Автоматика и телемеханика, № 3, 2011

Робастные и адаптивные системы

© 2011 г. **С. ГОНСАЛЕС-ГАРСИЯ**
(Центр исследований и обучения Национального политехнического института Мексики, Мехико),
А.Е. ПОЛЯКОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.С. ПОЗНЯК, д-р. техн. наук
(Центр исследований и обучения Национального политехнического института Мексики, Мехико)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ РОБАСТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ВЫХОДУ

Рассмотрена проблема робастной стабилизации по выходу нелинейной системы с помощью метода инвариантных эллипсоидов в предположении, что система удовлетворяет условию типа Липшица, а на выход системы действуют внешние ограниченные возмущения. Поставленная задача сведена к специальной задачи оптимизации, решение которой основано на теории линейных матричных неравенств. Предложенный подход проиллюстрирован на примере стабилизации космического аппарата с упругими динамическими элементами. Построенное управление состоит из комбинации алгоритма “разгон-торможение” и линейной обратной связи, полученной методом инвариантных эллипсоидов.

1. Введение

Модель любой реальной системы описывает ее поведение лишь в некотором приближении. Это связано, например, с наличием внешних возмущений и неопределенностей в параметрах системы. Поэтому возникает потребность в синтезе управления, учитывающего характеристики неопределенных переменных и гарантирующего свойство робастности по отношению к их изменению. В частности, можно уменьшить эффект от воздействия внешних возмущений на выход системы посредством подходящего метода синтеза управления по выходу.

Задача синтеза управления для линейной системы с неизвестными ограниченными возмущениями впервые решалась в работах Бертсекаса и Швеппе (Bertsekas and Schweppe) [1–3], где было предложено строить управление так, чтобы удерживать состояние системы в заданной области и гарантировать достижение некого целевого множества. Данная задача была решена с помощью метода динамического программирования и эллиптических вычислений, развитие которых изложено в [4].

Теория H^∞ дает явный вид оптимального регулятора для случая возмущений из класса L_2 [5, 6]. Требование ограниченности энергии возмущений было ослаблено для дискретных систем в [7–9], где учитывается лишь максимальная амплитуда возмущений (т.е. оценка в норме l_1). К сожалению, оптимальный регулятор, построенный в соответствии с предложенной схемой, часто имеет высокий порядок. В [10, 11] впервые было предложено решать задачу минимизации ограниченных возмущений с привлечением линейных матричных неравенств [12].

Понятие инвариантных множеств, их связь с теорией Ляпунова и возможность их использования при управлении динамическими системами, при анализе робастности и подавлении возмущений изложены в [13]. В [14] представлены некоторые обобщения указанных результатов.

Обычно инвариантные множества определяются в форме эллипсоидов или многогранников в соответствующих пространствах. Первый вариант определения удобен с точки зрения простоты описания (достаточно задать лишь центр и матрицу эллипсоида), однако он часто дает излишне консервативные оценки. Второй способ кажется более естественным и точным, но связан со значительными сложностями при задании инвариантного множества.

Для линейной системы с ограниченными возмущениями в [15–18] задача синтеза статического регулятора с обратной связью по состоянию, минимизирующего размер соответствующего инвариантного эллипсоида, была сведена к задаче оптимизации линейного функционала с ограничениями в форме линейных матричных неравенств. Задачи синтеза робастного управления нередко удается формулировать в терминах линейных матричных неравенств и успешно решать с привлечением современных вычислительных алгоритмов [12]. Не менее широкий класс задач формулируется в терминах *билинейных матричных неравенств* [19–21], и лишь немногие из них (например, для статических обратных связей и динамических обратных связей по выходу) удается эффективно решить путем сведения к эквивалентным линейным неравенствам посредством специальной замены переменных.

Данная работа посвящена задаче стабилизации нелинейной системы по выходу при наличии ограниченных возмущений. Ее решение основано на комбинации метода функций Ляпунова и принципа инвариантных эллипсоидов, наблюдателя Люенбергера и линейного регулятора с обратной связью по наблюдаемому состоянию. В силу нелинейности системы полученная задача оптимизации имеет билинейные матричные ограничения. С помощью специальных преобразований полученные билинейные ограничения сводятся к двухпараметрическому семейству линейных матричных неравенств, а соответствующая задача оптимизации эффективно решается при каждых фиксированных значениях параметров.

1.1. Основные результаты

1. В данной работе проблема отыскания минимального инвариантного эллипсоида для нелинейной возмущенной системы с линейным наблюдением и управлением сведена к задаче оптимизации линейного функционала с билинейными ограничениями.

2. Доказана лемма, которая сужает допустимое множество, но позволяет эффективно отыскивать субоптимальное решение задачи, поскольку при фиксированных значениях двух скалярных параметров полученные ограничения принимают вид линейных матричных неравенств.

3. Впервые ограничение на управление представлено в виде линейного матричного неравенства, которое может быть добавлено в систему уже имеющихся ограничений.

1.2. Структура работы

В разделе 2 предложена точная постановка задачи и основные предположения. В разделе 3 представлены основные результаты. Некоторые вычислительные аспекты построения робастного управления рассмотрены в разделе 4. В разделе 5 приложение полученных результатов продемонстрировано на примере стабилизации космического аппарата с двумя упругими динамическими элементами. В Заключении представлены некоторые замечания и обобщения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную непрерывную управляемую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t) + Bu, \\ y &= Cx + w_y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathrm{R}^m$ – управление, $y \in \mathrm{R}^k$ – выход системы, $w_y \in \mathrm{R}^k$ – возмущения на выходе, $f : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ – неизвестная нелинейная функция (из указанного далее класса), $B \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $C \in \mathrm{R}^{k\times n}$ – матрицы системы.

