

© 2010 г. А. Е. ПОЛЯКОВ, канд. физ.-мат. наук  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## О ПРАКТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С РЕЛЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассмотрены задачи локальной и полуглобальной практической стабилизации линейных объектов в условиях неопределенности посредством релейного управления с неизвестным запаздыванием. Указаны необходимые и достаточные условия существования, а также алгоритмы синтеза стабилизирующего управления. В качестве численного примера предложена задача стабилизации перевернутого маятника, управляемого маховиком.

### 1. Введение

Релейные автоматические системы широко применяются в различных областях техники. Они отличаются простотой, эффективностью, экономичностью, а в ряде случаев и лучшими динамическими характеристиками [1, 2]. На практике релейной природой (или, по крайней мере, близкой к релейной) могут обладать как измерительные, так и исполнительные элементы системы управления. Например, в системе контроля выхлопных газов автомобильного двигателя  $\lambda$ -датчик имеет характеристику, близкую к релейной, и фактически для измерения доступен только знак регулируемой величины [3]. В большинстве же цифровых систем управления электродвигателем, напротив, состояние системы может быть измерено (или идентифицировано) с достаточной точностью, в то время как контроллер является релейным [4]. В зависимости от того, какие устройства (исполнительные и/или измерительные) содержат релейные элементы, существенно изменяется стратегия управления.

Практически во всех системах автоматического управления присутствует время запаздывания, которое очень часто нельзя игнорировать, ибо на практике оно приводит к возникновению автоколебаний [4], потере точности, а в ряде случаев и потере устойчивости [5]. Последнее особенно характерно для релейных систем с запаздыванием [6].

Компенсация запаздывания и адаптивное управление колебаниями являются сегодня двумя основными подходами к преодолению проблемы запаздывания в релейных системах управления. В [7–9] предложены алгоритмы синтеза скользящего управления, основанные на использовании предикторного метода для компенсации запаздывания. Следует отметить, что полученные контроллеры не позволяют реализовать скользящий режим в пространстве состояний системы [10]. Они гарантируют скользящее движение лишь в пространстве предикторных переменных [9] и не позволяют оценить реальные колебания системы, вызванные неопределенностями.

Методы релейного управления колебаниями изложены в [11–13]. Они требуют, чтобы каждый релейный вход имел конечное или счетное число значений. Данное свойство очевидно не выполняется для традиционных релейных систем типа “включено–выключено”. Кроме того, все существующие релейные алгоритмы управления колебаниями разработаны для весьма ограниченного класса объектов управления (фактически только для систем 1-го и 2-го порядков).

В то же время методы релейного управления колебаниями системы обладают двумя весьма важными практическими достоинствами: они робастны по отноше-

нию к переменному запаздыванию и позволяют легко получить явные оценки на точность управления, область притяжения и время переходного процесса. Данное исследование вызвано необходимостью обобщения методов релейного управления колебаниями на общий класс систем автоматического регулирования с релейными входами типа “включено–выключено”.

## 2. Постановка задачи и основные обозначения

### 2.1. Описание системы

Рассматривается система управления с запаздыванием

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(x(t-h(t))) + f(t, x(t)),$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния, матрица системы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  может быть *неустойчивой*,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матрица коэффициентов усиления,  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор управления,  $h(t)$  – время запаздывания, неизвестная функция  $f(t, x(t))$  характеризует неопределенности системы.

Считается, что весь вектор состояния доступен для измерения с *неизвестным, но ограниченным запаздыванием* по времени  $h(t)$ ,

$$(2) \quad 0 \leq h(t) \leq h_0,$$

где значение  $h_0$  известно. Система (1) рассматривается вместе с начальными условиями вида

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{для } t \in [-h_0, 0],$$

где  $\varphi(t)$  – произвольная функция времени.

Управление  $u(\cdot)$  в системе (1) считается *релейным*:

$$(3) \quad u(\cdot) = (-p_1 \text{sign}[S_1(\cdot)], \dots, -p_m \text{sign}[S_m(\cdot)])^T,$$

где положительные *параметры*  $p_i > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и *линейные* отображения  $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) следует задать при синтезе управления. Оператор  $\text{sign}[\cdot]$  определен в виде

$$(4) \quad \text{sign}[z] := \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0, \\ -1, & \text{если } z < 0, \\ \in [-1, 1], & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

здесь  $\in [-1, 1]$  означает, что  $\text{sign}[z]$  при  $z = 0$  принимает некоторое значение из данного интервала.

Считается, что пара  $\{A, B\}$  является полностью управляемой, возмущения действуют в том же подпространстве, что и управление, т.е. выполнено условие согласованности

$$(5) \quad f(t, x(t)) = B\gamma(t, x(t)),$$

где неизвестная функция  $\gamma(t, x(t))$  предполагается ограниченной известными константами  $k_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$(6) \quad |\gamma_i(t, x)| \leq k_i \quad \text{для } \forall t \geq 0 \quad \text{и} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

а матрица  $B$  имеет полный ранг и допускает представление

$$(7) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

где  $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\det(B_2) \neq 0$ .

Дополнительно будем предполагать, что матрица системы имеет ограничение на мнимую часть спектра:

$$(8) \quad h_0 \operatorname{Im}(\operatorname{spec}(A)) < \frac{\pi}{3},$$

где  $\operatorname{spec}(A)$  – спектр матрицы  $A$ .

## 2.2. Определения практической стабилизации и постановка задачи

Как уже отмечалось, все существующие алгоритмы управления для релейных систем с неопределенностями не могут обеспечить устойчивость системы в классическом смысле. Они доставляют лишь некоторую практическую устойчивость, такую как, например, сходимостью в зону. В настоящей работе будем иметь дело с двумя специальными видами практической устойчивости (стабилизации), которые характерны для релейных систем.

