat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} C_2+B_2\widehat{K} & C_2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{Q}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

а также соответствующие этому инвариантному эллипсоиду динамический регулятор

$$\widehat{K} = \widehat{Y}_1\widehat{P}_1^{-1}$$

и матрицу наблюдателя

$$\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}_2.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Отметим, что при фиксированном α данная задача сводится к минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой линейные матричные неравенства, т. е. к задаче полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming, SDP*), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации. Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности, SeDuMi Toolbox и YALMIP Toolbox для системы Matlab [7, 8].

Как следует из структуры матрицы $\widehat{P}$, матрица $\widehat{P}_1$ определяет инвариантный эллипсоид для наблюдателя $\widehat{x}$, а матрица $\widehat{Q}_2^{-1}$ — инвариантный эллипсоид для невязки e.

В рамках данного подхода к подавлению внешних возмущений естественно потребовать введения ограничений на управление. Пусть $u \in \mathbb{R}^p$, $\mu > 0$ и

$$\|u\| \leqslant \mu. \tag{7}$$

Следующая лемма, установленная в [4], сводит ограничение (7) к рассмотрению эквивалентного линейного матричного неравенства.

Л е м м а 1. *Пусть P — матрица инвариантного эллипсоида по состоянию для линейной системы с управлением вида $u = Kx$. Пусть также $Y = KP$. Тогда ограничение* (7) *эквивалентно выполнению для матриц P и Y линейного матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Из леммы 1 с учетом замечания 2 вытекает

С л е д с т в и е. *Для системы* (1) *ограничение* (7) *эквивалентно выполнению для матриц P_1 и Y_1 линейного матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} P_1 & Y_1^{\mathrm{T}} \\ Y_1 & \mu^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0. \qquad (8)$$

Таким образом, при наличии ограничения на управление вида (7), к LMI-условиям теоремы 1 добавляется LMI (8).

3. Управление двойным осциллятором (непрерывный случай)

Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи управления двойным осциллятором, т. е. системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 1).

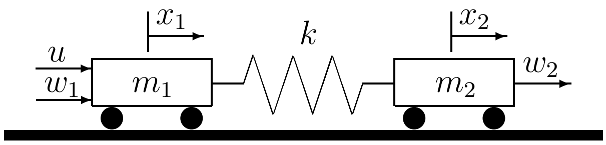

Рис. 1: Двойной осциллятор.

Управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени: $\|w(t)\| \leqslant 1$.

Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + w_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а в качестве минимизируемого выхода системы возьмем вектор

$$z = \begin{pmatrix} u & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

характеризующийся величиной управления и координатой правого тела, на которое непосредственно не воздействует управление.

Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При единичных значениях параметров с помощью теоремы 1 был определен оптимальный регулятор $\widehat{K}$ и матрица наблюдателя $\widehat{F}$, обеспечивающей минимум (по критерию следа) ограничивающего эллипсода по выходу. При этом для численного решения задачи полуопределенного программирования мы использовали SeDuMi Toolbox и YALMIP Toolbox на базе системы Matlab. В результате, для рассматриваемой системы имеем

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -1.5925 & 0.2679 & -1.9023 & -1.3278 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{F} \approx \begin{pmatrix} 1.3747 & 0.0822 \\ 0.2346 & 1.1966 \\ 1.1805 & 0.1155 \\ 0.3140 & 0.5991 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{P}_1 \approx \begin{pmatrix} 45.2779 & 31.0798 & -9.4031 & -19.0728 \\ 31.0798 & 66.1396 & 6.4236 & -12.3619 \\ -9.4031 & 6.4236 & 30.6355 & -13.5222 \\ -19.0728 & -12.3619 & -13.5222 & 32.4699 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.2555 & -0.0894 & -0.0609 & -0.0174 \\ -0.0894 & 0.2434 & -0.0214 & -0.0892 \\ -0.0609 & -0.0214 & 0.1410 & 0.0240 \\ -0.0174 & -0.0892 & 0.0240 & 0.1760 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 изображен минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу. На том же рисунке показана траектория $z(t)$ при некотором выборе начального положения внутри этого эллипсоида и некоторых внешних возмущениях $w(t)$. На рис. 3 представлены графики внешних возмущений $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ и управления $u(t)$.

