PACS 02.30.Yy

© 2006 г. С. А. НАЗИН, канд. физ.-мат. наук,
Б. Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук,
М. В. ТОПУНОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОДАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ[1]

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений впервые рассматривалась в l_1-оптимизации. В данной работе предлагается новый подход к этой проблеме на основе метода инвариантных эллипсоидов. Главным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств. Рассмотрен непрерывный и дискретный варианты задачи. В качестве примера исследуется управление “двойным маятником”.

1. Введение

Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления. Она исследуется и в линейно-квадратичной оптимизации (LQG), где возмущение предполагается случайным, и в H_∞-оптимизации, где помехи рассматриваются как случайные, либо из класса L_2 (т. е. убывают с течением времени).

Задачей о подавлении произвольных ограниченных внешних возмущений стали интересоваться еще в середине прошлого века. В 40-е годы так называемой проблемой о накоплении возмущений занимался Булгаков [1]. Однако основное внимание тогда уделялось проблеме анализа — каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними возмущениями, что, по сути, являлось задачей программного оптимального управления, поскольку внешние возмущения рассматривались как управления. Значительно позже появляются работы по компенсации ограниченных возмущений (см. [2]), в которых, впрочем, не предлагались методы синтеза оптимальных регуляторов.

Собственно задача об оптимальном подавлении произвольных ограниченных возмущений была сформулирована в работе Е. Д. Якубович [3] и для некоторых частных случаев решена в [3–5]. Полное решение было построено в работах Барабанова и Граничина [6] и, позже, — Далеха и Пирсона [7]. Впоследствии она получила название l_1-оптимизации. Тем не менее, методы l_1-оптимизации имеют ряд существенных недостатков; отметим лишь достаточно большой порядок получающихся оптимальных регуляторов и асимптотический характер оценок. Наряду с l_1-оптимальным управлением, хорошо известны также методы динамического программирования для подобных задач [8–10].

Приведенные выше результаты относятся к дискретным системам; их обобщение на непрерывный случай (L_1-оптимизация) вызывает дополнительные сложности. В целом,

[1]Работа осуществлялась при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00114 и 05-08-01177) и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН №22. Работа С. А. Назина осуществлялась при поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант МК-1294.2005.8).

подавление произвольных ограниченных возмущений традиционно считается трудной задачей в теории управления [11, 12].

Нами предлагается иной подход к данной проблематике, основанный на методе инвариантных множеств, в частности, инвариантных эллипсоидов. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах теории гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Швеппе [13], Бертсекаса [9, 14], Куржанского [15] и Черноусько [16]. Отметим, что инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями, например, областей достижимости динамических систем; это позволяет их широко использовать в задачах анализа. Однако концепция инвариантности также активно применяется и в других разделах теории систем и автоматического управления (см. обзорную статью Бланкини [17]). Работа [18] посвящена эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости линейной дискретной системы.

В настоящей работе задача о подавлении произвольных ограниченных внешних возмущений формулируется в терминах инвариантных эллипсоидов. Рассматривается синтез статической обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. При этом исходные задачи анализа и синтеза управления удается свести к эквивалентным условиям в виде линейных матричных неравенств и задаче полуопределенного программирования, которые легко решаются численно.

Необходимо упомянуть, что техника линейных матричных неравенств (LMI) [19], очень популярная в последнее время, уже использовалась для подобных целей подавления возмущений [19–21]. Примером может служить статья [20], в которой авторы решают задачи анализа и синтеза при ограниченных возмущениях для непрерывных систем. В данной статье нами получены похожие результаты и для дискретных систем с использованием метода инвариантных эллипсоидов (более подробное сравнение с [20] дано ниже). Предложенный подход позволяет получать простые оптимальные регуляторы, а также, с нашей точки зрения, имеет большой потенциал и возможности для обобщений. В работе рассмотрен непрерывный и дискретный варианты задачи, а также численный пример управления “двойным маятником”. Предварительные результаты докладывались на конференциях [22, 23].

2. Инвариантные эллипсоиды. Анализ

2.1. Линейная непрерывная система

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешние возмущения, ограниченные в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Таким образом, мы рассматриваем L_∞-ограниченные внешние возмущения. Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим.

Будем полагать, что система (1) устойчива (т. е. матрица A гурвицева — действительные части ее собственных значений отрицательны), пара (A, D) управляема, а C — матрица максимального ранга. Определим семейство инвариантных эллипсоидов данной системы.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P > 0, \tag{3}$$

называется инвариантным по переменной x (по состоянию) для динамической системы (1), (2), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$. Матрицу P будем называть матрицей эллипсоида $\mathcal{E}_x$.

Другими словами, любая траектория $x(t)$ системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду. Аналогичным образом определяется инвариантный эллипсоид по переменной y, т. е. по выходу системы. Он задается выражением

$$\mathcal{E}_y = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \quad y^{\mathrm{T}} \left(CPC^{\mathrm{T}}\right)^{-1} y \leqslant 1\right\},$$

где $P > 0$ — матрица инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}_x$.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В нашем случае задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений $w(t)$ на вектор выхода системы $y(t)$. В этой связи нас будут интересовать минимальные в некотором смысле инвариантные эллипсоиды $\mathcal{E}_y$.