Исследуем данную систему при следующих общих предположениях:

1) возмущения w_y на выходе системы удовлетворяют оценке

$$\|w_y\|^2_{K_\eta} := w_y^\top K_\eta w_y \leqslant 1, \tag{2}$$

где симметрическая положительно определенная матрица $K_\eta \in \mathrm{R}^{n\times n}, K_\eta > 0$, считается заданной;

2) нелинейная функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию типа Липшица, а именно

$$\|f(x,t) - Ax\|^2_{K_f} \leqslant \delta + \|x\|^2_{K_x},$$

где $0 < K_f \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $0 < K_x \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – известные матрицы, $\delta \in \mathrm{R}, \delta \geqslant 0$ (без ограничения общности можно считать, что $\delta = \{0, 1\}$).

3) пара (A,B) является управляемой, а пара (A,C) – наблюдаемой.

Вводя обозначение $w_x := f(x,t) - Ax$, систему (1) можно представить в виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w_x, \tag{3}$$

$$y = Cx + w_y, \tag{4}$$

$$\|w_k\|^2_{K_f} \leqslant \delta + \|x\|^2_{K_x}. \tag{5}$$

Будем рассматривать линейное управление вида

$$u = K\hat{x}, \quad K \in \mathrm{R}^{m\times n}, \tag{6}$$

где $\hat{x} \in \mathrm{R}^n$ – наблюдаемое состояние системы, полученное с помощью классического наблюдателя Люенбергера вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + F(y - C\hat{x}), \quad F \in \mathrm{R}^{n\times p}. \tag{7}$$

Робастную стабилизацию системы (3), (4) будем реализовывать с помощью метода *инвариантных эллипсоидов* (см., например, [16]), который основан на следующих простых принципах.

Эллипсоид

$$\varepsilon(0,P) = \left\{x \in \mathrm{R}^n : x^\top P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P > 0,$$

с центром в начале координат и конфигурационной матрицей P называется *инвариантным* для системы (3), (4) с возмущениями вида (2) и (5), если

1) для любого $x(0) \in \varepsilon(0,P)$ решение $x(t) \in \varepsilon(0,P)$ для всех $t \geqslant 0$;

2) при $x(0) \notin \varepsilon(0,P)$ справедливо $x(t) \to \varepsilon(0,P)$ при $t \to \infty$.

Другими словами, всякая траектория системы, начавшись внутри инвариантного эллипсоида, остается внутри при всех $t \geqslant 0$, а любое решение, начавшееся вне эллипсоида, стремится к данному эллипсоиду (асимптотически или за конечное время).

Инвариантный эллипсоид можно рассматривать как характеристику влияния неопределенностей на траектории системы. Тогда "минимальный" (в некотором смысле) инвариантный эллипсоид будет соответствовать некоторому робастному управлению. Таким образом, основная задача состоит в синтезе линейной обратной связи по выходу, которая гарантирует сходимость любой траектории системы (3), (4), (7) к "минимальному" инвариантному эллипсоиду. В данной работе используется критерий следа матрицы эллипсоида для определения минимальности эллипсоида.

3. Основной результат

Обозначая ошибку наблюдения состояния $e := x - \hat{x}$, получим

$$\dot{e} = (A - FC)e + w_x - Fw_y.$$

Введем в рассмотрение расширенный вектор $z := \begin{pmatrix} \hat{x} & e \end{pmatrix}^\top$, $z \in \mathrm{R}^{2n}$. Тогда

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{F}w, \tag{8}$$

где $\hat{A} := \begin{pmatrix} A + BK & FC \\ 0 & A - FC \end{pmatrix}$, $\hat{F} := \begin{pmatrix} 0 & F \\ I & -F \end{pmatrix}$ и $w := \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$.

Т е о р е м а 1. *Если задача оптимизации*

$$\mathrm{tr}(X_1) + \mathrm{tr}(H) \to \min \tag{9}$$

с ограничениями

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} R_1 & Y_2^\top C & 0 & Y_2^\top & X_2X_1 \\ C^\top Y_2 & A^\top X_2 + X_2A - Y_2^\top C - C^\top Y_2 + \tau_1 X_2 & X_2 & -Y_2^\top & I \\ 0 & X_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ Y_2 & -Y_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ X_1X_2 & I & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2}K_x^{-1} \end{pmatrix} \leqslant 0, \\
\begin{pmatrix} -R_1 - 2X_2 & I \\ I & X_1A^\top + AX_1 + Y_1B^\top + BY_1^\top + \tau_1 X_1 \end{pmatrix} \leqslant 0, \\
\begin{pmatrix} H & I \\ I & X_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \tau_1 \geqslant \delta\tau_2 + \tau_3, \quad \tau_2 \geqslant 0, \quad \tau_3 \geqslant 0, \\
X_1 \geqslant 0, \quad X_2 \geqslant 0, \quad H \geqslant 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

имеет решение по отношению к матричным переменным $H, X_1, X_2, R_1, R_2 \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $Y_1 \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $Y_2 \in \mathrm{R}^{k\times n}$ *и скалярным переменным* τ_1, τ_2, τ_3, *тогда эллипсоид с матрицей*

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2^{-1} \end{pmatrix} \tag{11}$$

является "квазиминимальным" инвариантным эллипсоидом системы (8), (2), (5) *с матрицей обратных связей*

$$K = \left(X_1^{-1}Y_1\right)^\top \tag{12}$$

и матрицей наблюдателя

$$F = \left(Y_2 X_2^{-1}\right)^\top. \tag{13}$$

Доказательства данного и последующих утверждений представлены в Приложении.

Замечание 1. Поскольку доказательство теоремы 1 основано на S-процедуре и Λ-неравенстве, которые дают верхние оценки для матричных неравенств, то можно гарантировать лишь отыскание "квазиминимального" инвариантного эллипсоида.