4. Дискретная система

Рассмотрим дискретную линейную управляемую систему

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_1 u_k + D_1 w_k, \\ y_k = C_1 x_k + D_2 w_k, \\ z_k = C_2 x_k + B_2 u_k, \end{cases} \tag{9}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$, оптимизируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным во все моменты времени:

$$\|w_k\| \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

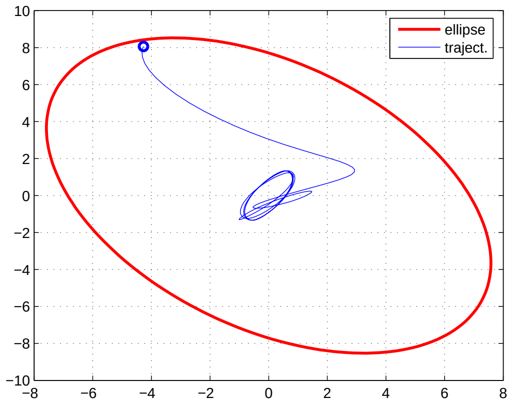

Рис. 2: Ограничивающий эллипсоид по выходу.

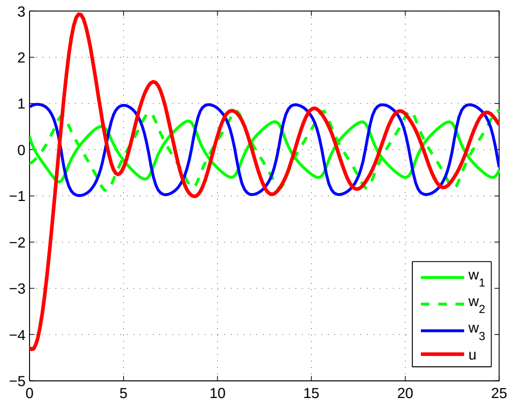

Рис. 3: Возмущения $w^*(t)$ и управление $u(t)$.

Таким образом, мы рассматриваем l_∞-ограниченные внешние возмущения.

Матрица A не предполагается устойчивой, однако будем считать пару (A, B_1) управляемой, а также $B_2^{\mathrm{T}} C_2 = 0$. Кроме того, будем полагать, что[2] $D_1 D_2^{\mathrm{T}} = 0$.

Пусть состояние x_k системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y_k. Нашей задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z_k.

Как и в непрерывном случае, дадим определение инвариантного эллипсоида.

О п р е д е л е н и е 2. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_x = \{x_k \in \mathbb{R}^n : \quad x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k \leqslant 1\}, \quad P > 0, \tag{10}$$

называется инвариантным *по переменной* x_k *(по состоянию) для динамической системы* (1), *если:*

1) из условия $x_0 \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x_k \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $k = 1, 2, \ldots;$

2) при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ *будет* $x_k \to \mathcal{E}_x$, $k \to \infty$ *(при этом, возможно,* $x_k \in \mathcal{E}_x$ *при* $k \geqslant K$ *для некоторого* $K \in \mathbb{N}$*).*

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y_k и его прогноза $C_1 \widehat{x}_k$:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + B_1 u_k + F(y_k - C_1 \widehat{x}_k), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times l}.$$

Введем в рассмотрение невязку $e_k = x_k - \widehat{x}_k$. Она удовлетворяет разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - FC_1)e_k + (D_1 - FD_2)w_k.$$

При построении обратной связи с помощью динамического регулятора $u_k = K\widehat{x}_k$ приходим к системе

$$\begin{cases} \widehat{x}_{k+1} = (A + B_1 K)\widehat{x}_k + FC_1 e_k + FD_2 w_k, \\ e_{k+1} = (A - FC_1)e_k + (D_1 - FD_2)w_k, \end{cases}$$

[2] В отличие от непрерывного случая устанавливаемая ниже теорема 2 будет справедлива, даже если это условие не выполнено.

Обратимся к задаче минимизации выхода z системы (9). Имеем:

$$z_k = C_2x_k + B_2u_k = C_2(\widehat{x}_k + e_k) + B_2K\widehat{x}_k = (C_2 + B_2K)\widehat{x}_k + C_2e_k = \mathcal{C}g_k,$$

где $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2K & C_2 \end{pmatrix}$, а $g_k = \begin{pmatrix} \widehat{x}_k \\ e_k \end{pmatrix}$. При этом вектор g_k является решением разностного уравнения

$$g_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + B_1K & FC_1 \\ 0 & A - FC_1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} g_k + \underbrace{\begin{pmatrix} FD_2 \\ D_1 - FD_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{D}} w_k. \tag{11}$$

Поступим следующим образом: заключим g_k в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad P > 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид по выходу z_k, порожденный матрицей $\mathcal{C}P\mathcal{C}^{\mathrm{T}}$.