В качестве целевой функции в данной работе будем рассматривать критерий следа

$$f(P) = \mathrm{tr}\left[CPC^{\mathrm{T}}\right], \tag{4}$$

который соответствует сумме квадратов полуосей инвариантного эллипсоида по выходу исходной системы. В качестве критерия можно рассматривать и другие функции, например, $g(P) = \det\left[CPC^{\mathrm{T}}\right]$, пропорциональная объему эллипсоида $\mathcal{E}_y$, или $h(P) = \|CPC^{\mathrm{T}}\|$, операторная норма матрицы CPC^{T}, соответствующая значению наибольшей полуоси эллипсоида $\mathcal{E}_y$. Однако, в силу линейности, наиболее прост именно критерий следа (4). Тем самым, степень влияния L_∞-ограниченных внешних возмущений $w(t)$ на выход системы $y(t)$ сводится к нахождению инвариантного эллипсоида, минимального по критерию $f(P)$. Поскольку система предполагается устойчивой, то существует конечный и единственный инвариантный эллипсоид, минимизирующий любую из указанных выше функций.

Инвариантные эллипсоиды рассматривались ранее как аппроксимации достижимого множества

$$\mathcal{R} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = x(t),\ t \geqslant 0 \text{ — решение (1), (2) при } x(0) = 0\right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{R}$, вообще говоря, не эллипсоид (но некоторое замкнутое ограниченное выпуклое множество) и при этом $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_x$. Однако $\mathcal{E}_x$ (даже минимальный по какому-либо критерию) может быть весьма плохой аппроксимацией $\mathcal{R}$ (см. пример в [24]). С этой точки зрения, подход на основе инвариантных эллипсоидов подвергался критике [24] как слишком консервативный, т. е. дающий лишь субоптимальные решения. На наш взгляд, понятие инвариантного эллипсоида является более полезным и робастным по сравнению с множеством достижимости. В последнем предполагается, что начальные условия — нулевые, однако малое отклонение в начальном условии может привести к тому, что траектория выйдет за пределы $\mathcal{R}$. Для инвариантного эллипсоида мы можем учитывать неопределенность в начальном состоянии

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \big\{x: \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\big\}, \quad P_0 > 0,$$

требуя, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_x$, т. е.

$$P \geqslant P_0. \tag{5}$$

В дальнейшем мы, как правило, будем включать неопределенность начального состояния (т. е. условие (5)) в определение $\mathcal{E}_x$.

З а м е ч а н и е 1. *Если мы непосредственно задаем начальное условие $x(0) \neq 0$, то вместо ограничения* (5) *на матрицу P добавляется условие*

$$x^{\mathrm{T}}(0) P^{-1} x(0) \leqslant 1,$$

очевидным образом представимое в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} I & x^{\mathrm{T}}(0) \\ x(0) & P \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Т е о р е м а 1. *Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ вида* (3) *является инвариантным по состоянию для динамической системы* (1) *с L_∞-ограниченными внешними возмущениями тогда и только тогда, когда матрица P удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad P \geqslant P_0, \tag{6}$$

при некотором $\alpha > 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

С л е д с т в и е 1. *Минимальный по критерию $f(P)$ инвариантный эллипсоид системы* (1), (2), *при $\mathcal{E}_0 = \big\{0\big\}$ принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $P(\alpha)$, которые удовлетворяют уравнению Ляпунова*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7}$$

на интервале $0 < \alpha < -2 \max\limits_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, где $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A. При этом функция $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr}\big[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\big]$ строго выпукла на указанном интервале.

Доказательство следствия 1 приведено в Приложении.

Нетрудно видеть, что все минимальные инвариантные эллипсоиды удовлетворяют уравнению (7) вне зависимости от конкретного выбора критерия. Данное следствие позволяет при поиске минимального инвариантного эллипсоида ограничиться рассмотрением однопараметрического семейства (7), что сводит задачу к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале.

2.2. Линейная дискретная система

Введем аналогичные определения и для линейной дискретной динамической системы

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\
y_k &= Cx_k,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $y_k \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешние возмущения, ограниченные во все моменты времени:

$$
\|w_k\| \leqslant 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\tag{9}
$$

Таким образом, мы рассматриваем l_∞-ограниченные внешние возмущения.

Будем полагать, что система (8) устойчива (т. е. матрица A шуровская — ее собственные значения лежат внутри единичного круга), пара (A, D) управляема, а C — матрица максимального ранга. Определим семейство инвариантных эллипсоидов данной системы.

Определение 2. Эллипсоид с центром в начале координат

$$
\mathcal{E}_x = \left\{ x_k \in \mathbb{R}^n : \quad x_k^{\mathrm{T}} P^{-1} x_k \leqslant 1 \right\}, \quad P > 0,
\tag{10}
$$

называется инвариантным по переменной x_k (по состоянию) для дискретной динамической системы (8), (9), если из условия $x_0 \in \mathcal{E}_x$ следует выполнение условия $x_k \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \ldots$ Матрицу P будем называть матрицей эллипсоида $\mathcal{E}_x$.

Как и в непрерывном случае, если для системы (8) $\mathcal{E}_x$ определяет инвариантный эллипсоид (по состоянию x_k) с матрицей P, то эллипсоид

$$
\mathcal{E}_y = \left\{ y_k \in \mathbb{R}^m : \quad y_k^{\mathrm{T}} \left(CPC^{\mathrm{T}} \right)^{-1} y_k \leqslant 1 \right\}
$$

с матрицей CPC^{T} будет инвариантным по выходу системы y_k. Функция (4) при этом задает размер инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}_y$. Будем также предполагать, что x_0 находится в эллипсоиде $\mathcal{E}_0$.