При ограничении на управление вида $\|u\| \leqslant \|x\|_{K_u}$ получаем матричное неравенство

$$K^\top K \leqslant K_u, \qquad K_u \in \mathrm{R}^{n\times n}, \quad K_u > 0, \tag{14}$$

для которого справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Включение в рассмотрение условия (14) *приводит к добавлению в систему матричных неравенств ограничения*

$$\begin{pmatrix} 2X_1 - K_u^{-1} & Y_1 \\ Y_1^\top & I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{15}$$

4. Вычислительные аспекты синтеза робастного регулятора

Задача оптимизации (9), в сущности, является билинейной, поскольку в матричных ограничениях (10) встречается произведение вида $X_1 X_2$. Численное решение этой задачи часто бывает весьма затруднительным, поскольку допустимое множество, определяемое билинейным матричным неравенством, в общем случае невыпуклое. Методы релаксации (например, в [22, 23]) и алгоритмы нелинейного программирования (например, методы типа ветвей и границ) могут быть рассмотрены в качестве двух возможных альтернатив решения данной билинейной задачи. Эффективность известного пакета "PENBMI" для системы MATLAB существенно зависит от выбора начальной точки, которая фактически должна быть близка к оптимальному решению [24]. Алгоритм, реализованный в данном пакете, использует метод штрафных функций. Лемма 2, предложенная далее, упрощает выбор допустимой начальной точки.

Лемма 2. Допустимое множество, заданное системой неравенств:

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} R_1 & Y_2^\top C & 0 & Y_2^\top & 0 \\ C^\top Y_2 & A^\top X_2 + X_2 A - Y_2^\top C - C^\top Y_2 + \tau_1 X_2 & X_2 & -Y_2^\top & I \\ 0 & X_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ Y_2 & -Y_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \leqslant 0, \\
\begin{pmatrix} -R_1 - 2X_2 & I \\ I & X_1 A^\top + A X_1 + Y_1 B^\top + B Y_1^\top + \tau_1 X_1 + \Lambda \end{pmatrix} \leqslant 0, \\
\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\tau_2} K_x^{-1} - R_2 & X_1 \\ X_1 & -\Lambda \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & X_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad 0 < \Lambda \in \mathrm{R}^{n\times n}, \\
\tau_1 \geqslant \delta\tau_2 + \tau_3, \quad \tau_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,
\end{gathered} \tag{16}$$

является подмножеством допустимого множества, определяемого системой неравенств (10).

З а м е ч а н и е 2. При фиксированных скалярных параметрах τ_1 и τ_2 матричные неравенства (16) становятся линейными и могут быть решены с помощью пакетов LMI-Toolbox, SeDuMi и Yalmip системы MATLAB.

З а м е ч а н и е 3. Задача оптимизации (9) также может быть приближенно решена с использованием следующей процедуры:

1) для фиксированных скалярных параметров τ_1, τ_2 решаем задачу оптимизации (9) с линейными матричными ограничениями (16);
2) осуществляется поиск оптимального решения задачи (9) по отношению к скалярным переменным τ_1, τ_2.

5. Робастная стабилизация космического аппарата

5.1. Полная модель

Рассмотрим модель космического аппарата с двумя упругими динамическими элементами (стержнями) (см., например, [25]), обладающими диссипативными свойствами (рис. 1).

Определим следующие три системы координат: $O_{x_0y_0z_0}$ – инерциальная система координат с началом O в центре масс механической системы; $Ox_1y_1z_1$ – система координат, жестко связанная с космическим аппаратом и началом в точке O; O_1xyz – система координат, связанная с недеформированным стержнем и началом в точке его закрепления O_1.

Будем изучать управляемые движения аппарата лишь вокруг его продольной оси и будем считать, что стержни совершают антисимметрические колебания. Положение системы O_{x1y1z1} определяется углом поворота космического аппарата $\gamma(t)$. Отклонение стержня от его невозмущенного состояния обозначается $y(x,t)$. Если считать, что управляющий момент $u(t)$ прикладывается к основному телу, а стержни обладают свойством внутреннего вязкого трения и внешние возмущения $f_0\,(t,\gamma,\dot{\gamma})$, $\bar{f}\,(t,x,y,\gamma,\dot{\gamma})$ действуют как на основное тело, так и на динамические элементы, то

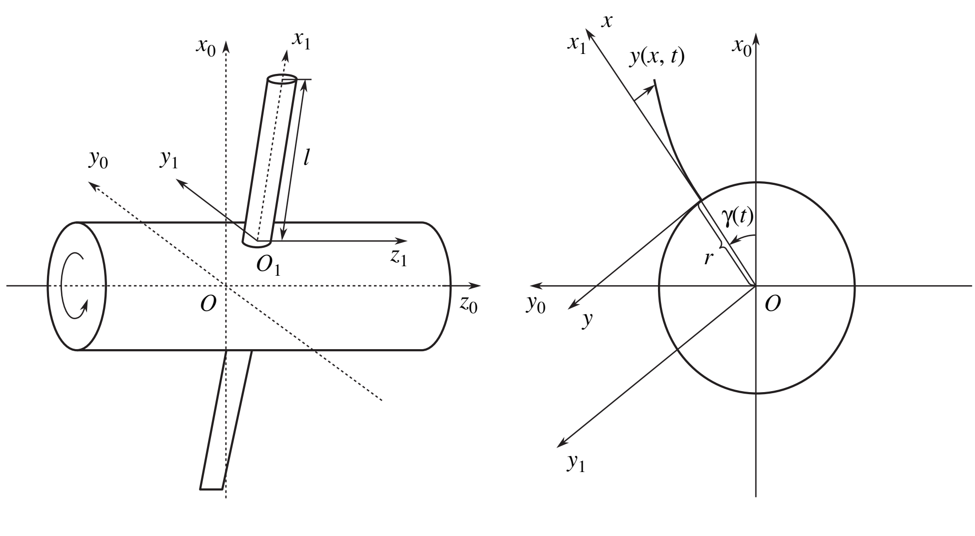

Рис. 1. Модель космического аппарата.