*Определение 1.* Система (1) называется  $\varepsilon$ -стабилизируемой, если для заданного  $\varepsilon > 0$  найдутся управление  $u(\cdot)$  вида (3) и число  $\delta > 0$ , такие что всякое решение  $x_\varphi(t)$  системы (1) с начальной функцией  $\varphi(t) : \|\varphi(0)\| < \delta$  ограничено

$$\|x_\varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Другими словами, система (1) является  $\varepsilon$ -устойчивой, если построенное управление удерживает любое решение данной системы в заданной  $\varepsilon$ -окрестности нуля. Данный вид устойчивости характерен для релейных систем с запаздыванием [6] и существенно отличается от классической устойчивости по Ляпунову, поскольку управление  $u(\cdot)$  и число  $\delta > 0$  могут не существовать для любого малого  $\varepsilon > 0$ .

*Определение 2.* Система (1) называется  $R\varepsilon$ -стабилизируемой, если для заданных  $\varepsilon > 0$  и  $R > \varepsilon > 0$  существует управление  $u(\cdot)$  вида (3) и момент времени  $T > 0$ , такие что всякое решение  $x_\varphi(t)$  системы (1) с начальной функцией  $\varphi(t) : \|\varphi(0)\| < R$  сходится в зону  $\varepsilon$  за конечное время  $T$ , т.е.

$$\|x_\varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T.$$

Данное определение схоже с понятием полуглобальной стабилизации, введенным Изидори [14]. Отличие состоит лишь в том, что асимптотическая устойчивость здесь заменена сходимостью в зону. Поэтому  $R\varepsilon$ -стабилизацию можно так же назвать *практической полуглобальной стабилизацией* [12].

Основная цель данной работы состоит в разработке релейных алгоритмов управления, обеспечивающих стабилизацию системы (1) в смысле предложенных определений, а также в отыскании необходимых и достаточных условий существования стабилизирующих управлений такого рода.

## 2.3. Основные обозначения

В ряде прикладных задач управления полезно определять область притяжения и точность управления для каждой координаты в отдельности. По этой причине, а также для простоты изложения будем рассматривать так называемую обобщенную векторную норму

$$\|x\| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^n.$$

В этом случае пространство  $\mathbb{R}_+^n$  считается полуупорядоченным, т.е.  $x \preceq y$  ( $x \prec y$ ) тогда и только тогда, когда  $x_i \leq y_i$  ( $x_i < y_i$ ) для всех  $i = 1, \dots, n$ .

Соответствующим обобщением матричной нормы можно считать модуль матрицы

$$|A| = \{|a_{ij}|\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

где  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , поскольку для него, очевидно, выполнено условие согласованности норм:  $\|Ax\| \leq |A| \|x\|$ . В матричном случае отношение порядка  $\preceq, \prec, \succeq$  и  $\succ$  тоже будем понимать в покомпонентном смысле.

Если все неравенства в определениях 1 и 2 рассматривать в рамках предложенных обозначений, то параметры  $R, \varepsilon$  и  $\delta$  будут положительными векторами из  $\mathbb{R}_+^n$ .

В случае симметрических  $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  матриц неравенства  $X > 0$  и  $X < 0$  будут использоваться для обозначения их положительной и отрицательной определенности.

### 3. Необходимые условия существования стабилизирующего релейного управления

В [6] было найдено необходимое условие

$$(9) \quad \lambda h_0 < \ln(2)$$

существования *нетривиальных ограниченных решений* скалярной системы вида

$$(10) \quad \dot{x} = \lambda x - p \operatorname{sign}[x(t - h_0)], \quad x \in \mathbb{R}; \quad x(0) \neq 0; \quad \lambda, p, h_0 > 0.$$

Предложенная ниже теорема представляет обобщение данного результата (доказательства всех утверждений даны в Приложении).

*Теорема 1. Условие*

$$h_0 \operatorname{Re}(\operatorname{spec}(A)) < \ln(2)$$

*является необходимым для существования управления вида (3), обеспечивающего  $\varepsilon$ - или  $R\varepsilon$ -стабилизацию системы (1) в рамках предположений (5)–(8).*

Стабилизирующий контроллер скользящего режима для системы (1) также имеет вид (3) в релейном случае. Поэтому теорема 1 указывает ограничения на возможное использование метода скользящих режимов для систем с запаздыванием.

Заметим, что найденное необходимое условие может быть переписано в терминах линейного матричного неравенства

$$A^T X + X A - \frac{2 \ln(2)}{h_0} X < 0, \quad X > 0, \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

разрешимость которого легко проверяется с использованием современных математических пакетов, таких как MATLAB.

### 4. Синтез релейного управления с запаздыванием

#### 4.1. Регуляризация системы

С помощью преобразования координат  $(x_1, x_2)^T = Gx$ ,

$$G = \begin{pmatrix} I & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix}$$

исходная система (1) может быть сведена к *регулярному* виду

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \gamma, \end{cases}$$

где  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  – блоки матрицы системы.

Из управляемости пары  $\{A, B\}$  следует, что пара  $\{A_{11}, A_{12}\}$  тоже управляема [4] и всегда можно выбрать такую матрицу  $C \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , что  $\text{Re}(\text{spec}(A_{11} - A_{12}C)) < 0$ .

Введем в рассмотрение число  $\mu > 0$  и матрицу с положительными элементами  $H$ , такие что

$$(12) \quad \left| e^{t(A_{11} - A_{12}C)} \right| \preceq e^{-\mu t} H \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Обозначим также

$$(13) \quad D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_m\},$$

где  $d_i = \max\{0, (A_{11} - A_{12}C)_{ii}\}$ . Заметим, что поскольку матрица  $A_{11} - A_{12}C$  гурвицева, то  $\mu > 0$  и  $H \succeq 0$  всегда можно найти, например, по формулам

$$\mu = -0,5 \max_{\mu_i \in \text{spec}(A_{11} - A_{12}C)} \text{Re}(\mu_i),$$

$$H = \max_{t \geq 0} \left| e^{t(A_{11} - A_{12}C + \mu I)} \right|,$$

где максимум ищется по каждому элементу матрицы в отдельности.