Теорема 2. Эллипсоид $\mathcal{E}_x$ вида (10) является инвариантным для динамической системы (8) с l_∞-ограниченными внешними возмущениями тогда и только тогда, когда матрица P удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$
\frac{1}{\alpha} APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad P \geqslant P_0,
\tag{11}
$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Следствие 2. Минимальный по критерию $f(P)$ инвариантный эллипсоид системы (8), (9), при $\mathcal{E}_0 = \{0\}$ принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $P(\alpha)$, которые удовлетворяют дискретному уравнению Ляпунова

$$
\frac{1}{\alpha} APA^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^{\mathrm{T}} = 0
\tag{12}
$$

на интервале $\rho^2(A) < \alpha < 1$, *где* $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ — *спектральный радиус матрицы* A. *При этом функция* $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr}\bigl[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\bigr]$ *строго выпукла на указанном интервале.*

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении.

Таким образом, поиск минимального инвариантного эллипсоида сводится к задаче одномерной выпуклой минимизации среди семейства, порожденного уравнением (12).

3. Инвариантные эллипсоиды. Синтез

Для компенсации влияния произвольных ограниченных внешних возмущений на выход стационарной динамической системы, введем в рассмотрение статический регулятор в виде обратной связи по состоянию. Предлагаемый подход к синтезу управления заключается в том, что искомый оптимальный регулятор, минимизирующий влияние внешних возмущений, задается наименьшим инвариантным эллипсоидом замкнутой системы. В разделе последовательно рассмотрены непрерывный и дискретный случаи.

3.1. Непрерывная управляемая система

Рассмотрим линейную непрерывную управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + Dw, \quad x(0) \in \mathcal{E}_0, \\ y &= Cx + B_2u, \end{aligned} \tag{13}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $y \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $u \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2). При этом матрица A системы не предполагается гурвицевой, однако матричная пара (A, B_1) управляема, а также $B_2^{\mathrm{T}}C = 0$.

Целью является нахождение регулятора K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{14}$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа инвариантного эллипсоида выхода) подавляет воздействие внешних возмущений $w(t)$.

Заметим, что наличие ненулевой компоненты B_2u в (13) естественно; это позволяет избежать появления больших значений управления.

Система (13) с учетом (14) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K)x + Dw, \\ y &= (C + B_2K)x. \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя результаты раздела 2.1 по нахождению минимального инвариантного эллипсоида, мы приходим к следующей теореме, в которой поиск оптимального регулятора сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации.

Т е о р е м а 3. *Пусть для управляемой системы* (13) *внешние возмущения* L_∞-*ограничены и пара* (A, B_1) *управляема. Тогда задача синтеза статического регулятора* *по состоянию* (14)*, оптимально (в смысле следа инвариантного эллипсоида по выходу) подавляющего внешние возмущения, эквивалентна задаче минимизации*

$$\mathrm{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min \tag{16}$$

при ограничениях

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + B_1Y + Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad \alpha > 0, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad P \geqslant P_0, \tag{18}$$

где $Y = KP$, *а минимизация проводится по переменным* $\alpha \in \mathbb{R}$, $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *и* $Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Замечание 2. Мы не можем сформулировать утверждения о строгой выпуклости целевой функции и границах интервала для параметра α. *Отметим лишь существование некоторого* $\alpha^* > 0$, *такого, что при* $\alpha \geqslant \alpha^*$ *неравенство Ляпунова не будет иметь положительно определенного решения и система линейных матричных неравенств из условия теоремы 3 станет противоречивой.*

Пусть $\widehat{\alpha}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ и $\widehat{Z}$ доставляют минимум (16) при ограничениях (17) и (18). Тогда оптимальный регулятор находится из выражения $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$. При этом

$$u_{\max} = \max_{x^{\mathrm{T}}P^{-1}x\leqslant 1} Kx = \sqrt{\widehat{K}\widehat{P}\widehat{K}^{\mathrm{T}}}.$$

Отметим, что при фиксированном α данная задача сводится к минимизации линейной функции (16) при ограничениях (17) и (18), представляющих собой линейные матричные неравенства, т. е. к задаче полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming, SDP*), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации. Для ее численного решения существует множество пакетов, в частности, SeDuMi Toolbox, YALMIP Toolbox, а также LMI Toolbox системы Matlab.

В рамках данного подхода к подавлению внешних возмущений естественно потребовать введения ограничений на управление. Пусть $u \in \mathbb{R}^p$, $\mu > 0$ и

$$\|u\| \leqslant \mu. \tag{19}$$

Следующая лемма сводит ограничение (19) к рассмотрению эквивалентного линейного матричного неравенства.

Лемма 1. Пусть задана управляемая система (13) *с* L_∞*-ограниченными внешними возмущениями и управлением вида* $u = Kx$. *Пусть* P *определяет матрицу инвариантного эллипсоида* $\mathcal{E}_x$ *системы, а* $Y = KP$. *Тогда ограничение* (19) *эквивалентно выполнению для матриц* P *и* Y *линейного матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{20}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 3. *Лемма 1 полностью сохраняет свою силу и в дискретном случае.*

В процессе доказательства теоремы 3 мы строим функцию Ляпунова $V(x)$ для замкнутой системы (15), такую, что $\dot V(x) \leqslant 0$ при $V(x) \geqslant 1$ и $w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$. Естественно найти L_∞-ограниченное внешнее возмущение $w^*(t)$, максимизирующее $\dot V(x)$.