уравнение движения системы будет иметь вид:

$$J\ddot{\gamma}(t) + 2\int\limits_0^l m(x+r)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}dx = u(t) + \bar{f}_0, \tag{17}$$

$$m(x+r)\ddot{\gamma} + m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + EI\chi\frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t \partial x^4} = \bar{f} \tag{18}$$

с граничными условиями

$$y(0,t) = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0,$$

где r – расстояние от продольной оси до точки закрепления стержня, l – длина стержня, EI – изгибная жесткость стержня, χ – коэффициент внутреннего вязкого трения, m – погонная масса стержня, J_0 – момент инерции основного тела относительно оси OZ_0, u – управляющий момент, а J – момент инерции всей системы:

$$J = J_0 + 2\int\limits_0^l m(x+r)^2 dx.$$

5.2. Приближенная модель

Используя метод Галеркина (см., например, [раздел 18.6.2 в 26]), можно предположить приближенно, что

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^k q_i(t)\Phi_i(x), \tag{19}$$

где $\Phi_i(x)$ – собственная форма, соответствующая положительному собственному числу λ_i положительного самосопряженного оператора

$$L\Phi(x) = \frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}, \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(l) = \Phi'''(l) = 0,$$

где

$$\frac{d^4\Phi_i(x)}{dx^4} \equiv \lambda_i\Phi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

После подстановки (19) в (17) и (18), умножения (18) на $\Phi_i(x)$ и интегрирования по интервалу $[0,l]$ получаем:

$$J\ddot{\gamma} + 2\sum_{i=1}^k p_i\ddot{q}_i = u(t) + f_0, \tag{20}$$

$$p_i\ddot{\gamma} + a_i\ddot{q}_i + b_i\dot{q}_i + c_iq_i = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,k, \tag{21}$$

где

$$p_i = \int\limits_0^l m(x+r)\Phi_i(x)dx, \quad a_i = \int\limits_0^l m\Phi_i^2(x)dx, \quad b_i = \lambda_i EI\chi\int\limits_0^l \Phi_i^2(x)dx,$$

$$c_i = \lambda_i EI\int\limits_0^l \Phi_i^2(x)dx, \quad f_i\left(t,q,\gamma,\dot{\gamma}\right) = \int\limits_0^l \bar{f}\left(t,x,\sum_{i=1}^k q_i\Phi_i(x),\gamma,\dot{\gamma}\right)\Phi_i(x)dx.$$

Рассмотрим случай одного тона колебаний гибких стержней ($k = 1$). Введем следующие переменные состояния: $x_1 = \gamma$, $x_2 = \dot{\gamma}$, $x_3 = q_1$ и $x_4 = \dot{q}_1$. Тогда для модели космического аппарата с параметрами $J_0 = 150$, $l = 7{,}5$, $m = 0{,}53$, $r = 3$, $EI = 20$ и $\chi = 0{,}1$ получим приближенную модель:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0028 & 0{,}0142 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}0825 & -0{,}4126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0076 \\ 0 \\ -0{,}1676 \end{pmatrix} u + w_x,$$

где

$$w_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}0076 & 0{,}0037 \\ 0 & 0 \\ -0{,}1676 & -0{,}0979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что лишь угол γ и угловая скорость $\dot{\gamma}$ доступны для измерения. Другими словами, выход системы имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + w_y,$$

где $w_y \in \mathrm{R}^2$ – ограниченный шум на выходе системы

$$w_y^\top K_\eta w_y \leqslant 1, \quad K_\eta = \begin{pmatrix} 530 & 25 \\ 25 & 1960 \end{pmatrix}.$$

Предположим также, что внешние возмущения, действующие на систему, удовлетворяют оценкам

$$|f_0| \leqslant 0{,}05|\gamma| + 0{,}1|\dot{\gamma}| + 0{,}06|q| + 0{,}11|\dot{q}|$$

и

$$|f_1| \leqslant 0{,}011|\gamma| + 0{,}02|\dot{\gamma}| + 0{,}07|q| + 0{,}012|\dot{q}|.$$

Тогда данные ограничения могут быть представлены в виде (5) с матрицами

$$K_f = 10^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_x = \begin{pmatrix} 1{,}1283 & 0{,}1001 & 0{,}1112 & 0{,}0491 \\ 0{,}1001 & 1{,}0781 & 0{,}0868 & 0{,}0383 \\ 0{,}1112 & 0{,}0868 & 1{,}0964 & 0{,}0426 \\ 0{,}0491 & 0{,}0383 & 0{,}0426 & 1{,}0188 \end{pmatrix}$$

и $\delta = 0$. При ограничении на управление $|u| \leqslant 200\|x\|$ матрица K_u в неравенстве (14) принимает вид

$$K_u = 10^4 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

причем дополнительно считается, что $|u(t)| \leqslant 1$.

Для достаточно больших начальных отклонений космического аппарата от начала координат будем применять комбинированное управление, основанное на оптимальном по времени алгоритме, построенном по фазовым переменным γ, $\dot{\gamma}$ и локальной стабилизации с помощью линейной обратной связи. Как известно [27], минимальным по времени методом управления является алгоритм “разгон-торможение” вида

$$u = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant T_1, \\ 1, & T_1 < t \leqslant T_2, \\ 0, & t > T_2, \end{cases}$$

где

$$T_1 = J\dot{\gamma}(0) + \sqrt{(J^2\dot{\gamma}^2(0) + 2J\gamma(0))/2},$$
$$T_2 = J\dot{\gamma}(0) + 2\sqrt{(J^2\dot{\gamma}^2(0) + 2J\gamma(0))/2}.$$