Т е о р е м а 2. *Решение $\widehat{P}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Y}_1$ и $\widehat{Y}_2$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^{\mathrm{T}} + B_2Z_1B_2^{\mathrm{T}}] \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} Z & Y_2C_1 & Y_2D_2 \\ C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_1 + C_1^{\mathrm{T}}Z_2C_1 & \Lambda_2 + C_1^{\mathrm{T}}Z_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_2^{\mathrm{T}} + D_2^{\mathrm{T}}Z_2C_1 & \Lambda_3 + D_2^{\mathrm{T}}Z_2D_2 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -\frac{1}{\alpha}(AP_1A^{\mathrm{T}} + B_1Y_1A^{\mathrm{T}} + AY_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + B_1Z_1B_1^{\mathrm{T}}) + P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} Z_2 & Y_2^{\mathrm{T}} \\ Y_2 & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где

$$\Lambda_1 = A^{\mathrm{T}}Q_2A - A^{\mathrm{T}}Y_2C_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}A - \alpha Q_2,$$
$$\Lambda_2 = A^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - A^{\mathrm{T}}Y_2D_2,$$
$$\Lambda_3 = D_1^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - D_1^{\mathrm{T}}Y_2D_2 - (1-\alpha)I,$$

а минимизация проводится по матричным переменным $P_1 = P_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Z_2 = Z_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и числовом параметре $\alpha \in \mathbb{R}$, определяет матрицу $\widehat{\mathcal{C}}\widehat{P}\widehat{\mathcal{C}}^{\mathrm{T}}$ инвариантного эллипсоида по оптимизируемому выходу системы (9), где

$$\widehat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2\widehat{K} & C_2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{Q}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

а также соответствующие этому инвариантному эллипсоиду динамический регулятор

$$\widehat{K} = \widehat{Y}_1\widehat{P}_1^{-1}$$

и матрицу наблюдателя

$$\widehat{F} = \widehat{Q}_2^{-1}\widehat{Y}_2.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Отметим, что при фиксированном α мы, как и в непрерывном случае, получили задачу полуопределенного программирования.

5. Управление двойным осциллятором (дискретный случай)

Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере дискретной задачи управления двойным осциллятором, полученной дискретизацией рассмотренной выше соответствующей непрерывной системы.

Дискретная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_{1d} u_k + D_{1d} w_k, \\ y_k = C_1 x_k + D_2 w_k, \\ z_k = C_2 x_k + B_2 u_k, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_{1d} = \int\limits_0^\Delta e^{sA} B_1\, ds, \quad D_{1d} = \int\limits_0^\Delta e^{sA} D_1\, ds.$$

При единичных параметрах исходной непрерывной системы и $\Delta = 0.1000$ с помощью теоремы 2 был определен оптимальный регулятор $\widehat{K}$ и матрица наблюдателя $\widehat{F}$, обеспечивающей минимум (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида по выходу. При этом для численного решения задачи полуопределенного программирования мы использовали SeDuMi Toolbox и YALMIP Toolbox на базе системы Matlab. В результате, для рассматриваемой системы имеем

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -1.7906 & 0.4197 & -2.0575 & -1.3572 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{F} \approx \begin{pmatrix} 0.4263 & 0.0006 \\ 0.3753 & 0.1042 \\ 0.7814 & 0.0356 \\ 0.0465 & 0.0467 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{P}_1 \approx \begin{pmatrix} 84.0712 & 51.6668 & -15.3474 & -51.6557 \\ 51.6668 & 116.0064 & 31.6849 & -29.1613 \\ -15.3474 & 31.6849 & 64.0205 & -15.5231 \\ -51.6557 & -29.1613 & -15.5231 & 64.2882 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_2 \approx \begin{pmatrix} 4.8560 & -0.0356 & -1.0556 & 0.0637 \\ -0.0356 & 0.4737 & -0.2407 & -0.1773 \\ -1.0556 & -0.2407 & 0.7502 & 0.0496 \\ 0.0637 & -0.1773 & 0.0496 & 0.2895 \end{pmatrix},$$

На рис. 4 изображен минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу. На том же рисунке показана траектория $z(t)$ при некотором выборе начального положения внутри этого эллипсоида и внешних возмущениях

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(x_{1k} + 1.6x_{2k}) \\ \operatorname{sign}(x_{3k} + 1.6x_{4k}) \\ \operatorname{sign}\sin(k/10) \end{pmatrix}.$$

На рис. 5 представлены графики внешних возмущений w_{1k}, w_{2k}, w_{3k} и управления u_k.

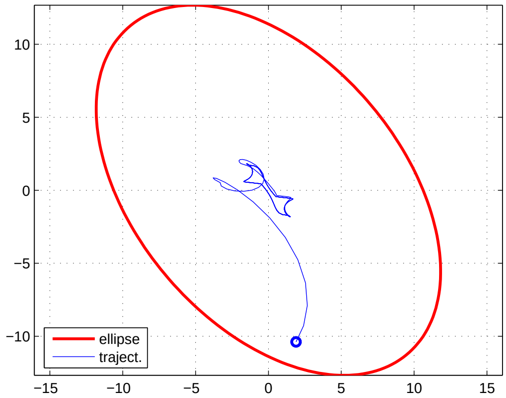

Рис. 4: Ограничивающий эллипсоид по выходу.