#### 4.2. Локальная стабилизация

*Алгоритм 1* ( $\varepsilon$ -стабилизация).

1. Зафиксируем некоторое  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ .

2. Найдем положительные векторы  $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^m$  и  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^{n-m}$  из неравенств

$$(14) \quad \varepsilon_1 \succeq \mu^{-1} H |A_{12}| \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{cc} I - B_1 C & B_1 \\ B_2 C & B_2 \end{array} \right| \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \preceq \varepsilon.$$

3. Определим  $p = (p_1, \dots, p_m)^\top$  в виде

$$(15) \quad p = k + |Q_1| \varepsilon_1 + (|Q_2| + D) \varepsilon_2,$$

где вектор  $k = (k_1, \dots, k_m)^\top$  определен по формуле (6) и

$$(16) \quad Q_1 = A_{21} - A_{22}C + CA_{11} - CA_{12}C,$$

$$(17) \quad Q_2 = A_{22} + CA_{12} - D.$$

4. Наконец выберем релейное управление  $u(\cdot)$  как

$$(18) \quad u_\varepsilon = -\text{diag}(p_1, \dots, p_m) \text{sign}[(C \ I) Gx(t - h(t))].$$

Данный алгоритм может быть использован в рамках ограничений, представленных в следующей теореме.

*Теорема 2. Если*

$$(19) \quad k + |Q_1| \varepsilon_1 + |Q_2| \varepsilon_2 \prec (I - 0,5e^{h_0 D}) E_D^{-1} \varepsilon_2,$$

то управление (18) гарантирует  $\varepsilon$ -стабилизацию основной системы (1) для любого  $\delta \in \mathbb{R}_+^n$ , удовлетворяющего неравенству

$$(20) \quad \left( \begin{array}{cc} H & H |B_1 B_2^{-1}| \\ |C| & |(I - CB_1) B_2^{-1}| \end{array} \right) \delta \preceq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 - 2e^{-h_0 D} E_D p \end{pmatrix},$$

где  $E_D = \text{diag}(e_1, \dots, e_m)$ ,

$$e_i = \begin{cases} h_0, & \text{если } d_i = 0, \\ \frac{e^{d_i h_0} - 1}{d_i}, & \text{если } d_i \neq 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что при  $h_0 \rightarrow 0$  правая часть (19) стремится к  $+\infty$ , и все ограничения последней теоремы исчезают. В этом случае получаем хорошо известное скользящее управление [4] и  $\varepsilon$ -стабилизация возможна при всех  $\varepsilon \succ 0$ .

Заметим, что для выполнения условия (19) необходимо выполнение неравенства  $Dh_0 \preceq \ln 2 \cdot I$ .

#### 4.3. Полуглобальная стабилизация

**Алгоритм 2** ( $R\varepsilon$ -стабилизация).

1. Фиксируем некоторые  $R \in \mathbb{R}_+^n$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n : \varepsilon < R$ .

2. Находим положительные векторы  $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^m$  и  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^{n-m}$  из неравенств

$$(21) \quad \varepsilon_1 \succ \mu^{-1} H |A_{12}| \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} I - B_1 C & B_1 \\ B_2 C & B_2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \preceq \varepsilon.$$

3. Вычисляем  $R_1 \in \mathbb{R}_+^{n-m}$  и  $R_2 \in \mathbb{R}_+^m$  по формуле

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} I & -B_1 B_2^{-1} \\ C & (I - C B_1) B_2^{-1} \end{vmatrix} R,$$

а также выбираем  $R_1^{\max} \in \mathbb{R}_+^{n-m}$  и  $R_2^{\max} \in \mathbb{R}_+^m$  в виде

$$R_1^{\max} = H(R_1 + \mu^{-1} |A_{12}| R_2^{\max}), \quad R_2^{\max} = e^{h_0 D} R_2 + \varepsilon_2,$$

4. Определяем вектор  $p = (p_1, \dots, p_m)^T$  как

$$(22) \quad D R_2^{\max} + f^{\max} \prec p \prec E_D^{-1} \varepsilon_2 - f^{\max},$$

где  $f^{\max} = k + |Q_1| R_1^{\max} + |Q_2| R_2^{\max}$ .

5. Наконец выбираем релейное управление  $u_{R\varepsilon}(\cdot)$  в виде (18).

В полуглобальном случае имеем более строгие условия стабилизации.

**Теорема 3.** Если  $Dh_0 \preceq \frac{\ln 2}{2} I$  и

$$(23) \quad f^{\max} + D e^{h_0 D} R_2 \prec (I - 0,5 e^{h_0 D}) E_D^{-1} \varepsilon_2,$$

то управление  $u_{R\varepsilon}(\cdot)$ , построенное в соответствии с алгоритмом 2, гарантирует  $R\varepsilon$ -стабилизацию системы (1) со следующей оценкой времени сходимости:

$$(24) \quad T \leq T_1 + T_2, \\ T_1 = h_0 + \max_{i=1, \dots, m} \{R_{2i}^{\max} / (p_i - d_i R_{2i}^{\max} - f_i^{\max})\}, \\ T_2 = \mu^{-1} \max_{i=1, \dots, n-m} \left\{ \ln \left( \frac{(H R_1^{\max} - \mu^{-1} H |A_{12}| \varepsilon_2)_i}{(\varepsilon_1 - \mu^{-1} H |A_{12}| \varepsilon_2)_i} \right) \right\}.$$

Как и в случае  $\varepsilon$ -стабилизации, условия последней теоремы исчезают при  $h_0 \rightarrow 0$  и полуглобальная стабилизация становится возможной при всех положительных  $R$  и  $\varepsilon$  ( $R \succ \varepsilon$ ). При этом оценка времени сходимости складывается из двух интервалов  $T_1$  и  $T_2$ , оценивающих время вхождения в скользящий режим [4] и время попадания в зону  $\varepsilon$  соответственно.