Для локальной стабилизации при ($t > T_2$) линейное управление будет строиться в соответствии с результатами, полученными в разделе 4. Тогда параметры управления K и F, реализующие робастную линейную обратную связь, имеют вид

$$K = \begin{pmatrix} -1{,}2617 & -50{,}4988 & 0{,}4300 & 4{,}25233 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0{,}5060 & 0{,}4499 \\ 0{,}1106 & 0{,}0984 \\ 0{,}0526 & 0{,}0412 \\ -0{,}0058 & -0{,}0031 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 представлены графики изменения реального и наблюдаемого угловых положений космического аппарата. График управления $u(t)$ показан на рис. 3. На

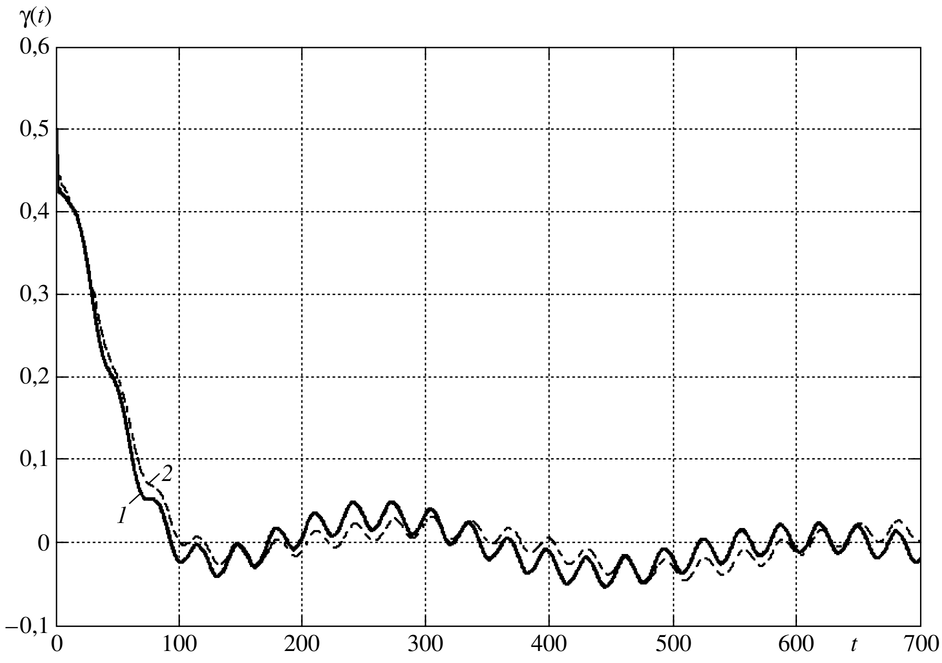

Рис. 2. Угловое положение космического аппарата: *1* – реальное положение, *2* – наблюдаемое положение.

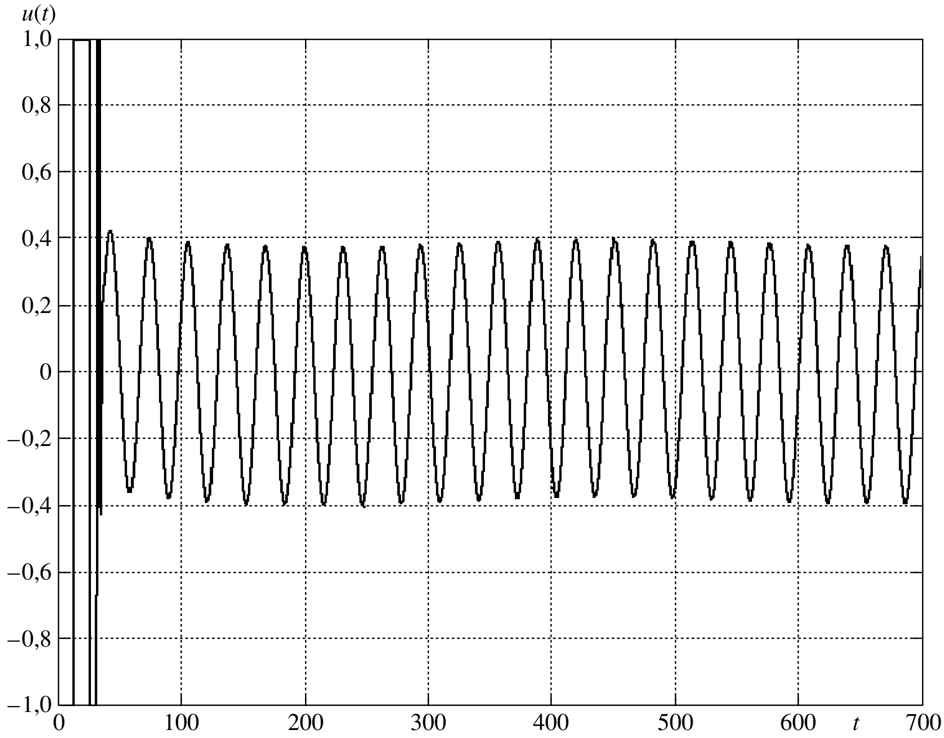

Рис. 3. Закон управления.