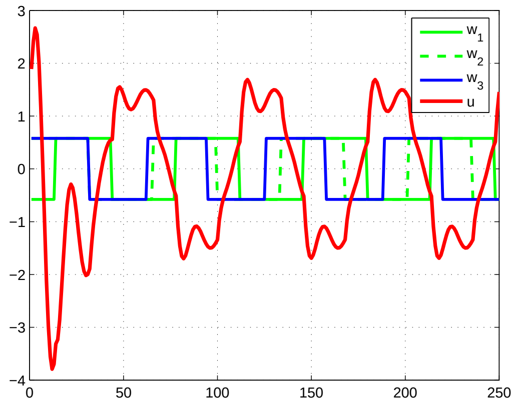

Рис. 5: Возмущения w_k и управление u_k.

6. Заключение

В статье предложен простой и универсальный подход к решению задачи подавления произвольных ограниченных внешних возмущений с помощью линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов, который сводит синтез оптимального регулятора и наблюдателя к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регулятора непосредственно свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации, легко решающихся численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере задачи управления двойным осциллятором.

В равном объеме рассмотрен как непрерывный, так и дискретный случай.

Авторы признательны П. С. Щербакову за полезные обсуждения, замечания и предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Утверждение П.1 (S-процедура). *Пусть заданы однородные квадратичные формы $f_i(x) = x^{\mathrm{T}} A_i x$, $i = 0, 1, \dots, m$, в $\mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Если существуют такие действительные числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, что*

$$A_0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \tau_i \alpha_i, \tag{П.1}$$

то из

$$f_i(x) \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{П.2}$$

следует

$$f_0(x) \leqslant \alpha_0. \tag{П.3}$$

Обратно, если из (П.2) *следует* (П.3) *и выполняется любое из условий*

а) $m = 1$;

б) $m = 2$, $n \geqslant 3$, и существуют такие числа $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ и вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 > 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2,$$

то существуют числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, при которых справедливы неравенства (П.1).

Полное доказательство этого утверждения можно найти в [11].

Л е м м а П.1.
1. Если $\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix} \leqslant 0$ и $D = D^{\mathrm{T}} \leqslant A$, то $\begin{pmatrix} D & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix} \leqslant 0$;
2. Если $\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}DE & B + E^{\mathrm{T}}DF \\ B^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}DE & C + F^{\mathrm{T}}DF \end{pmatrix} \leqslant 0$ и $G = G^{\mathrm{T}} \leqslant D = D^{\mathrm{T}}$, то

$$\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}GE & B + E^{\mathrm{T}}GF \\ B^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}GE & C + F^{\mathrm{T}}GF \end{pmatrix} \leqslant 0;$$

3. Если $\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}DE & B - E^{\mathrm{T}}DF \\ B^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}DE & C + F^{\mathrm{T}}DF \end{pmatrix} \leqslant 0$ и $G = G^{\mathrm{T}} \leqslant D = D^{\mathrm{T}}$, то

$$\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}GE & B - E^{\mathrm{T}}GF \\ B^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}GE & C + F^{\mathrm{T}}GF \end{pmatrix} \leqslant 0;$$

4.

$$Y^{\mathrm{T}} X^{-1} Y \geqslant Y + Y^{\mathrm{T}} - X, \quad X > 0, \tag{П.4}$$

где X — квадратная обратимая матрица, а Y — квадратная матрица соответствующей размерности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Поскольку $D \leqslant A$, то

$$\begin{pmatrix} D & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D - A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

2. Поскольку $G - D \leqslant 0$, то

$$\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}GE & B + E^{\mathrm{T}}GF \\ B^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}GE & C + F^{\mathrm{T}}GF \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}DE & B + E^{\mathrm{T}}DF \\ B^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}DE & C + F^{\mathrm{T}}DF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{T}} \\ F^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (G - D) \begin{pmatrix} E & F \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

3. Поскольку $G - D \leqslant 0$, то

$$\begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}GE & B - E^{\mathrm{T}}GF \\ B^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}GE & C + F^{\mathrm{T}}GF \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A + E^{\mathrm{T}}DE & B - E^{\mathrm{T}}DF \\ B^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}DE & C + F^{\mathrm{T}}DF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{\mathrm{T}} \\ -F^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (G - D) \begin{pmatrix} E & -F \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

