ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 418, № 6, с. 749–753

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕСЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

© 2008 г. Б. Т. Поляк, М. В. Топунов

Представлено академиком А.Б. Куржанским 23.07.2007 г.

Поступило 08.10.2007 г.

1. Задача фильтрации (т.е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить гарантированные (а не вероятностные) оценки состояний. Такой подход был предложен в конце 1960-х–начале 1970-х годов в работах американских ученых Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе [1]. Примерно в то же время подобные проблемы разрабатывались в семинаре Н.Н. Красовского такими исследователями, как А.Б. Куржанский, А.И. Субботин, Ю.С. Осипов и др. (см. [2]). Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф.Л. Черноусько [3]. В частности, в работах [1–3] была развита эллипсоидальная техника фильтрации. Обзор результатов в этой области можно найти в [4–8].

В настоящем сообщении также рассматривается проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями. Мы ограничиваемся лишь стационарными задачами, когда все параметры модели не зависят от времени. Более того, мы ищем оценку состояния, такую, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид (инвариантный эллипсоид) для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной. Сам фильтр также ищется в классе линейных стационарных фильтров. В этом суженном классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т.е. удается построить оптимальный фильтр и оценку состояния. Этим данная постановка задачи отличается от упомянутых выше; там рассматривались более общие модели, однако получаемое решение было лишь субоптимальным, а равномерности оценок не было.

С технической точки зрения мы применяем аппарат линейных матричных неравенств [9, 10], который хорошо зарекомендовал себя в анализе и синтезе систем управления, но не очень широко применялся в задачах фильтрации. Исключением может служить работа [11]. По сравнению с ней мы, во-первых, даем более простые и точные оценки качества фильтрации; во-вторых, обобщаем их на дискретный случай; в-третьих, исследуем поведение оценок при больших начальных уклонениях. Важным новым техническим инструментом является S-теорема для двух ограничений [12], тогда как раньше применялась эта же теорема для одного ограничения.

2. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением (шумом) $w \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени[1]: $\|w(t)\| \le 1$, $\forall t \ge 0$. Таким образом, мы рассматриваем L_∞-ограниченные внешние возмущения. Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что пара (A, D) управляема, а $D_1 D_2^T = 0$.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния $\hat{x}$, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\hat{x}$:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + F(y - C\hat{x}), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}. \tag{2}$$

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

[1] Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, I – единичная матрица соответствующей размерности, а матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее – он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица F. Эта структура такая же, как в известном наблюдателе Люенбергера. Введем в рассмотрение невязку $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, характеризующую точность фильтрации; согласно (1), (2), она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - FC)e + (D_1 - FD_2)w. \tag{3}$$

Нашей задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку e. Идеология инвариантных эллипсоидов для задач анализа и синтеза систем управления применялась в [9, 13, 11, 14]. Здесь она используется для задач фильтрации. Мы несколько изменяем стандартное определение, чтобы включить случай больших начальных уклонений. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathscr{E} = \{e \in \mathbb{R}^n: e^T P^{-1} e \le 1\}, \quad P > 0, \tag{4}$$

называется инвариантным для динамической системы (3), если: 1) из условия $e(0) \in \mathscr{E}$ (малые уклонения) следует $e(t) \in \mathscr{E}$ для всех моментов времени $t \ge 0$; 2) при $e(0) \notin \mathscr{E}$ (большие уклонения) будет $e(t) \to \mathscr{E}$, $t \to \infty$ (при этом, возможно, $e(t) \in \mathscr{E}$ при $t \ge T$ для некоторого $T > 0$). Таким образом, мы оцениваем асимптотическую (а при малых уклонениях и равномерную по t) точность фильтрации.

Прежде всего отметим, что из условия управляемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида. Инвариантных эллипсоидов много, наша цель (при фиксированном стабилизирующем F) найти минимальный из них, а затем добиться минимума этого эллипсоида по F. Минимальность можно понимать в разных смыслах, нам удобно считать тот эллипсоид минимальным, у которого сумма квадратов полуосей наименьшая, т.е. такой, для которого след матрицы P минимален. Другие критерии будут упомянуты ниже.