Л е м м а 2. *Для линейной непрерывной управляемой системы* (13) *внешнее возмущение $w^*(t)$ задается формулой*

$$w^*(t) = \frac{D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x(t)}{\left\|D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x(t)\right\|}.$$

В частности, при $m = 1$,

$$w^*(t) = \operatorname{sign}\bigl(D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x(t)\bigr).$$

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

3.2. Дискретная управляемая система

Приведем в этом параграфе дискретный аналог предыдущих рассуждений. Рассмотрим линейную дискретную управляемую систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + Dw_k, \quad x_0 \in \mathcal{E}_0,\\ y_k &= Cx_k + B_2u_k, \end{aligned} \tag{21}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $y_k \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $u \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (9). Матрица A при этом не предполагается шуровской, однако пара (A, B_1) управляема, а также $B_2^{\mathrm{T}}C = 0$.

Требуется найти регулятор K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k, \tag{22}$$

обеспечивающий минимальный по критерию следа (4) размер инвариантного эллипсоида по выходу.

Система (21) с учетом (22) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1K)x_k + Dw_k,\\ y_k &= (C + B_2K)x_k. \end{aligned} \tag{23}$$

Следующее утверждение является дискретным аналогом теоремы 3.

Т е о р е м а 4. *Пусть для дискретной управляемой системы* (21) *внешние возмущения l_∞-ограничены и пара (A, B_1) управляема. Тогда задача синтеза статического регулятора по состоянию* (22), *оптимально (в смысле следа инвариантного эллипсоида по выходу) подавляющего внешние возмущения, эквивалентна задаче минимизации линейной функции*

$$\operatorname{tr}\bigl[CPC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}\bigr] \longrightarrow \min \tag{24}$$

при ограничениях

$$
\frac{1}{\alpha}\big(APA^{\mathrm T}+B_1YA^{\mathrm T}+AY^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T}+B_1ZB_1^{\mathrm T}\big)-P+\frac{DD^{\mathrm T}}{1-\alpha}\leqslant 0,\quad \alpha<1, \tag{25}
$$

$$
\begin{pmatrix} Z & Y\\ Y^{\mathrm T} & P\end{pmatrix}\geqslant 0,\quad P\geqslant P_0, \tag{26}
$$

где $Y=KP$, а минимизация проводится по переменным $\alpha\in\mathbb{R}$, $P=P^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Y\in\mathbb{R}^{p\times n}$ и $Z=Z^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{p\times p}$.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 4. *Мы не можем сформулировать утверждения о строгой выпуклости целевой функции и границах интервала для параметра α. Отметим лишь существование некоторого $\alpha^*<1$, такого, что при $\alpha\leqslant\alpha^*$ дискретное неравенство Ляпунова не будет иметь положительно определенного решения и система линейных матричных неравенств из условия теоремы 4 станет противоречивой.*

Пусть $\widehat\alpha$, $\widehat P$, $\widehat Y$ и $\widehat Z$ доставляют минимум (24) при ограничениях (25) и (26). Тогда оптимальный регулятор находится из выражения $\widehat K=\widehat Y\widehat P^{-1}$. При этом

$$
u_{k\max}=\max_{x_k^{\mathrm T}P^{-1}x_k\leqslant 1}Kx_k=\sqrt{\widehat K\widehat P\widehat K^{\mathrm T}}.
$$

Отметим, что при фиксированном α задача минимизации (24) при ограничениях (25) и (26) является задачей полуопределенного программирования.

З а м е ч а н и е 5. *Нетрудно видеть, что требование $B_2^{\mathrm T}C=0$ не является ограничительным. Если оно не выполнено, все полученные результаты (в частности, теоремы 3 и 4) сохранят силу; лишь соотношения для целевых функций (16) и (24) претерпят очевидные изменения:*

$$
\operatorname{tr}\big[CPC^{\mathrm T}+B_2YC^{\mathrm T}+CY^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}+B_2ZB_2^{\mathrm T}\big]\longrightarrow\min.
$$

В процессе доказательства теоремы 4 мы строим функцию Ляпунова $V(x_k)$ для замкнутой системы (23), такую, что $V(x_{k+1})\leqslant 1$ при $V(x_k)\leqslant 1$ и $w^{\mathrm T}w\leqslant 1$. Естественно найти l_∞-ограниченное внешнее возмущение w_k^*, максимизирующее $V(x_{k+1})$.

Л е м м а 3. *Для линейной дискретной управляемой системы (21) при $m=1$ возмущение w_k^* задается формулой*

$$
w_k^*=\operatorname{sign}\big(D^{\mathrm T}\widehat P^{-1}(A+B_1\widehat K)x_k\big).
$$

Доказательство леммы 3 приведено в Приложении.

4. Обсуждение

Сравним полученные выше теоретические результаты с ранее известными, в частности, с результатами, полученными в [20]:

— нами в равном объеме рассмотрен как непрерывный, так и дискретный вариант задачи, тогда как в [20] исследован только непрерывный случай;

— в качестве целевой функции в данной работе выбран критерий следа $\mathrm{tr}\left[CPC^{\mathrm{T}}\right]$ вместо операторной нормы матрицы $\|P\|$ в [20]; это позволило свести проблему к стандартной задаче SDP и, тем самым, существенно упростить результаты;

— нами введено ограничение (19) на управление в виде линейного матричного неравенства (20);

— в определение инвариантного эллипсоида включена неопределенность (5) начального состояния системы;

— в полученных результатах вместо двух параметров, как в [20], содержится единственный параметр α;

— нами использована принципиально иная техника доказательств полученных утверждений: вместо стандартной S-процедуры с одним ограничением используется S-процедура с двумя ограничениями;

— эффективность полученных результатов продемонстрирована на примере исследования системы достаточно большого порядка — задачи о "двойном маятнике", подробно рассматриваемой в следующем разделе.