Неравенство  $Dh_0 \leq \frac{\ln 2}{2}I$  в теореме 3 означает, что время запаздывания при полуглобальной стабилизации должно быть вдвое меньше, чем в локальном случае. В простейшем скалярном случае (10) данное неравенство гарантирует включение области установившихся колебаний ( $\varepsilon$ -окрестность) в область притяжения ( $R$ -окрестность).

#### 4.4. О выборе поверхности переключений

Задача выбора подходящей поверхности переключений, очевидно, тесно связана с проблемой синтеза линейной обратной связи по состоянию. Действительно, если рассматривать переменную  $x_2$  как фиктивное управление состоянием  $x_1$ , то проблема поиска матрицы  $C$  такой, что  $A_{11} - A_{12}C$  гурвицева, сводится к отысканию стабилизирующей линейной обратной связи  $x_2 = -Cx_1$  для первого уравнения системы (11). Данная задача может быть легко решена методом линейных матричных неравенств. Как хорошо известно [15, 16], матрица  $C$  может быть найдена тогда и только тогда, когда разрешима следующая система из двух матричных неравенств:

$$(25) \quad X A_{11}^T + A_{11}X - 2A_{12}A_{12}^T < 0, \quad X > 0,$$

где  $X \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ . При выполнении этих неравенств параметры регулятора могут быть выбраны в виде

$$(26) \quad C = A_{12}^T X^{-1}.$$

В то же время на выбор матрицы  $C$  накладываются ограничения, связанные с запаздыванием в релейном управлении. В частности, для выполнения условия (19) теоремы 2 необходимо выбрать матрицу  $C$  так, чтобы  $Dh_0 \leq \ln 2 \cdot I$ , где  $D$  составлена из диагональных элементов матрицы  $A_{22} + CA_{12} = A_{22} + A_{12}^T X^{-1} A_{12}$ . Для выполнения этого неравенства достаточно потребовать

$$(27) \quad \frac{1}{2}(A_{22} + A_{22}^T) + A_{12}^T X^{-1} A_{12} < \frac{\ln 2}{h_0} I.$$

Используя дополнение по Шуру [17], неравенство (27) можно переписать в виде

$$(28) \quad \begin{pmatrix} \frac{\ln 2}{h_0} I - 0,5(A_{22} + A_{22}^T) & A_{12}^T \\ A_{12} & X \end{pmatrix} > 0.$$

В результате пришли к системе линейных матричных неравенств (25)–(28), решения которой в соответствии с формулой (26) позволяют определять различные поверхности переключений, которые могут подойти для синтеза управления.

Достаточные условия, предложенные в теоремах 2 и 3, накладывают, очевидно, более строгие ограничения на выбор поверхности переключений. К сожалению, в виде матричных неравенств эти условия выписать не удастся. В то же время поиск поверхности переключений можно организовать, основываясь на модификации матричных неравенств, полученных выше.

Введем в рассмотрение следующую параметрическую систему линейных матричных неравенств

$$(29) \quad \begin{pmatrix} X A_{11}^T + A_{11}X - 2A_{12}A_{12}^T + \mu X < 0, \\ \left( \begin{matrix} \xi I - 0,5(A_{22} + A_{22}^T) & A_{12}^T \\ A_{12} & X \end{matrix} \right) > 0, \quad X > 0, \end{pmatrix}$$

где  $\mu \geq 0$  и  $\xi \leq \frac{\ln 2}{h_0}$ .

При фиксированных параметрах  $\mu$  и  $\xi$  система матричных неравенств (29) является линейной и может быть решена в пакете MATLAB. При  $\mu = 0$  и  $\xi = \frac{2 \ln 2}{h_0}$  она совпадает с системой, полученной ранее. Параметры  $\mu$  и  $\xi$  меняют ограничения на спектральные свойства матриц  $A_{11} - A_{12}C$  и  $A_{22} + CA_{12}$  соответственно (здесь  $C$  вычисляется по формуле (26) с использованием решений системы (29)).

Увеличение параметра  $\mu$  увеличивает запас устойчивости матрицы  $A_{11} - A_{12}C$ , который гарантированно становится больше, чем  $\mu/2$ , т.е.  $\text{Re}(\text{spec}(A_{11} - A_{12}C)) < -\mu/2$ . В этом случае очевидно, что  $\mu$  соответствует одноименному параметру из оценки (12).

Уменьшение  $\xi$  приводит к более жесткому ограничению на диагональные элементы и собственные числа матрицы  $A_{22} + CA_{12}$ , гарантируя выполнение условия  $\text{diag}(A_{22} + CA_{12}) \preceq \xi$ .

Выбирая различные параметры  $\mu$ ,  $\xi$  и решая систему линейных матричных неравенств (29), будем получать по формуле (26) различные поверхности переключений, для которых нужно будет дополнительно проверять условие (19).

При поиске поверхности переключений для  $R\varepsilon$ -стабилизации изменится лишь ограничение на параметр  $\xi$ :

$$\xi \leq \frac{\ln 2}{2h_0}.$$

### 5. Численный пример

Рассмотрим задачу стабилизации перевернутого маятника, управляемого маховиком (см. рис. 1). Маховик закреплен на валу электродвигателя постоянного тока, который расположен на свободном конце маятника.