4. Поскольку $X > 0$, то

$$(Y - X)^{\mathrm{T}} X^{-1} (Y - X) = Y^{\mathrm{T}} X^{-1} Y - Y - Y^{\mathrm{T}} + X \geqslant 0.$$

Лемма доказана. □

Л е м м а П.2 (об обращении матриц) [10].

$$(X - YZY^{\mathrm{T}})^{-1} = X^{-1} + X^{-1} Y (Z^{-1} - Y^{\mathrm{T}} X^{-1} Y)^{-1} Y^{\mathrm{T}} X^{-1}, \tag{П.5}$$

где X и Z — квадратные обратимые матрицы, Y — матрица соответствующей размерности и матрица $X - YZY^{\mathrm{T}}$ обратима.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение квадратичную функцию

$$V(g) = g^{\mathrm{T}}Qg, \quad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},$$

построенную на решениях уравнения (6). Тогда

$$\dot{V}(g) = (\widetilde{A}g + \widetilde{D}w)^{\mathrm{T}}Qg + g^{\mathrm{T}}Q(\widetilde{A}g + \widetilde{D}w) = g^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}^{\mathrm{T}}Q + Q\widetilde{A})g + 2g^{\mathrm{T}}Q\widetilde{D}w.$$

Чтобы траектории системы (6) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}_g$, потребуем, чтобы при $V(g) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$ выполнялось $\dot{V}(g) \leqslant 0$, т. е. чтобы

$$g^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}^{\mathrm{T}}Q + Q\widetilde{A})g + 2w^{\mathrm{T}}\widetilde{D}^{\mathrm{T}}Qg \leqslant 0, \qquad \forall (g,w): \quad g^{\mathrm{T}}Qg \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1. \tag{П.6}$$

Пусть $s = \begin{pmatrix} g & w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n+m}$ и

$$M_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}Q + Q\widetilde{A} & Q\widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}}Q & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

а также $\widetilde{f}_i(s) = s^{\mathrm{T}}M_is$, $i = 0,1,2$. Тогда (П.6) перепишется в виде

$$\widetilde{f}_0(s) \leqslant 0, \qquad \forall s: \quad \widetilde{f}_1(s) \leqslant -1, \quad \widetilde{f}_2(s) \leqslant 1.$$

Поскольку условия б) в Утверждении П.1 выполняются, то (П.6) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$M_0 \leqslant \alpha M_1 + \beta M_2$$

при некоторых значениях α, β таких, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$, или

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}Q + Q\widetilde{A} + \alpha Q & Q\widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}}Q & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Домножая слева и справа на матрицу $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \widetilde{A}P + \alpha P & \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} & -\beta I \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или, по лемме Шура,

$$P\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \widetilde{A}P + \alpha P + \frac{1}{\beta}\widetilde{D}\widetilde{D}^{\mathrm{T}} \leqslant 0. \tag{П.7}$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P > 0$ эквивалентно выполнению последнего линейного матричного неравенства при некоторых $\alpha \geqslant \beta > 0$. Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, то

$$\beta = \beta_{\max} = \alpha.$$

Неравенство (П.7) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 & FC_1P_2 - \frac{1}{\alpha}FD_2D_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\ (FC_1P_2)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha}FD_2D_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} & \Psi_2 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где

$$\Psi_1 = P_1(A+B_1K)^{\mathrm{T}} + (A+B_1K)P_1 + \alpha P_1 + \frac{1}{\alpha}FD_2D_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi_2 = P_2(A-FC_1)^{\mathrm{T}} + (A-FC_1)P_2 + \alpha P_2 + \frac{1}{\alpha}(D_1D_1^{\mathrm{T}} + FD_2D_2^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}).$$

Домножая его слева и справа на матрицу $\begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ и вводя матричные переменные

$$Y_1 = KP_1, \quad Y_2 = Q_2F,$$

исключаем K и F:

$$\begin{pmatrix} Q_2\Psi_3Q_2 + \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & Y_2C_1 - \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Psi_4 + \frac{1}{\alpha}(Q_2D_1D_1^{\mathrm{T}}Q_2 + Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} Q_2\Psi_3Q_2 + \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & Y_2C_1 - \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Psi_4 + \frac{1}{\alpha}Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & Q_2D_1 \\ 0 & D_1^{\mathrm{T}}Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.8}$$

где

$$\Psi_3 = AP_1 + P_1A^{\mathrm{T}} + B_1Y_1 + Y_1^{\mathrm{T}}B_1{}^{\mathrm{T}} + \alpha P_1,$$

$$\Psi_4 = A^{\mathrm{T}}Q_2 + Q_2A - Y_2C_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2.$$

Введем матричную переменную $R = R^{\mathrm{T}}$. Согласно лемме П.1, если

$$Y_2D_2D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} \leqslant R, \tag{П.9}$$