5. Управление "двойным маятником"

Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи управления "двойным маятником", т. е. системой из двух твердых тел единичной массы, соединенных пружиной с единичным коэффициентом упругости и скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1) (название модели объясняется тем, что ее уравнения совпадают с линеаризованными уравнениями, описывающими поведение двойного маятника).

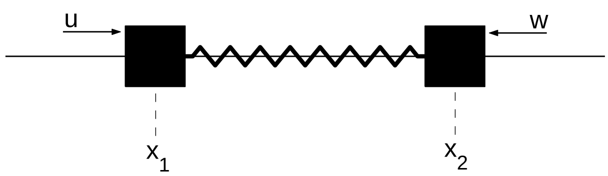

Рис. 1: "Двойной маятник".

Управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешних возмущений $w \in \mathbb{R}$, воздействующих на правое тело. Возмущения предполагаются произвольными, но ограниченными в любой момент времени: $|w(t)| \leqslant 1$. Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & v_1 & x_2 & v_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$$

есть вектор фазового состояния данной динамической системы, полностью описывающий движение двойного маятника. В качестве выхода возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} u & x_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

характеризующийся величиной управления и координатой второго тела, на которое действуют внешние возмущения.

Рассмотрим непрерывную модель возмущенных колебаний двойного маятника

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{v}_1 = -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{v}_2 = x_1 - x_2 - w, \end{cases}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, \\ y &= Cx + B_2 u, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A не является устойчивой, но пара матриц (A, B_1) управляема, а также $B_2^{\mathrm{T}} C = 0$.

С помощью теоремы 3 был определен оптимальный регулятор $\widehat{K}$, обеспечивающий минимум (по критерию следа) инвариантного эллипса выхода. При этом для численного решения задачи полуопределенного программирования (16) с ограничениями (17) и (18) мы использовали SeDuMi Toolbox и YALMIP Toolbox на базе системы Matlab. В результате, для рассматриваемой системы (при отсутствии ограничения (5) на начальное состояние) имеем

$$\widehat{K} \approx \begin{pmatrix} -2.2724 & -2.3341 & 0.6420 & -1.6564 \end{pmatrix}$$

и

$$u_{\max} \approx 2.8913.$$

На рис. 2 изображен получившейся минимальный инвариантный эллипс выхода для замкнутой системы с регулятором $\widehat{K}$. На том же рисунке показана траектория $y(t)$ при некотором выборе начального положения внутри этого эллипса и при воздействии на систему внешнего возмущения $w(t) = \sin(t/2)$. На рис. 3 изображен график возмущения $w(t)$ и управления $u(t)$.

На рис. 4 изображен минимальный инвариантный эллипс выхода при наличии ограничения (5) в виде $P \geqslant I$, и ограничения (19) в виде $\mu = 2.5$. В качестве внешнего возмущения взято $w(t) = \operatorname{sign}\sin(t/2)$. На рис. 5 представлены графики возмущения $w(t)$ и управления $u(t)$ при различных значениях μ.

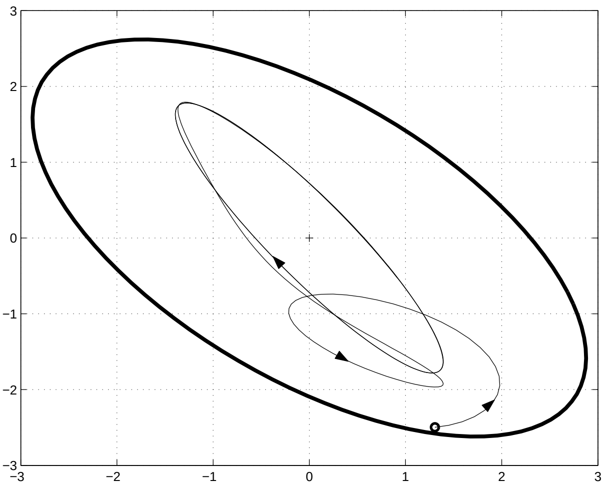

Рис. 2: Инвариантный эллипс выхода.

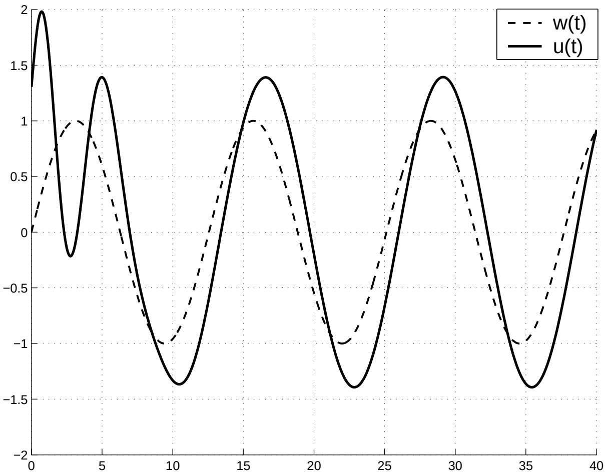

Рис. 3: Возмущение $w(t)$ и управление $u(t)$.