Теорема 1. *Решение $\hat{Q}$ и $\hat{Y}$ задачи минимизации*

$$\operatorname{tr} H \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ (QD_1 - YD_2)^T & -\alpha I \end{pmatrix} \le 0, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \ge 0, \tag{6}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$ и $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и числовому параметру $\alpha > 0$, *определяет матрицу $\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$ минимального инвариантного эллипсоида, а также соответствующую этому эллипсоиду матрицу фильтра*

$$\hat{F} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V(e) = e^T Q e$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q > 0$, построенную на решениях уравнения (3). Тогда $\dot{V}(e) = ((A - FC)e + (D_1 - FD_2)w)^T Qe + e^T Q((A - FC)e + (D_1 - FD_2)w) = e^T((A - FC)^T Q + Q(A - FC))e + 2e^T Q(D_1 - FD_2)w$. Чтобы траектории системы (3) не вышли за границу эллипсоида $\mathscr{E}$ при $e(0) \in \mathscr{E}$, потребуем, чтобы при $V(e) \ge 1$ и $w^T w \le 1$ выполнялось $\dot{V}(e) \le 0$ (это же условие гарантирует, что $V(e)$ монотонно убывает при $V(e) \le 1$, т.е. выполняется и второе свойство инвариантного эллипсоида). Итак

$$\begin{gathered} e^T((A - FC)^T Q + Q(A - FC))e + \\ + 2w^T(D_1 - FD_2)^T Qe \le 0, \\ \forall (e, w): e^T Qe \ge 1, \quad w^T w \le 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Пусть

$$s = \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} (A - FC)^T Q + Q(A - FC) & Q(D_1 - FD_2) \\ (D_1 - FD_2)^T Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

а также $\tilde{f}_i(s) = s^T M_i s$, $i = 0, 1, 2$. Тогда (7) перепишется в виде $\tilde{f}_0(s) \le 0$, $\forall s$: $\tilde{f}_1(s) \le -1$, $\tilde{f}_2(s) \le 1$. Применим теперь S-теорему для двух квадратичных форм [12], тогда (7) эквивалентно линейному матричному неравенству $M_0 \le \alpha M_1 + \beta M_2$ при некоторых значениях α, β, таких, что $\alpha \ge \beta \ge 0$, или

$$\begin{pmatrix} (A - FC)^T Q + Q(A - FC) + \alpha Q & Q(D_1 - FD_2) \\ (D_1 - FD_2)^T Q & -\beta I \end{pmatrix} \le 0.$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P = Q^{-1} > 0$ эквивалентно выполнению последнего линейного матричного неравенства при некоторых $\alpha \ge \beta > 0$. Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, то $\beta = \beta_{\max} = \alpha$. Вводя матричную переменную $Y = QF$, исключая F, приходим к (5). Чтобы свести задачу минимизации $\mathrm{tr}Q^{-1}$ к линейной, введем матрицу $H = H^T$, такую, что $Q^{-1} \le H$; последнее неравенство эквивалентно (6). В результате мы пришли к задаче минимизации $\mathrm{tr}H \to \min$ при ограничениях (5), (6).

Отметим, что при фиксированном α данная задача сводится к минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой линейные матричные неравенства, т.е. к задаче полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации. Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности SeDuMi Toolbox, YALMIP Toolbox, а также LMI Toolbox системы MATLAB [15]. Одномерная минимизация по α всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта остается открытой задачей.

3. Рассмотрим линейную дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned} \tag{8}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным во все моменты времени: $\|w_k\| \le 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, мы рассматриваем l_∞-ограниченные шумы. Будем полагать, что пара (A, D_1) управляема, а $D_1 D_2^T = 0$.

Построим фильтр, описываемый линейным уравнением с постоянной матрицей F относительно оценки состояния $\hat{x}_k$:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + F(y_k - C\hat{x}_k), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times l}.$$

Введем в рассмотрение невязку $e_k = x_k - \hat{x}_k$. Она удовлетворяет разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - FC)e_k + (D_1 - FD_2)w_k. \tag{9}$$

Нашей задачей является нахождение такой матрицы F, которая обеспечивает минимальность инвариантного эллипсоида, содержащего невязку e_k. Определение инвариантного эллипсоида остается по существу таким же, как и в непрерывном случае: эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{e_k \in \mathbb{R}^n \colon e_k^T P^{-1} e_k \le 1\}, \quad P > 0, \tag{10}$$