и

$$\begin{pmatrix} Q_2\Psi_3Q_2 + \frac{1}{\alpha}R & Y_2C_1 - \frac{1}{\alpha}R & 0 \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha}R & \Psi_4 + \frac{1}{\alpha}R & Q_2D_1 \\ 0 & D_1^{\mathrm{T}}Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.10}$$

то будем справедливо и неравенство (П.8). Заметим, что условие (П.9) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} R & Y_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.11}$$

Введем матричную переменную $Z = Z^{\mathrm{T}}$; по лемме П.1, если

$$\begin{pmatrix} Z + \frac{1}{\alpha}R & Y_2C_1 - \frac{1}{\alpha}R & 0 \\ (Y_2C_1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha}R & A^{\mathrm{T}}Q_2 + Q_2A - Y_2C_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} + \alpha Q_2 + \frac{1}{\alpha}R & Q_2D_1 \\ 0 & D_1^{\mathrm{T}}Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.12}$$

и

$$Q_2\Psi_3Q_2 \leqslant Z, \tag{П.13}$$

то выполняется и матричное неравенство (П.10).

Положив

$$X = -\Psi_3^{-1}, \quad Y = Q_2,$$

неравенстве (П.4), получим

$$Q_2 \Psi_3 Q_2 \leqslant -2Q_2 - \Psi_3^{-1}.$$

Таким образом, матричное неравенство (П.13) будет выполняться, если справедливо неравенство

$$-2Q_2 - \Psi_3^{-1} \leqslant Z,$$

которое эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -(AP_1 + P_1 A^{\mathrm{T}} + B_1 Y_1 + Y_1^{\mathrm{T}} B_1{}^{\mathrm{T}} + \alpha P_1) \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.14}$$

При этом

$$\mathcal{C} P \mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2 K & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_2 + B_2 K)^{\mathrm{T}} \\ C_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =$$
$$= (C_2 + B_2 K) P_1 (C_2 + B_2 K)^{\mathrm{T}} + C_2 Q_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} = C_2 (P_1 + Q_2^{-1}) C_2^{\mathrm{T}} + B_2 Y_1 P_1^{-1} Y_1^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы свести задачу к минимизации линейной функции, введем новые матричные переменные. Введем матричную переменную $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}}$, такую, что $Z_1 \geqslant Y_1 P_1^{-1} Y_1^{\mathrm{T}}$; последнее матричное неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.15}$$

Введем матричную переменную $H = H^{\mathrm{T}}$, такую, что $Q_2^{-1} \leqslant H$; последнее матричное неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.16}$$

В результате мы пришли к задаче минимизации

$$\mathrm{tr}[C_2 (P_1 + H) C_2^{\mathrm{T}} + B_2 Z_1 B_2^{\mathrm{T}}] \to \min$$

при ограничениях (П.11) (П.12), (П.14), (П.15), (П.16). Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение квадратичную функцию

$$V(g_k) = g_k^{\mathrm{T}} Q g_k, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях системы (11). Тогда

$$V(g_{k+1}) = (\widetilde{A} g_k + \widetilde{D} w_k)^{\mathrm{T}} Q (\widetilde{A} g_k + \widetilde{D} w_k) = g_k^{\mathrm{T}} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} g_k + w_k^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} w_k + 2 w_k^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} g_k.$$

Чтобы траектории системы (9) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}_g$, потребуем, чтобы при $V(g_k) \leqslant 1$ выполнялось $V(g_{k+1}) \leqslant 1$, т. е.

$$g^{\mathrm{T}} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} g + 2 w^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} g + w^{\mathrm{T}} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} w \leqslant 1, \qquad \forall (g, w): \quad g^{\mathrm{T}} Q g \leqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1. \tag{П.17}$$

Пусть $s = \begin{pmatrix} g & w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n+m}$,

$$M_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} & \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} & \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

и $\widetilde{f}_i(s) = s^{\mathrm{T}} M_i s$, $i = 0, 1, 2$. Тогда (П.17) перепишется в виде

$$\widetilde{f}_0(s) \leqslant 1, \qquad \forall s: \quad \widetilde{f}_1(s) \leqslant 1, \quad \widetilde{f}_2(s) \leqslant 1.$$

Согласно Утверждению П.1, условие (П.17) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} - \alpha Q & \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} \\ \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} & \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} - \beta I \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{П.18}$$

при некоторых значениях $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta \leqslant 1$.