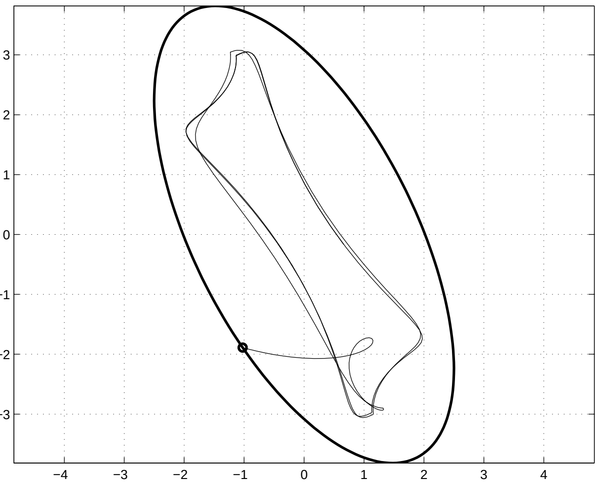

Рис. 4: Инвариантный эллипс выхода.

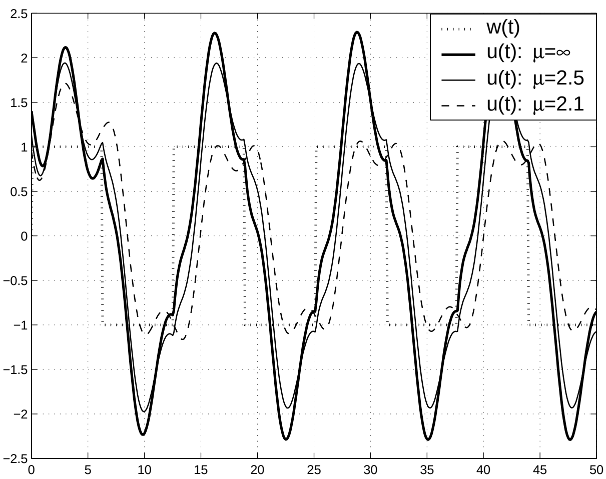

Рис. 5: Возмущение $w(t)$ и управление $u(t)$.

На рис. 6 изображен минимальный инвариантный эллипс выхода при ограничении на управление $\mu = 2.1$. В качестве внешнего возмущения взято $w^*(t)$ согласно лемме 2. На рис. 7 изображен график возмущения $w^*(t)$ и управления $u(t)$.

В рамках данного примера можно продемонстрировать и дискретный случай возмущенных колебаний двойного маятника, аппроксимируя его движение моделью в дискретном времени.

Таким образом, предложенный метод позволяет эффективно находить решение данной задачи.

6. Заключение

В статье предложен простой и универсальный подход к решению задачи подавления произвольных ограниченных внешних возмущений с помощью статической линейной обратной связи по состоянию. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов,

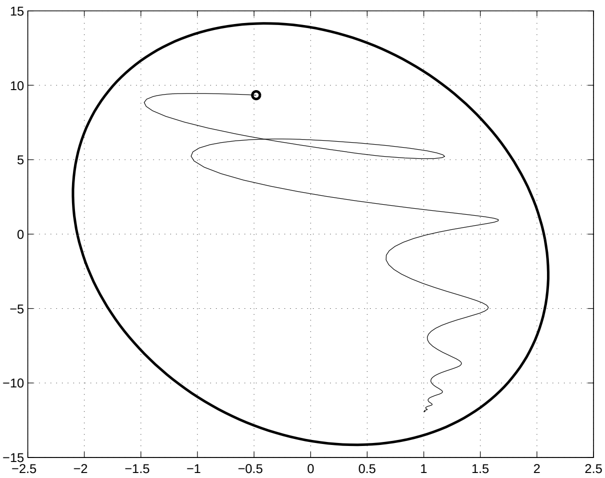

Рис. 6: Инвариантный эллипс выхода.

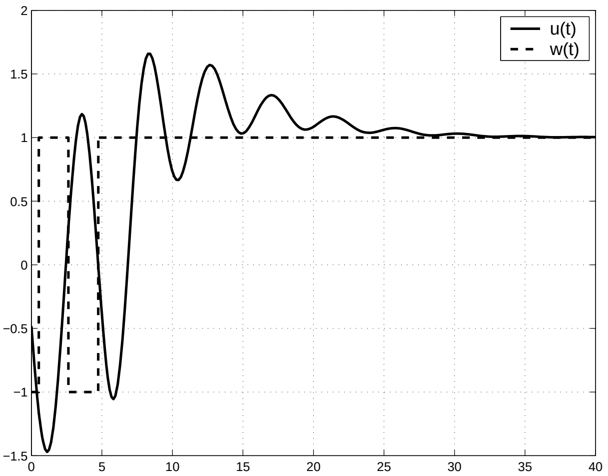

Рис. 7: Возмущение $w(t)$ и управление $u(t)$.

который сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств, а сам синтез регулятора непосредственно свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации, легко решающихся численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере задачи управления двойным маятником.

Отметим возможные обобщения предложенного метода и направления его дальнейшего развития. Нами использовался регулятор в форме статической линейной обратной связи по состоянию. Представляется возможным подойти к решению той же проблемы путем построения динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя. Далее, рассмотренные системы (как непрерывная, так и дискретная) относятся к классу т. н. *strictly proper systems* [20], в выходе которых отсутствует компонента внешних возмущений, в отличие от *proper systems*, в выходе которых внешние возмущения присутствуют. Авторы предполагают исследовать этот круг вопросов в дальнейших публикациях.