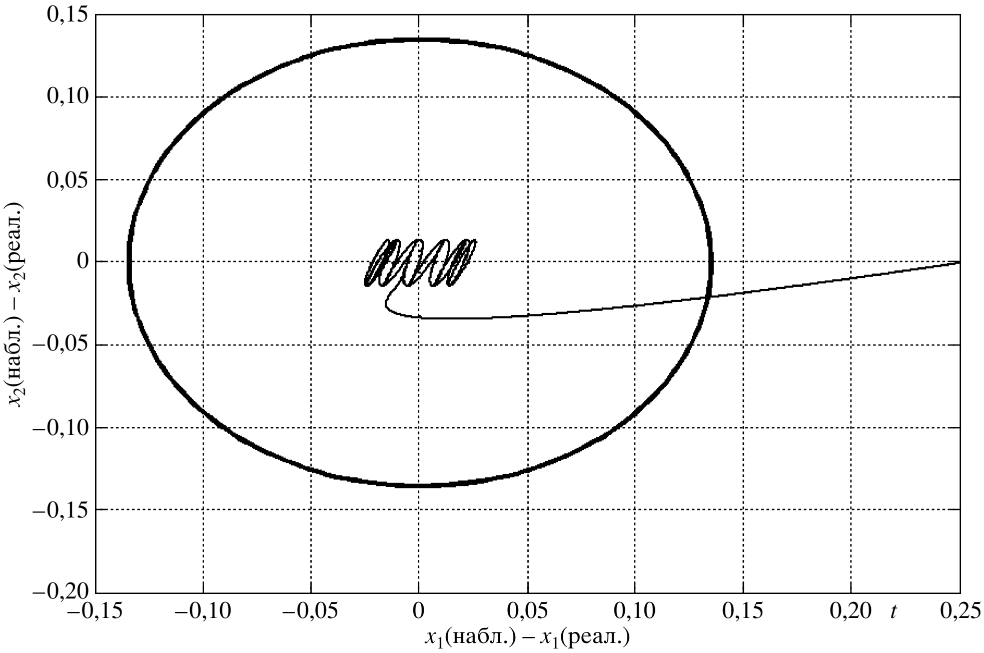

Рис. 4. Проекция инвариантного эллипсоида.

рис. 4 изображена проекция инвариантного эллипсоида для векторной ошибки наблюдения $e = x - \hat{x}$.

6. Заключение

В работе представлена схема робастной стабилизации по выходу для нелинейных систем в условиях неопределенности и внешних возмущений, основанная на решении специальной оптимизационной задачи. Принципиальным в данной схеме является линейный регулятор, использующий текущие оценки состояния и построенный с помощью метода инвариантных эллипсоидов. Регулятор минимизирует эффект воздействия возмущений на систему и является робастным по отношению к ее нелинейностям. Полученную оптимизационную задачу с билинейными матричными ограничениями удалось с помощью специальных преобразований свести к задаче с параметризованными (по параметрам τ_1 и τ_2) линейными матричными неравенствами, которая позволяет найти квазиоптимальное решение. Робастность данной схемы подтверждена численным моделированием для специальной модели космического аппарата.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Выберем кандидата на функцию Ляпунова в виде

$$V(z) := (z, P^{-1}z), \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

где $P > 0$ – матрица инвариантного эллипсоида, который будем минимизировать. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (z, P^{-1}\dot{z}) + (\dot{z}, P^{-1}z) = (z, P^{-1}(\hat{A}z + \hat{F}w)) + ((\hat{A}z + \hat{F}w), P^{-1}z) = \\ &= z^\top[\hat{A}^\top P^{-1} + P^{-1}\hat{A}]z + w^\top \hat{F}^\top P^{-1}z + z^\top P^{-1}\hat{F}w. \end{aligned}$$

Эллипсоид $(z, P^{-1}z) \leqslant 1$ будет инвариантным лишь тогда, когда $\dot{V}(x) \leqslant 0$ при z, не принадлежащих эллипсоиду, т.е

$$\text{(П.1)} \qquad z^\top P^{-1}z \geqslant 1.$$

Для производной имеем

$$\text{(П.2)} \qquad \dot{V} = \begin{pmatrix} z \\ w_x \\ w_y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \hat{A}^\top P^{-1} + P^{-1}\hat{A} & P^{-1}\hat{F} \\ \hat{F}^\top P^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w_x \\ w_y \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Помимо (П.1) и (П.2), имеем

$$\text{(П.3)} \qquad w_x K_f w_x \leqslant \delta + x^\top K_x x \quad \text{и} \quad \|w_y\|^2_{K_\eta} \leqslant 1.$$

Для получения окончательного условия на матрицу инвариантного эллипсоида применим S-процедуру (см., например, [26]).

Пусть $v = (z^\top, w_x^\top, w_y^\top)^\top$ и

$$A_0 := \begin{pmatrix} \hat{A}^\top P^{-1} + P^{-1}\hat{A} & P^{-1}\hat{F} \\ \hat{F}^\top P^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 := 0,$$
$$A_1 := \begin{pmatrix} -P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = -1,$$
$$A_2 := \begin{pmatrix} -K_z & 0 & 0 \\ 0 & K_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 := \delta \quad \text{и} \quad K_z = \begin{pmatrix} K_x & K_x \\ K_x & K_x \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\eta \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = 1.$$

Тогда

$$\dot{V} \leqslant 0 \Leftrightarrow v^\top A_0 v \leqslant \alpha_0,$$
$$z^\top P^{-1} z \geqslant 1 \Leftrightarrow v^\top A_1 v \leqslant \alpha_1,$$
$$w_x K_f w_x \leqslant \delta + x^\top K_x x \Leftrightarrow v^\top A_2 v \leqslant \alpha_2$$

и

$$\|w_y\|^2_{K_\eta} \leqslant 1 \Leftrightarrow v^\top A_3 v \leqslant \alpha_3.$$

Наконец, в силу S-процедуры если существуют числа τ_1 , τ_2 и τ_3, такие что

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \geqslant \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3, \\ &A_0 \leqslant \tau_1 A_1 + \tau_2 A_2 + \tau_3 A_3, \\ &\tau_1 \geqslant 0, \quad \tau_2 \geqslant 0, \quad \tau_3 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{П.4}$$

то неравенство (П.2) будет справедливым при условии, что неравенства (П.1), (2) и (5) выполнены, а, следовательно, эллипсоид с матрицей P является инвариантным для рассматриваемой системы. Обозначим:

$$Q := A_0 - \tau_1 A_1 - \tau_2 A_2 - \tau_3 A_3, \quad A_K := A + BK + \frac{\tau_1}{2} I, \quad A_F := A - FC + \frac{\tau_1}{2} I.$$