С использованием леммы Шура неравенство (П.18) перепишется в виде

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A} - \alpha Q \leqslant \widetilde{A}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} (\widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} - \beta I)^{-1} \widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{A}.$$

Поскольку нас интересуют *минимальные* эллипсоиды, то есть — с наибольшей матрицей Q, а, с другой стороны, должно быть $\widetilde{D}^{\mathrm{T}} Q \widetilde{D} - \beta I \leqslant 0$, то

$$\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha.$$

С учетом этого, запишем неравенство (П.18) в виде

$$\begin{pmatrix} (A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) - \alpha Q_1 & (A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 F C_1 & (A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 F D_2 \\ (FC_1)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) & \Psi_1 & \Psi_2 \\ (FD_2)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) & \Psi_2^{\mathrm{T}} & \Psi_3 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где

$$\Psi_1 = (FC_1)^{\mathrm{T}} Q_1 F C_1 + (A - FC_1)^{\mathrm{T}} Q_2 (A - FC_1) - \alpha Q_2,$$
$$\Psi_2 = (FC_1)^{\mathrm{T}} Q_1 F D_2 + (A - FC_1)^{\mathrm{T}} Q_2 (D_1 - FD_2),$$
$$\Psi_3 = (FD_2)^{\mathrm{T}} Q_1 F D_2 + (D_1 - FD_2)^{\mathrm{T}} Q_2 (D_1 - FD_2) - (1 - \alpha) I.$$

Применяя лемму Шура, получаем

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (FC_1)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) \\ (FD_2)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) \end{pmatrix} \left((A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 (A + B_1 K) - \alpha Q_1 \right)^{-1} \times$$
$$\times \left((A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 F C_1 \quad (A + B_1K)^{\mathrm{T}} Q_1 F D_2 \right) \leqslant 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} (A - FC_1)^{\mathrm{T}} Q_2 (A - FC_1) - \alpha Q_2 & (A - FC_1)^{\mathrm{T}} Q_2 (D_1 - FD_2) \\ (D_1 - FD_2)^{\mathrm{T}} Q_2 (A - FC_1) & (D_1 - FD_2)^{\mathrm{T}} Q_2 (D_1 - FD_2) - (1 - \alpha) I \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} (FC_1)^{\mathrm{T}} \\ (FD_2)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} W^{-1} \begin{pmatrix} FC & FD_2 \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где
$$W^{-1} = -Q_1 + Q_1(A+B_1K)\big((A+B_1K)^{\mathrm{T}}Q_1(A+B_1K)-\alpha Q_1\big)^{-1}(A+B_1K)^{\mathrm{T}}Q_1.$$

Применяя лемму П.2 об обращении матриц при
$$X = Q_1^{-1} = P_1, \quad Y = A+B_1K, \quad Z = (\alpha Q_1)^{-1} = \frac{1}{\alpha}P_1,$$
получаем
$$W^{-1} = \Big(\frac{1}{\alpha}(A+B_1K)P_1(A+B_1K)^{\mathrm{T}} - P_1\Big)^{-1}.$$

Далее, по лемме Шура
$$\begin{pmatrix} W & FC_1 & FD_2 \\ (FC_1)^{\mathrm{T}} & (A-FC_1)^{\mathrm{T}}Q_2(A-FC_1)-\alpha Q_2 & (A-FC_1)^{\mathrm{T}}Q_2(D_1-FD_2) \\ (FD_2)^{\mathrm{T}} & (D_1-FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2(A-FC_1) & (D_1-FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2(D_1-FD_2)-(1-\alpha)I \end{pmatrix} \leqslant 0$$
или
$$\begin{pmatrix} Q_2WQ_2 & Q_2FC_1 & Q_2FD_2 \\ (FC_1)^{\mathrm{T}}Q_2 & (A-FC_1)^{\mathrm{T}}Q_2(A-FC_1)-\alpha Q_2 & (A-FC_1)^{\mathrm{T}}Q_2(D_1-FD_2) \\ (FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2 & (D_1-FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2(A-FC_1) & (D_1-FD_2)^{\mathrm{T}}Q_2(D_1-FD_2)-(1-\alpha)I \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Вводя матричные переменные
$$Y_1 = KP_1, \quad Y_2 = Q_2F,$$
исключаем K и F. При этом выражение $KQ_2K^{\mathrm{T}} = Y_1P_1^{-1}Y_1^{\mathrm{T}}$ оценим следующим образом. Введем матричную переменную $Z_1 = Z_1^{\mathrm{T}}$; поскольку $P_1 > 0$, то $Z_1 \geqslant Y_1P_1^{-1}Y_1^{\mathrm{T}}$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^{\mathrm{T}} & P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.19}$$