Авторы признательны А. С. Немировскому, привлекшему их внимание к задаче о двойном маятнике, а также А. В. Назину и П. С. Щербакову за полезные обсуждения, замечания и предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Утверждение П.1 (S-процедура). Пусть заданы однородные квадратичные формы $f_i(x) = x^{\mathrm{T}} A_i x$, $i = 0, 1, \ldots, m$, в $\mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Если существуют такие действительные числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, что

$$A_0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \tau_i \alpha_i, \tag{П.1}$$

то из

$$f_i(x) \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{П.2}$$

следует

$$f_0(x) \leqslant \alpha_0. \tag{П.3}$$

Обратно, если из (П.2) *следует* (П.3) *и выполняется любое из условий*

а) $m = 1$*;*

б) $m = 2$, $n \geqslant 3$, *и существуют такие числа* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ *и вектор* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, *что*

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 > 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2,$$

то существуют числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, *при которых справедливы неравенства* (П.1).

Полное доказательство этого утверждения можно найти в [25]. Более подробные сведения о S-процедуре — истории, теории, приложениях к управлению — приведены в [26].

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} Q x, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях системы (1). Тогда

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^{\mathrm{T}} Q x + x^{\mathrm{T}} Q \dot{x} = (Ax + Dw)^{\mathrm{T}} Q x + x^{\mathrm{T}} Q (Ax + Dw) = \\ = x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} Q + QA) x + 2 w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q x.$$

Чтобы траектории $x(t)$ системы (1) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E}_x = \big\{ x : \quad V(x) \leqslant 1 \big\},$$

потребуем при $V(x) \geqslant 1$ выполнения $\dot{V}(x) \leqslant 0$, т. е. чтобы

$$x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} Q + QA) x + 2 w^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q x \leqslant 0, \qquad \forall (x, w): \quad x^{\mathrm{T}} Q x \geqslant 1, \quad w^{\mathrm{T}} w \leqslant 1. \tag{П.4}$$

Пусть $s = \begin{pmatrix} x & w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ и

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q + QA & QD \\ D^{\mathrm{T}} Q & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

а также $\widetilde{f}_i(s) = s^{\mathrm{T}} M_i s$, $i = 0, 1, 2$. Тогда (П.4) перепишется в виде

$$\widetilde{f}_0(s) \leqslant 0, \qquad \forall s: \quad \widetilde{f}_1(s) \leqslant -1, \quad \widetilde{f}_2(s) \leqslant 1.$$

Поскольку условия б) в Утверждении П.1 выполняются, то (П.4) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$M_0 \leqslant \tau_1 M_1 + \tau_2 M_2$$

при некоторых значениях τ_1, τ_2 таких, что $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant 0$, или

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} Q + QA + \tau_1 Q & QD \\ D^{\mathrm{T}} Q & -\tau_2 I \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{П.5}$$

Достаточно рассмотреть случай $\tau_2 > 0$; в случае равенства положим $\tau_2 = \varepsilon > 0$, проделаем нижеследующие выкладки, а затем устремим ε к нулю. Далее, с использованием формулы Шура, неравенство (П.5) перепишется в виде

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \tau_1 Q + \frac{1}{\tau_2}QDD^{\mathrm{T}}Q \leqslant 0.$$

Обозначив $P = Q^{-1}$ и умножив полученное неравенство слева и справа на P, получаем

$$PA^{\mathrm{T}} + AP + \tau_1 P + \frac{1}{\tau_2}DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0.$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P > 0$ эквивалентно выполнению последнего линейного матричного неравенства при некоторых $\tau_1 \geqslant \tau_2 > 0$. Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, то

$$\tau_2 = \tau_{2\max} = \tau_1.$$

Переобозначив $\tau_1 = \alpha$, получаем искомое неравенство (6). Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 1. Первое утверждение следствия вытекает из следующего утверждения [11, Приложение; лемма П.16]: *пусть матрица A гурвицева, пара (A, B) управляема. Тогда для любой матрицы C решение задачи*

$$\mathrm{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

достигается на решении уравнения Ляпунова

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} = 0.$$

Далее, уравнение (7) представимо в виде

$$\Big(A + \frac{\alpha}{2}I\Big)P + P\Big(A + \frac{\alpha}{2}I\Big)^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}}$$

и, согласно [11], имеет единственное положительно определенное решение, если матрица $A + \frac{\alpha}{2}I$ устойчива (гурвицева):

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i\big(A + \frac{\alpha}{2}I\big) < 0,$$

т. е. $0 < \alpha < -2\max\limits_i \mathrm{Re}\,\lambda_i(A)$.

Осталось доказать строгую выпуклость функции $\varphi(\alpha) = \mathrm{tr}\big[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\big]$ на интервале $\big(0, -2\max\limits_i \mathrm{Re}\,\lambda_i(A)\big)$. Согласно [11, Приложение; лемма П.13], решение уравнения (7) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{(A+\frac{\alpha}{2}I)t}\frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}}e^{(A+\frac{\alpha}{2}I)^{\mathrm{T}}t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}e^{At}DD^{\mathrm{T}}e^{A^{\mathrm{T}}t}dt > 0,$$

следовательно

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr}\bigl[CP(\alpha)C^{\mathrm T}\bigr] = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\operatorname{tr}\bigl[Ce^{At}DD^{\mathrm T}e^{A^{\mathrm T}t}C^{\mathrm T}\bigr]dt > 0,$$

поскольку C — матрица максимального ранга и, поэтому, $CP(\alpha)C^{\mathrm T} > 0$.