называется инвариантным для дискретной системы (9), если из условия $e_0 \in \mathcal{E}$ (малые уклонения) следует выполнение условия $e_k \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \ldots$, а из $e_0 \notin \mathcal{E}$ (большие уклонения) следует $e_k \to \mathcal{E}$, $k \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Решение $\hat{Q}$ и $\hat{Y}$ задачи минимизации*

$$\mathrm{tr}H \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2^T & \Psi_3 \end{pmatrix} \le 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y^T \\ Y & Q \end{pmatrix} \ge 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \ge 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A^TQA - A^TYC - C^TY^TA + C^TZC - \alpha Q, \\ \Psi_2 &= A^TQD_1 - C^TY^TD_1 - A^TYD_2 + C^TZD_2, \\ \Psi_3 &= D_1^TQD_1 - D_2^TY^TD_1 - D_1^TYD_2 + \\ &+ D_2^TZD_2 - (1-\alpha)I, \end{aligned}$$

а минимизация проводится по матричным переменным $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и числовому параметру $\alpha > 0$, определяет матрицу $\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$ минимального инвариантного эллипсоида для невязки системы (8), *а также соответствующий этому фильтр*

$$\hat{F} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о остается по существу таким же, как в непрерывном случае. Отметим лишь некоторые различия. Для функции Ляпунова

$$V(e_k) = e_k^TQe_k, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q > 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} V(e_{k+1}) &= ((A-FC)e_k + (D_1 - FD_2)w_k)^T \times \\ &\times Q((A-FC)e_k + (D_1 - FD_2)w_k) = \\ &= e_k^T(A-FC)^TQ(A-FC)e_k + \\ &+ w_k^T(D_1 - FD_2)^TQ(D_1 - FD_2)w_k + \\ &+ 2w_k^T(D_1 - FD_2)^TQ(A-FC)e_k. \end{aligned}$$

Чтобы траектории системы (9) не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}$ при $e_0 \in \mathcal{E}$, потребуем, чтобы при $V(e_k) \le 1$ выполнялось $V(e_{k+1}) \le 1$. После некоторых преобразований с использованием леммы Шура и S-теоремы это условие эквивалентно

$$\begin{aligned} (A-FC)^TQ(A-FC) - \alpha Q \le (A-FC)^TQ(D_1 - \\ - FD_2)((D_1 - FD_2)^TQ(D_1 - FD_2) - \beta I)^{-1} \times \\ \times (D_1 - FD_2)^TQ(A-FC). \end{aligned}$$

Отметим, что к тому же неравенству мы придем, если исходить из второго свойства инвариантного

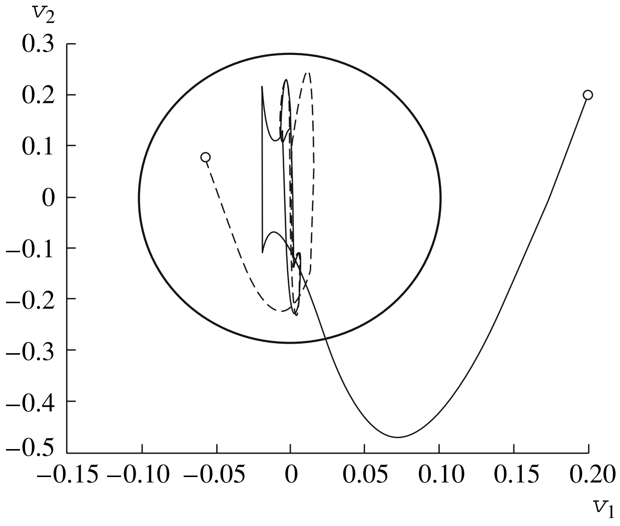

Рис. 1. Оценка (эллипс) и траектории невязок.

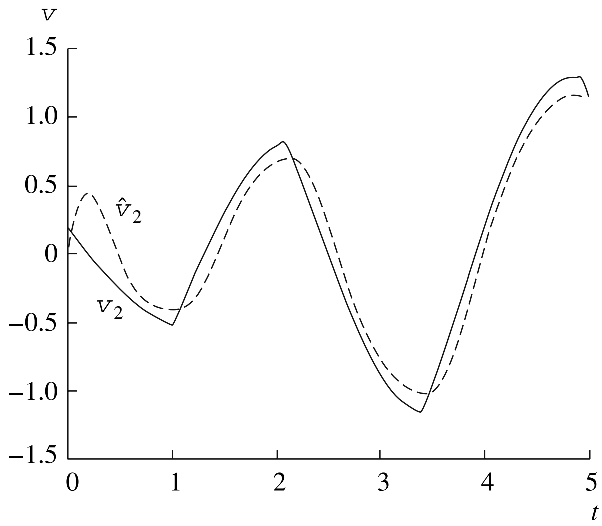

Рис. 2. Фильтрация координаты v_2.