Соответствующая линеаризованная система уравнений движения имеет вид [18]

$$(30) \quad \begin{cases} J\ddot{\psi} + (J_r + J_f)\dot{\omega} = (Md + ml)g\psi, \\ (J_r + J_f)(\ddot{\psi} + \dot{\omega}) = c_1u - c_2\omega, \end{cases}$$

где  $\psi$  – угол отклонения маятника,  $\omega$  – угловая скорость вращения маховика,  $J = J_p + ml^2 + J_r + J_f$ ,  $J_p = 1,2 \times 10^{-3}$  [кг м<sup>2</sup>] – момент инерции маятника,  $J_r =$

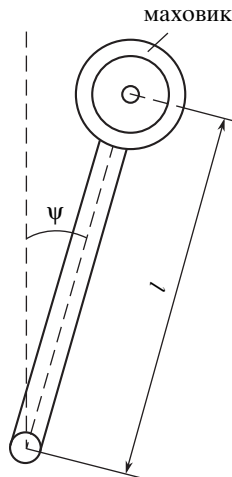


Рис. 1. Перевернутый маятник с маховиком.



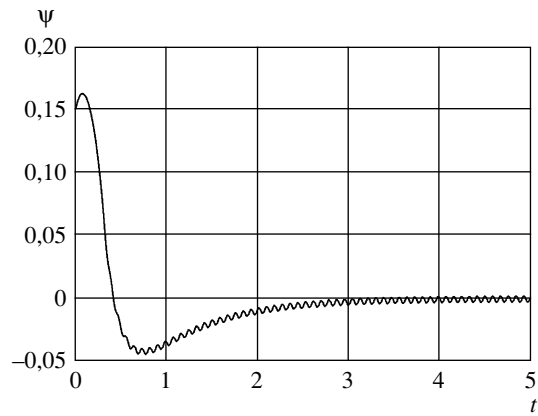


Рис. 2. Угол отклонения маятника  $\psi(t)$ .

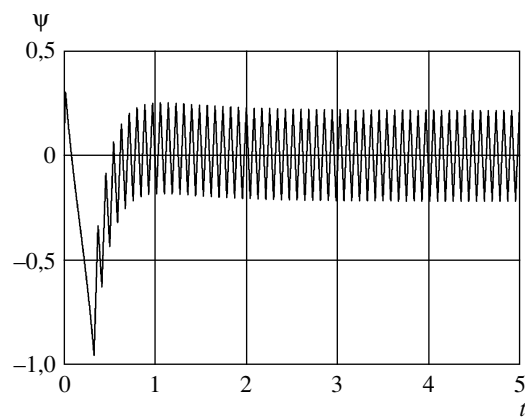


Рис. 3. Угловая скорость маятника  $\dot{\psi}(t)$ .

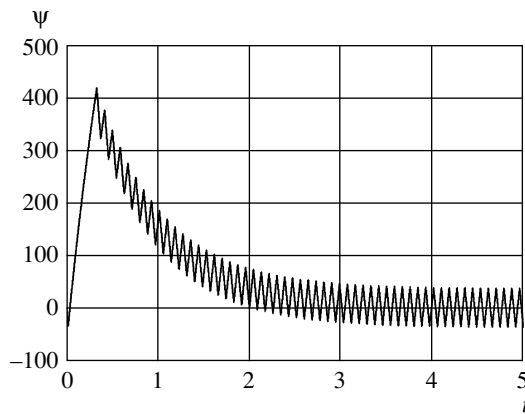


Рис. 4. Угловая скорость вращения ротора (маховика)  $\omega(t)$ .

$= 1,2 \times 10^{-6} \text{ [кг м}^2\text{]}$  – момент инерции ротора,  $J_f = 7,65 \times 10^{-5} \text{ [кг м}^2\text{]}$  – момент инерции маховика,  $M = 0,04 \text{ [кг]}$  – масса маятника,  $m = 0,13 \text{ [кг]}$  – сумма масс ма-

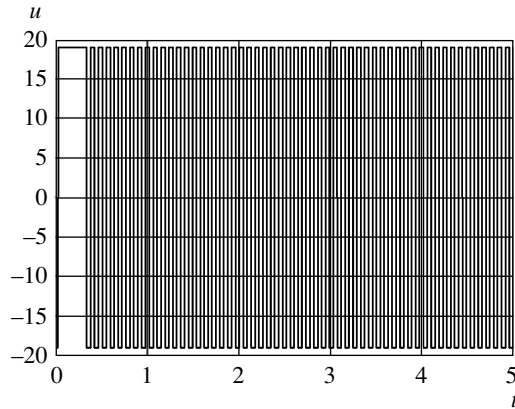


Рис. 5. Закон управления  $u(t)$ .

ховика и электродвигателя,  $l = 0,3$  [м] — длина маятника,  $d = 0,15$  [м] — расстояние от точки закрепления маятника до его центра масс,  $c_1 = 6,9 \times 10^{-3}$  [н м / В] и  $c_2 = 1,0 \times 10^{-4}$  [н м сек] — параметры электродвигателя и  $u = \pm 19$  В — управляющее напряжение,  $g = 9,8$  [м / сек<sup>2</sup>].

Исходная система (30) может быть легко переписана в виде (1) при  $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (\psi, \dot{\psi}, \omega)^T$  и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 34,1860 & 0 & 0,0078 \\ -34,1860 & 0 & -1,3098 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5349 \\ 90,3786 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные числа матрицы  $A$  имеют значения  $\lambda_1 = 5,8437$ ,  $\lambda_2 = -5,8519$ ,  $\lambda_3 = -1,3017$ , то по теореме 1  $\varepsilon$ - или  $R\varepsilon$ -стабилизация системы (30) возможна *только* в случае  $h_0 < 0,118$  [сек].