Тогда второе условие в (П.4) принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} A_K^\top P_1 + P_1 A_K + \tau_2 K_x & P_1 FC + \tau_2 K_x & 0 & P_1 F \\ C^\top F^\top P_1 + \tau_2 K_x & A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \tau_2 K_x & P_2 & -P_2 F \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 \\ F^\top P_1 & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

а первое переписывается как

$$\tau_1 \geqslant \delta\tau_2 + \tau_3, \quad \tau_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{П.5}$$

Применяя эквивалентное преобразование

$$T_1 = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

к матрице Q, получаем

$$Q_1 = T_1 Q T_1^\top = \begin{pmatrix} \Psi_1 & FC + \tau_2 P_1^{-1} K_x & 0 & F \\ C^\top F^\top + \tau_2 K_x P_1^{-1} & \Psi_2 & P_2 & -P_2 F \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 \\ F^\top & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &:= P_1^{-1} A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1} + \tau_2 P_1^{-1} K_x P_1^{-1}, \\ \Psi_2 &:= A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \tau_1 P_2 + \tau_2 K_x. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$Q_1 = \tilde{Q} + \begin{pmatrix} P_1^{-1} \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau_2 K_x \begin{pmatrix} P_1^{-1} & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{П.6}$$

где

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1} & FC & 0 & F \\ C^\top F^\top & A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \tau_1 P_2 & P_2 & -P_2 F \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 \\ F^\top & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta \end{pmatrix}.$$

Применяя дополнение по Шуру к (П.6), получаем:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} P_1^{-1} A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1} & FC & 0 & F & P_1^{-1} \\ C^\top F^\top & A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \tau_1 P_2 & P_2 & -P_2 F & I \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ F^\top & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ P_1^{-1} & I & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} K_x^{-1} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

После преобразования

$$T_2 = \begin{pmatrix} P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

имеем:

(П.7) $\quad Q_3 = T_2 Q_2 T_2^\top =$

$$\begin{pmatrix} P_2(P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1})P_2 & P_2FC & 0 & P_2F & P_2P_1^{-1} \\ C^\top F^\top P_2 & A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \tau_1 P_2 & P_2 & -P_2F & I \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ F^\top P_2 & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ P_1^{-1}P_2 & I & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_2}K_x^{-1} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

В силу Λ-неравенства (см., например, [26]) выполняется неравенство

(П.8) $\quad XY^\top + YX^\top \leqslant X\Lambda X^\top + Y\Lambda^{-1}Y^\top,$

справедливое при любых $X \in \mathrm{R}^{n\times k}$, $Y \in \mathrm{R}^{n\times k}$, и при $0 < \Lambda = \Lambda^\top \in \mathrm{R}^{k\times k}$ для $X = P_2$ и $Y = I$ получаем

$$P_2 + P_2 \leqslant P_2 \Lambda P_2 + \Lambda^{-1}.$$

Выбирая

$$\Lambda := -(P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1}),$$

имеем

(П.9) $\quad P_2(P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1})P_2 \leqslant$
$\leqslant -P_2 - P_2 - (P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1})^{-1}.$

Применяя дополнение по Шуру к неравенству

(П.10) $\quad -2P_2 - (P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1})^{-1} \leqslant R_1,$

получаем

(П.11) $$\begin{pmatrix} -R_1 - 2P_2 & I \\ I & P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \tau_1 P_1^{-1} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Обозначая

$$X_1 := P_1^{-1}, \quad Y_1 := P_1^{-1}K^\top, \quad X_2 := P_2, \quad Y_2 := F^\top P_2,$$

для (П.9), (П.10), (П.11) с учетом матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X & Y^\top \\ Y & Z \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} X' & Y^\top \\ Y & Z \end{pmatrix},$$

справедливого при всех $X = X^\top$, $Z = Z^\top$ и $X' = X'^\top \geqslant X$, окончательно получаем систему матричных неравенств для отыскания инвариантного эллипсоида:

$$\begin{pmatrix} R_1 & Y_2^\top C & 0 & Y_2^\top & X_2X_1 \\ C^\top Y_2 & A^\top X_2 + X_2 A - Y_2^\top C - C^\top Y_2 + \tau_1 X_2 & X_2 & -Y_2^\top & I \\ 0 & X_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ Y_2 & -Y_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ X_1X_2 & I & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_2}K_x^{-1} \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

(П.12) $$\begin{pmatrix} -R_1 - 2X_2 & I \\ I & X_1A^\top + AX_1 + Y_1B^\top + BY_1^\top + \tau_1 X_1 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Поиск минимального эллипсоида, очевидно, связан с минимизацией функционала

(П.13) $\quad \operatorname{tr}(X_1) + \operatorname{tr}(X_2^{-1}) \to \min$

при ограничениях (П.5) и (П.12). Вводя дополнительное неравенство

$$H \geqslant X_2^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} H & I \\ I & X_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

задачу оптимизации нелинейного функционала (П.13) удается свести к линейной

$$\operatorname{tr}(X_1) + \operatorname{tr}(H) \to \min .$$

Доказательство леммы 1. В силу формулы $K = Y_1^\top X_1^{-1}$ для неравенства (14) имеем

$$\left(X_1^{-1} Y_1\right)\left(Y_1^\top X_1^{-1}\right) \leqslant K_u,$$

что равносильно

(П.14) $\quad Y_1 Y_1^\top \leqslant X_1 K_u X_1.$

Используя Λ-неравенство для $X = X_1$, $Y = I$ и $\Lambda = K_u > 0$, получаем:

$$2X_1 - K_u^{-1} \leqslant X_1 K_u X_1,$$

откуда, используя дополнение по Шуру для (П.14), окончательно получаем:

$$0 \leqslant \begin{pmatrix} 2X_1 - K_u^{-1} & Y_1 \\ Y_1^\top & I \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 2. В силу Λ-неравенства (П.8) для