эллипсоида, которое записывается в виде $V(e_{k+1}) \le V(e_k)$ при $V(e_k) \ge 1$. Дальнейшие выкладки аналогичны приведенным для непрерывного случая.

4. В о з м о ж н ы е о б о б щ е н и я. В некоторых случаях мы обладаем априорной информацией о начальном состоянии системы $x(0) \in E_0$, где $E_0 = \{x\colon x^T P_0^{-1} x \le 1\}$. Тогда, выбирая $\hat{x}(0) = 0$, мы можем гарантировать, что $e(0) \in E_0$. Если потребовать, чтобы $E_0 \subset \mathcal{E}$, то мы гарантируем, что $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех t. Итак, если к системе линейных матричных неравенств в теореме 1 добавить еще одно $Q \le P_0^{-1}$, то мы получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности фильтрации.

Нередко нам нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния x, а лишь некоторых. Пусть имеется выход $y_1 = C_1 x$ (например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки $e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x})$ возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации $\mathrm{tr} C_1 P C_1^T$ вместо $\mathrm{tr} P$, что легко может быть записано в форме, аналогичной теоремам 1 и 2.

Отметим также, что можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, мы можем минимизировать L_∞-норму невязки (как это сделано в [11]), т.е. радиус шара, содержащего эллипсоид $\mathcal{E}$. Для этого потребуем, чтобы $r \to \max$ при дополнительном ограничении $Q \ge rI$.

Наконец, можно рассмотреть робастные варианты задачи, когда описание системы содержит неопределенности (т.е. матрицы A, D включают ограниченные неопределенности). Проблема заключается в построении фильтра и гарантированных оценок его точности, справедливых при любых допустимых неопределенностях. Эта задача разрешима с использованием той же техники, что и выше.

5. Продемонстрируем предложенный подход к фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния линеаризованного двойного маятника, движущегося в вязкой среде. Вектор состояния системы выберем в форме $x = (x_1^T\ x_2^T\ v_1^T\ v_2^T)^T$, где x_1, x_2 – координаты “верхнего” и “нижнего” грузиков, а v_1, v_2 – их скорости. Пусть наблюдаемый выход системы имеет вид $y = (x_1^T\ x_2^T)^T$, а минимизируемый выход $y_1 = (v_1^T\ v_2^T)^T$. Будем полагать, что на скорость нижнего грузика влияет внешнее возмущение w. При единичных параметрах системы и коэффициенте сопротивления среды 0.2 получаем линейные уравнения движения. Полагая $P_0 = 0.01I$, решая задачу SDP с помощью пакетов YALMIP и SeDuMi и минимизируя по α, находим матрицы фильтра $\hat{F}$ и инвариантного эллипсоида $\hat{P}$, обеспечивающего минимум эллипса, содержащего невязку e_1. На рис. 1 изображен этот эллипс, а также две траектории $e_1(t)$ (для больших и малых уклонений). В качестве возмущения выбиралось локально наихудшее – то возмущение, которое максимизирует $\dot{V}(e)$ при заданном e. Оно задается формулой $w^* = \dfrac{D^T \hat{P}^{-1} e}{\|D^T \hat{P}^{-1} e\|}$. На рис. 2 показаны траектории $v_2(t)$ (сплошная линия) и $\hat{v}_2(t)$ (штриховая). Видно, что точность фильтрации весьма высока (для координаты $v_1(t)$ она еще выше).

6. В работе предложен простой и универсальный подход к решению задачи фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов; применение этой концепции позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к задачам полуопределенного программирования и одномерной минимизации, легко решаемых численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного маятника.

Авторы признательны П.С. Щербакову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice Hall, 1973.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.
5. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: Гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006.
6. *Фурасов В.Д.* Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005.
7. *Овсеевич А.И., Тарабанько Ю.В.* // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 33–44.
8. Set-membership Modelling of Uncertainty in Dynamical Systems. Spec. Iss. // Math. and Comput. Modelling of Dyn. Systems. F. Chernousko, B. Polyak Eds. 2005. V. 11. № 2.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
10. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
11. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* // Intern. J. Robust and Nonlin. Control. 1996. V. 6. P. 899–927.
12. *Polyak B.T.* // J. Optim. Theory and Appl. 1998. V. 99. P. 553–583.
13. *Blanchini F.* // Automatica. 1999. V. 35. P. 1747–1767.
14. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
15. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 2004.