Процедура поиска поверхности переключений, предложенная выше для  $\mu = 2,662$  и  $\xi = 5,86$ , дает  $C = (-13,4201; -2,3024)$  и

$$u(x(t - h(t))) = 19 \operatorname{sign}[(13,4201; 2,3024; 0,0026)x(t - h(t))].$$

На рис. 2–4 показан процесс стабилизации рассматриваемой системы. На рис. 5 изображен график стабилизирующего релейного управления для  $R = (0,15; 0,4; 80)$ ,  $\varepsilon = (0,01; 0,21; 40)^T$  и  $h(t) = 0,02$ .

## 6. Заключение

В работе рассмотрена проблема стабилизации линейных объектов при помощи релейного управления с запаздыванием. Найдены необходимые условия существования стабилизирующего релейного управления. Данные условия задают ограничения на возможность использования методов скользящего управления для систем с запаздыванием. Предложены два алгоритма практической стабилизации. Найдены достаточные условия существования и робастности предложенных управлений по отношению к переменному запаздыванию и малым внешним возмущениям. Впервые указано ограничение на запаздывание, допустимое в системе стабилизации перевернутого маятника, управляемого маховиком, рассмотренного в [18]. Процесс стабилизации такого маятника посредством релейного управления с запаздыванием проиллюстрирован графически.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Предположим противное (т.е. существует собственное число  $\lambda_0 : h_0 \operatorname{Re}(\lambda_0) \geq \ln(2)$ ) и покажем, что в данном случае для любого  $\delta > 0$ , любых параметров  $p_i$  и линейных отображений  $S_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , задающих управление, найдется такая начальная функция  $\varphi(t) : \|\varphi(0)\| < \delta$ , что соответствующее решение  $x_\varphi(t)$  системы (1) является неограниченным на интервале  $[0, +\infty)$  даже в невозмущенном случае:  $f(t, x(t)) \equiv 0$  и  $h(t) \equiv h_0$ .

С помощью вещественного жорданова преобразования  $x = Gy$  система (1) может быть переписана в виде

$$(II.1) \quad \dot{y}(t) = Jy(t) + \tilde{B}u(x(t - h_0)),$$

где  $J = G^{-1}AG$  – матрица Жордана и  $\tilde{B} = G^{-1}B$ .

Рассмотрим два возможных случая.

I. Пусть собственное число  $\lambda_0$  является вещественным. Соответствующее уравнение из системы (II.1) имеет вид

$$(II.2) \quad \dot{y}_0 = \lambda_0 y_0 + \tilde{b}_0 u(x(t - h_0)),$$

где  $y_0 \in \mathbb{R}$  – компонента вектора  $y$  с номером  $i_0$ , которая соответствует рассматриваемому собственному числу  $\lambda_0$ ,  $\tilde{b}_0$  – соответствующая строка матрицы  $\tilde{B}$ . Кроме того, в силу специальной формы релейного управления (3) получаем

$$\tilde{b}_0 u(\alpha x) = \operatorname{sign}[\alpha] \tilde{b}_0 u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Отсюда очевидно для любых  $p_i$  и  $S_i(\cdot)$  могут быть найдены: число  $p_0 \geq 0$  и вектор  $x_{\max} \in \mathbb{R}^n$ , такие что

$$-p_0 = \tilde{b}_0 u(-x_{\max}) \leq \tilde{b}_0 u(x) \leq \tilde{b}_0 u(x_{\max}) = p_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Определим вектор  $x_0 = G \left( 0, \dots, 0, \frac{\delta}{2}, 0, \dots, 0 \right)^T$  и выберем начальную функцию  $\varphi(t)$  в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} x_{\max}, & \text{если } t \in [-h_0, 0), \\ x_0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (II.2) на интервале  $[0, h_0)$  принимает вид

$$\dot{y}_0 = \lambda_0 y_0 + p_0, \quad y_0(0) = \frac{\delta}{2}.$$

Отсюда  $y_0(h_0) = \left( \frac{\delta}{2} + \frac{p_0}{\lambda_0} \right) e^{\lambda_0 h_0} - \frac{p_0}{\lambda_0}$  и с учетом

$$\dot{y}_0(t) = \lambda_0 y_0(t) + \tilde{b}_0 u(x) \geq \lambda_0 y_0(t) - p_0 \quad \forall t > h_0$$

из леммы Гронуолла получаем

$$\begin{aligned} y_0(t) &\geq \left( y_0(h_0) - \frac{p_0}{\lambda_0} \right) e^{\lambda_0(t-h_0)} + \frac{p_0}{\lambda_0} = \\ &= \left( \frac{\delta}{2} e^{\lambda_0 h_0} + \frac{p_0}{\lambda_0} (e^{\lambda_0 h_0} - 2) \right) e^{\lambda_0(t-h_0)} + \frac{p_0}{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, для  $\delta > 0$  при  $\lambda_0 h_0 \geq \ln 2$  решение системы (П.2) является неограниченным.