$$X^\top := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y := \begin{pmatrix} P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матричное неравенство (П.7) может быть оценено как

$$Q_3 \leqslant Q_3' \leqslant 0,$$

где

(П.15)
$$Q_3' := \begin{pmatrix} \begin{matrix} P_2(P_1^{-1}A_K^\top + A_K P_1^{-1} + \\ + \tau_1 P_1^{-1} + \Lambda)P_2 \end{matrix} & P_2 F C & 0 & P_2 F & 0 \\ C^\top F^\top P_2 & \begin{matrix} A_F^\top P_2 + P_2 A_F + \\ + \tau_1 P_2 \end{matrix} & P_2 & -P_2 F & I \\ 0 & P_2 & -\tau_2 K_f & 0 & 0 \\ F^\top P_2 & -F^\top P_2 & 0 & -\tau_3 K_\eta & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \begin{matrix} -\dfrac{1}{\tau_2} K_x^{-1} + \\ + P_1^{-1} \Lambda^{-1} P_1^{-1} \end{matrix} \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Неравенство (П.11) в таком случае примет вид

$$\begin{pmatrix} -R_1 - 2X_2 & I \\ I & X_1 A^\top + A X_1 + Y_1 B^\top + B Y_1^\top + \tau_1 X_1 + \Lambda \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

От нелинейности вида $-\frac{1}{\tau_2}K_x^{-1} + P_1^{-1}\Lambda^{-1}P_1^{-1}$ в (П.15) можно избавиться путем введения новой переменной R_2, удовлетворяющей неравенству

$$P_1^{-1}\Lambda^{-1}P_1^{-1} - \frac{1}{\tau_2}K_x^{-1} \leqslant R_2, \tag{П.16}$$

и, применения дополнения по Шуру к (П.16), получаем:

$$\begin{pmatrix} -R_2 - \frac{1}{\tau_2}K_x^{-1} & P_1^{-1} \\ P_1^{-1} & -\Lambda \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* On the Minmax Reachability of Target Set and Target Tubes // Automatica J. IFAC. 1971. V. 7. P. 233–247.
2. *Bertsekas D.P.* Infinite-time Reachability of State-Space Regions by Using Feedback Control // IEEE Trans. Automat Control. 1972. V. 17. P. 604–613.
3. *Glover D., Schweppe F.* Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances // IEEE Trans. Automat Control. 1971. V. 16. No. 5. P. 411–423.
4. *Kurzhanski A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control, Boston, MA: Birkhauser, 1997.
5. *Francis B.A., Helton J.W., Zames G.* H^{∞}-Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1984. V. AC-29. P. 888–900.
6. *Doyle J.C.* Synthesis of Robust Controllers and Filters // Proc. IEEE Conf. Decision Contr. 1983. P. 109–114.
7. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор для линейных объектов с ограниченным шумом // АиТ. 1984. №5. С. 39–46.
8. *Vidyasagar M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Contr. 1986. V. 31. P. 527–534.
9. *Dahleh M.A., Pearson J.B.* l_1 Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-time Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1987. V. 32. P. 314–322.
10. *Nagpal K., Abedor J., Poolla K.* An LMI Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization: Filtering and Control. Proc. American Contr. Conf. 1994. P. 742–746.
11. *Abedor J., Nagpal K., and Poola K.* A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust Nonlinear Contr. 1996. V. 6. P. 899–927.
12. *Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia: SIAM, 1994.
13. *Blanchini F.* Set Invariance in Control – A Survey // Automatica J. IFAC. 1999. V. 35. No. 11. P. 1747–1767.
14. *Blanchini F., Miani S.* Set Theoretic Methods in Control. Systems&Control: Foundations & Applications, Boston, MA: Birkhauser, 2007.
15. *Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A.* Rejection of Bounded Disturbances via Invariant Ellipsoids Technique // Proc. IEEE Conf. Decision Contr. 2006. P. 1429–1434.
16. *Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. No. 3. P. 467–486.
17. *Polyak B.T., Topunov M.V.* Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. No. 5. P. 801–818.
18. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant Ellipsoids Approach to Robust Rejection of Persistent Disturbances // Proc. World Congress, IFAC. 2008. P. 3976–3981.
19. *Safonov M.G., Goh K. C., Ly J. H.* Control System Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities // Proc. American Contr. Conf. 1994. P. 45–49.

20. *Toker O., Ozbay H.* On the NP-hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static Output Feedback // Proc. American Contr Conf. 1995. P. 2525–2526.
21. *Xiao Y., Crusca F., Chu E.* Bilinear Matrix Inequalities in Robust Control: Phase I – Problem Formulation, Monash University, Melbourne, Australia, 1996. Department of Electrical & Computer Systems Engineering, Technical Report TR-96-3.
22. *Loefberg J.* Minimax Approaches to Robust Model Predictive Control, Ph.D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Linkoeping University, 2003.
23. *Boyd S., Vandenberghe L.* Semidefinite Programming Relaxations of Non-Convex Problems in Control and Combinatorial Optimization // Communications, Computation, Control and Signal Processing: A Tribute to Thomas Kailath. 1997. P. 279–288.
24. *Henrion D., Loefberg J., Kocvara M., Stingl M.* Solving Polynomial Static Output Feedback Problems with PENBMI // Proc. IEEE Conf. Decision Contr. 2006. P. 7581–7586.
25. *Yefremov M.S., Polyakov A.Y., Strygin V.V.* An Algorithm for the Active Stabilization of a Spacecraft with Viscoelastic Elements Under Conditions of Uncertainty. J. Applied Mathematics Mechanics. 2006. P. 723–733.
26. *Poznyak A.S.* Advanced mathematical tools for automatic control Engineers: Deterministic Techniques, Elsevier, 2008.
27. *Kirk D.E.* Optimal Control Theory: An Introduction, Englewood Hills: Prentice-Hall, 1970.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 24.09.2008