В результате приходим к матричному неравенству
$$\begin{pmatrix} Q_2\Omega Q_2 & Y_2C_1 & Y_2D_2 \\ C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_1 + C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}Y_2C_1 & \Lambda_2 + C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}Y_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_2^{\mathrm{T}} + D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}Y_2C_1 & \Lambda_3 + D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}Y_2D_2 \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{П.20}$$
где
$$\Omega = \frac{1}{\alpha}(AP_1A^{\mathrm{T}} + B_1Y_1A^{\mathrm{T}} + AY_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + B_1Z_1B_1^{\mathrm{T}}) - P_1,$$
$$\Lambda_1 = A^{\mathrm{T}}Q_2A - A^{\mathrm{T}}Y_2C_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}A - \alpha Q_2,$$
$$\Lambda_2 = A^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - A^{\mathrm{T}}Y_2D_2,$$
$$\Lambda_3 = D_1^{\mathrm{T}}Q_2D_1 - D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}}D_1 - D_1^{\mathrm{T}}Y_2D_2 - (1-\alpha)I.$$

По лемме П.1, если
$$Y_2^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}Y_2 \leqslant Z_2, \quad Z_2 = Z_2^{\mathrm{T}}, \tag{П.21}$$
и
$$\begin{pmatrix} Q_2\Omega Q_2 & Y_2C_1 & Y_2D_2 \\ C_1^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_1 + C_1^{\mathrm{T}}Z_2C_1 & \Lambda_2 + C_1^{\mathrm{T}}Z_2D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_2^{\mathrm{T}} + D_2^{\mathrm{T}}Z_2C_1 & \Lambda_3 + D_2^{\mathrm{T}}Z_2D_2 \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.22}$$

то будет справедливо и неравенство (П.20). Заметим, что, поскольку $Q_2 > 0$, неравенство (П.21) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} Z_2 & Y_2^{\mathrm{T}} \\ Y_2 & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.23}$$

Введем матричную переменную $Z = Z^{\mathrm{T}}$; по лемме П.1, если

$$\begin{pmatrix} Z & Y_2 C_1 & Y_2 D_2 \\ C_1^{\mathrm{T}} Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_1 + C_1^{\mathrm{T}} Z_2 C_1 & \Lambda_2 + C_1^{\mathrm{T}} Z_2 D_2 \\ D_2^{\mathrm{T}} Y_2^{\mathrm{T}} & \Lambda_2^{\mathrm{T}} + D_2^{\mathrm{T}} Z_2 C_1 & \Lambda_3 + D_2^{\mathrm{T}} Z_2 D_2 \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.24}$$

и

$$Q_2 \Omega Q_2 \leqslant Z, \tag{П.25}$$

то выполняется и матричное неравенство (П.22).

Положив

$$X = -\Omega^{-1}, \quad Y = Q_2,$$

в неравенстве (П.4), получим

$$Q_2 \Omega Q_2 \leqslant -2Q_2 - \Omega^{-1}.$$

Таким образом, матричное неравенство (П.25) будет выполняться, если справедливо неравенство

$$-2Q_2 - \Omega^{-1} \leqslant Z,$$

которое эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} 2Q_2 + Z & I \\ I & -\frac{1}{\alpha}(AP_1A^{\mathrm{T}} + B_1Y_1A^{\mathrm{T}} + AY_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + B_1Z_1B_1^{\mathrm{T}}) + P_1 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.26}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{C}P\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} C_2 + B_2K & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_2 + B_2K)^{\mathrm{T}} \\ C_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \\ = (C_2 + B_2K)P_1(C_2 + B_2K)^{\mathrm{T}} + C_2P_2C_2^{\mathrm{T}} = \\ = C_2P_1C_2^{\mathrm{T}} + C_2P_2C_2^{\mathrm{T}} + B_2KP_1K^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} = C_2(P_1 + P_2)C_2^{\mathrm{T}} + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Чтобы свести задачу к минимизации линейной функции, введем матричную переменную $H = H^{\mathrm{T}}$, такую, что $P_2 = Q_2^{-1} \leqslant H$. Последнее матричное неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{П.27}$$

В результате приходим к задаче минимизации

$$\mathrm{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^{\mathrm{T}} + B_2Z_1B_2^{\mathrm{T}}] \to \min$$

при ограничениях (П.19), (П.23), (П.26), (П.24), (П.27). Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. №3. С. 106–125.

2. *Luenberger D. G.* An introduction to observers // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. Vol. 35. P. 596–602.

3. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

4. *Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.

5. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

6. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // International Journal on Robust and Nonlinear Control. 1996. Vol. 6. P. 899–927.

7. *Чурилов А. Н., Гессен А. В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

8. *Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н.* Matlab 7 в подлиннике. — СПб: БХВ-Петербург, 2005.

9. *Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады РАН (в печати).

10. *Golub G. H., van Loan C. F.* Matrix computations. — Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1983.

11. *Polyak B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journ. Optim. Theory and Appl. 1998. Vol. 99. P. 553–583.