II. В случае комплексного числа  $\lambda_0 = \alpha + i\beta$  с  $\alpha h_0 \geq \ln(2)$  приходим к системе

$$(П.3) \quad \begin{cases} \dot{y}_1(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) + \tilde{b}_1 u(x(t-h_0)), \\ \dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) + \tilde{b}_2 u(x(t-h_0)). \end{cases}$$

Пусть вектор  $x_{\max}$  и число  $\psi_{\max}$  определены как

$$\max_{\forall \psi \in [0, 2\pi], \forall x \in R^n} g(\psi, x) = g(\psi_{\max}, x_{\max}),$$

где  $g(\psi, x) = \cos(\psi)\tilde{b}_1 u(x) + \sin(\psi)\tilde{b}_2 u(x)$ . Легко видеть, что

$$\min_{\forall \psi \in [0, 2\pi], \forall x \in R^n} g(\psi, x) = -g(\psi_{\max}, x_{\max}) = g(\psi_{\max}, -x_{\max}).$$

Покажем, что при начальном условии

$$\varphi(t) = \begin{cases} x_{\max}, & \text{если } t \in [-h_0, 0), \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

соответствующее решение подсистемы (П.3) является неограниченным. На интервале  $t \in [0, h_0]$  решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{\alpha\tau} \begin{pmatrix} \cos(\beta\tau)p_1 - \sin(\beta\tau)p_2 \\ \sin(\beta\tau)p_1 + \cos(\beta\tau)p_2 \end{pmatrix} d\tau,$$

где  $p_1 = \tilde{b}_1 u(x_{\max})$  и  $p_2 = \tilde{b}_2 u(x_{\max})$ . Отсюда

$$y_1^2(h_0) + y_2^2(h_0) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\alpha^2 + \beta^2} (e^{2\alpha h_0} - e^{\alpha h_0} \cos(\beta h_0) + 1).$$

С другой стороны, можно переписать систему (П.3) в полярных координатах, используя следующие обозначения:  $y_1(t) = \rho(t) \cos(\psi(t))$  и  $y_2(t) = \rho(t) \sin(\psi(t))$

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = \alpha\rho(t) + \cos(\psi(t))\tilde{b}_1 u + \sin(\psi(t))\tilde{b}_2 u, \\ \dot{\psi}(t) = \beta + (\sin(\psi(t))\tilde{b}_1 u - \cos(\psi(t))\tilde{b}_2 u) / \rho(t). \end{cases}$$

Из условия (8) получаем

$$\rho^2(h_0) = y_1^2(h_0) + y_2^2(h_0) > \frac{p_1^2 + p_2^2}{\alpha^2}$$

и

$$\dot{\rho}(t) \geq \alpha\rho(t) - g(\psi_{\max}, x_{\max}) \geq \alpha\rho(t) - \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad \text{при } t > h_0.$$

Отсюда следует, что решение подсистемы (П.3) является неограниченным.

*Доказательство теоремы 2.*

I. Перепишем систему (11) в переменных  $x_1$  и  $y = Cx_1 + x_2$ :

$$(П.4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C)x_1 + A_{12}y, \\ \dot{y} = Dy + u_\varepsilon + \gamma + Q_1 x_1 + Q_2 y \end{cases}$$

и покажем, что  $\|x_1(t)\| < \varepsilon_1$  и  $\|y(t)\| < \varepsilon_2$ .

Используя формулу решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно легко получить неравенство

$$\|x_1(t)\| \leq \left| e^{t(A_{11}-A_{12}C)} \right| \|x_1(0)\| + \int_0^t \left| e^{(t-\tau)(A_{11}-A_{12}C)} \right| |A_{12}| \|y(\tau)\| d\tau,$$

которое гарантирует  $\|x_1(t)\| < \varepsilon_1$  при  $\|y(t)\| < \varepsilon_2, \forall t > 0$ . Действительно, из

$$(П.5) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -B_1B_2^{-1} \\ C & (I - CB_1)B_2^{-1} \end{pmatrix} x$$

и неравенств (12),(20) следует

$$\|x_1(t)\| \leq e^{-\mu t} H \|x_1(0)\| + \mu^{-1}(1 - e^{-\mu t}) H |A_{12}| \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Таким образом, достаточно показать, что  $\|y(t)\| < \varepsilon_2$  для всех  $t > 0$  при условии  $\|x_1(t)\| \leq \varepsilon_1$ . Предположим противное, т.е. существует первый момент времени  $T_\varepsilon > 0$  и натуральное число  $j \in \{1, \dots, n - m\}$ , такие что  $y_j(T_\varepsilon) = \varepsilon_{2j}$  и  $\|y(t)\| < \varepsilon_2$  для всех  $t \in [0, T_\varepsilon]$  (случай  $y_j(T_\varepsilon) = -\varepsilon_{2j}$  доказывается аналогично). Тогда из (П.5) и (20) следует

$$(П.6) \quad y_j(0) < \delta_j^y = \varepsilon_{2j} + 2p_j(e^{-d_j h_0} - 1)/d_j < \varepsilon_{2j}$$

и существует момент времени  $T_\delta > 0$ , такой что  $y_j(T_\delta) = \delta_j^y$  и  $\delta_j^y < y_j(T_\delta) < \varepsilon_{2j}$  для  $t \in [T_\delta, T_\varepsilon]$ . Рассмотрим соответствующее уравнение из системы (П.4) на интервале  $[T_\delta, T_\varepsilon]$

$$\dot{y}_j = d_j y_j - p_j \text{sign}[y_j(t - h(t))] + g_j,$$

где  $g = (g_1, \dots, g_m) = \gamma + Q_1 x_1 + Q_2 y$  и  $\|g\| \leq k + |Q_1| \varepsilon_1 + |Q_2| \varepsilon_2$ . Используя верхнюю оценку функции  $y_j(t)$  на рассматриваемом интервале  $\dot{y}_j \leq d_j y_j + p_j + |g_j|$ ,  $y_j(T_\delta) = \delta_j^y$ , получаем

$$y_j(T_\varepsilon) = \varepsilon_{2j} \leq \left( \delta_j^y + \frac{p_j + |g_j|}{d_j} \right) e^{d_j(T_\varepsilon - T_\delta)} - \frac{p_j + |g_j|}{d_j}.$$

Из условия (19) и неравенства  $d_i h_0 < \ln 2$  получаем  $T_\varepsilon - T_\delta > h_0$ ,  $\text{sign}[y_j(t - h(t))] = 1$  для  $t \in (T_\delta + h_0, T_\varepsilon]$  и

$$\dot{y}_j(t) \leq \varepsilon_{2j} d_j - p_j + |g_j| < 0.$$

Следовательно, функция  $y_j(t)$  является убывающей на интервале  $(T_\delta + h_0, T_\varepsilon]$  и не может достичь границы  $\varepsilon_{2j}$ .

II. Наконец заметим, что неравенства  $\|x_1(t)\| < \varepsilon_1$  и  $\|y(t)\| < \varepsilon_2$  влекут

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} I - B_1 C & B_1 \\ B_2 C & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon.$$

*Доказательство теоремы 3.*

I. По аналогии с доказательством теоремы 2 можно легко показать, что  $\|x_1(t)\| < R_1^{\max}$  и  $\|y(t)\| < R_2^{\max}$  для всех  $t > 0$ .

II. Покажем теперь, что для любого  $i \in \{1, \dots, m\}$  найдется такой момент времени  $t_i^0 \in [0, T_1] : |y_i(t_i^0)| = 0$ . Предположим противное, т.е.  $\exists j \in \{1, \dots, m\} : y_j(t) > 0$  для всех  $[0, T_1]$  (случай  $y_j(t) < 0$  доказывается аналогично).

Поскольку  $y_j(t) > 0$  для всех  $[0, T_1]$ , то  $\text{sign}[y_j(t - h(t))] = 1$  для любого  $t \in [h_0, T_1]$ . Отсюда  $\dot{y}_j(t) \leq d_i R_{2i}^{\max} - p + f_i^{\max}$ , и из  $y_j(t) \leq R_{2i}^{\max}$  получаем неравенство  $y_j(t) \leq R_{2i}^{\max} - t(p_i - d_i R_{2i}^{\max} - f_i^{\max})$ , которое противоречит нашему предположению при  $t = T_1$ .

III. Покажем теперь, что  $|y_i(t)| < \varepsilon_{2i}$  для всех  $t > t_i^0$ . Действительно, используя верхнюю оценку на  $y_i(t)$

$$\dot{y}_i(t) \leq d_i y_i(t) + p_i + f_i^{\max}, \quad y_i(t_i^0) = 0,$$

получаем  $y_i(t_i^0 + h_0) \leq e_i(p_i + f_i^{\max}) < \varepsilon_{2i}$  и для  $t > t_i^0 + h_0$

$$\dot{y}_i(t) \leq d_i \varepsilon_{2i} - p_i + f_i^{\max} \leq d_i R_{2i}^{\max} - p_i + f_i^{\max} < 0,$$

т.е. функция  $y_i(t)$  убывающая. Таким образом,  $\|y(t)\| \leq \varepsilon_2$  для всех  $t > T_1$ .

IV. Из  $\|x_1(t)\| \leq e^{-\mu(t-T_1)} H R_1^{\max} + \mu^{-1} H |A_{12}| \varepsilon_2 (1 - e^{-\mu(t-T_1)})$  имеем

$$\|x_1(t)\| \leq \varepsilon_1$$

для всех  $t > T_1 + T_2$ .

V. Неравенства  $\|x_1(t)\| \leq \varepsilon_1$  и  $\|y(t)\| \leq \varepsilon_2$  для  $t > T_1 + T_2$  влекут  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я.З. Теория релейных систем управления / Я.З. Цыпкин. М.: Гостехиздат, 1955.
2. Емельянов С.В. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности / С.В. Емельянов, С.К. Коровин. М.: Наука; Физматлит, 1997.
3. Choi S.-B., Hedrick J. K. Robust throttle control of automotive engines // ASME J. Dynam. Syst., Measurement, Control. 1996. V. 118. P. 92–98.
4. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding modes in electromechanical systems. London, Taylor&Francis, 1999.
5. Malek-Zaverei M., Jamshidi M. Time delay systems analysis, optimization and applications / Ser. Syst. Control. North Holland, Amsterdam, 1987.
6. Фридман Л.М., Фридман Э.М., Шустин Е.И. Установившиеся режимы в автономных уравнениях с разрывом и запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1340–1346.
7. Roh Y. H., Oh J. H. Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation // Automatica. 1999. V. 35. P. 1861–1865.
8. Loukianov A. G., Espinosa-Guerra O., Castillo-Toledo B., Utkin V. A. Integral sliding mode control for systems with time delay // Proc. 9 Int. Workshop Variable Structur. Syst. Alghero. 2006. P. 256–261.
9. Fridman L., Acosta P., Polyakov A. Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems // Proc. 3rd IFAC Workshop Time Delay Syst. Santa Fe. 2001. P. 239–244.
10. Sing K. N. Comments on Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation // Automatica. 2001. V. 37. P. 1677.
11. Стрыгин В.В. Локальная стабилизация релейных систем с запаздыванием / В.В. Стрыгин, Л.М. Фридман, А.Е. Поляков // Докл. АН. 2001. Т. 379. № 5. С. 603–605.
12. Fridman L., Strygin V., Polyakov A. Nonlocal Stabilization via Delayed Relay Control Rejecting Uncertainty in a Time Delay // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2004. V. 14. P. 15–37.
13. Shustin E., Fridman L., Fridman E., Castaños F. Robust Semiglobal Stabilization of The Second Order System by Relay Feedback with an Uncertain Variable Time Delay // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47. No. 1. P. 196–217.

14. *Isidori A.* Nonlinear control systems. France: Springer Verlag, 1995.
15. *Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. М.: Наука, 2002.
16. *Баландин Д.В.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. М.: Физматлит, 2007.
17. *Розпуак А.* Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Technique. V. I. – Elsevier, 2008.
18. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др.* Маятник, управляемый при помощи маховика // Докл. АН. 2003. Т. 392. No. 6. С. 743–749.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.*

Поступила в редакцию 02.02.2010