Заметим, что функция

$$\alpha \to \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

строго выпукла на интервале $\bigl(0, -2\max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(A)\bigr)$ при всех $t \geqslant 0$, а

$$\operatorname{tr}\bigl[Ce^{At}DD^{\mathrm T}e^{A^{\mathrm T}t}C^{\mathrm T}\bigr] \geqslant 0,$$

причем при некоторых $t \geqslant 0$ это неравенство является строгим. В силу непрерывной зависимости функции $\operatorname{tr}\bigl[Ce^{At}DD^{\mathrm T}e^{A^{\mathrm T}t}C^{\mathrm T}\bigr]$ от t, функция $\varphi(\alpha)$ строго выпукла на интервале $\bigl(0, -2\max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(A)\bigr)$. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x_k) = x_k^{\mathrm T}Qx_k, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях системы (8). Чтобы траектории x_k системы (8) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E}_x = \bigl\{x_k : \quad V(x_k) \leqslant 1\bigr\}$$

потребуем при $V(x_k) \leqslant 1$ выполнения $V(x_{k+1}) \leqslant 1$, т. е.

$$(Ax + Dw)^{\mathrm T}Q(Ax + Dw) \leqslant 1, \qquad \forall (x, w): \quad x^{\mathrm T}Qx \leqslant 1, \quad w^{\mathrm T}w \leqslant 1. \tag{П.6}$$

Пусть $s = \begin{pmatrix} x & w\end{pmatrix}^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^{n+m}$,

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^{\mathrm T}QA & A^{\mathrm T}QD \\ D^{\mathrm T}QA & D^{\mathrm T}QD\end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix},$$

и $\widetilde{f}_i(s) = s^{\mathrm T}M_is$, $i = 0, 1, 2$. Тогда (П.6) перепишется в виде

$$\widetilde{f}_0(s) \leqslant 1, \qquad \forall s: \quad \widetilde{f}_1(s) \leqslant 1, \quad \widetilde{f}_2(s) \leqslant 1.$$

Согласно Утверждению П.1, условие (П.6) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm T}QA - \tau_1 Q & A^{\mathrm T}QD \\ D^{\mathrm T}QA & D^{\mathrm T}QD - \tau_2 I\end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{П.7}$$

при некоторых значениях $\tau_1, \tau_2 \geqslant 0$ таких, что $\tau_1 + \tau_2 \leqslant 1$.

Заметим, что из матричного неравенства (П.7) вытекает

$$\tau_1 > 0, \quad \tau_2 > 0,$$

т. к. $Q > 0$, $A^{\mathrm{T}}QA > 0$ и $D^{\mathrm{T}}QD > 0$; более того, $\tau_2 \geqslant \lambda_{\max}(D^{\mathrm{T}}QD) > 0$. Достаточно рассмотреть случай $\tau_2 > \lambda_{\max}(D^{\mathrm{T}}QD)$; в случае равенства положим $\tau_2 = \lambda_{\max}(D^{\mathrm{T}}QD) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, проделаем нижеследующие выкладки, а затем устремим ε к нулю.

С использованием формулы Шура неравенство (П.7) перепишется в виде

$$A^{\mathrm{T}}QA - \tau_1 Q \leqslant A^{\mathrm{T}}QD\big(D^{\mathrm{T}}QD - \tau_2 I\big)^{-1}D^{\mathrm{T}}QA. \tag{П.8}$$

Поскольку нас интересуют минимальные эллипсоиды, т. е. с наибольшей матрицей Q, а, с другой стороны, должно быть $D^{\mathrm{T}}QD - \tau_2 I < 0$, то

$$\tau_2 = \tau_{2\max} = 1 - \tau_1.$$

В соответствии с леммой об обращении матриц (см. [27])

$$\big(Q^{-1} - (1-\tau_1)^{-1}DD^{\mathrm{T}}\big)^{-1} = Q + QD\big((1-\tau_1)I - D^{\mathrm{T}}QD\big)^{-1}D^{\mathrm{T}}Q,$$

и (П.8) можно переписать как

$$\tau_1 Q \geqslant A^{\mathrm{T}}\big(Q^{-1} - (1-\tau_1)^{-1}DD^{\mathrm{T}}\big)^{-1}A$$

или

$$P \geqslant \tau_1^{-1}APA^{\mathrm{T}} + (1-\tau_1)^{-1}DD^{\mathrm{T}}, \quad P = Q^{-1}. \tag{П.9}$$

С другой стороны, из неравенства (П.9) следует

$$I = Q^{1/2}PQ^{1/2} \geqslant (1-\tau_1)^{-1}Q^{1/2}DD^{\mathrm{T}}Q^{1/2}$$

и

$$1 - \tau_1 \geqslant \lambda_{\max}\big(Q^{1/2}DD^{\mathrm{T}}Q^{1/2}\big) = \lambda_{\max}(D^{\mathrm{T}}QD).$$

Поэтому условия (П.7) и (П.9) эквивалентны. Переобозначив $\tau_1 = \alpha$, из (П.9) получим (11). Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 2. Первое утверждение следствия вытекает из утверждения, аналогичного утверждению [11, Приложение; лемма П.16]: *пусть матрица A шуровская, пара (A, B) управляема. Тогда для любой матрицы C решение задачи*

$$\operatorname{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$APA^{\mathrm{T}} - P + BB^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

достигается на решении дискретного уравнения Ляпунова

$$APA^{\mathrm{T}} - P + BB^{\mathrm{T}} = 0.$$

Далее, уравнение (12) представимо в виде

$$\Big(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\Big)P\Big(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\Big)^{\mathrm{T}} - P = -\frac{1}{1-\alpha}DD^{\mathrm{T}}$$

и, согласно [11], имеет единственное положительно определенное решение, если матрица $A/\sqrt{\alpha}$ устойчива (шуровская):

$$\rho\Big(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\Big) < 1,$$

т. е. $\rho^2(A) < \alpha < 1$.

Осталось доказать строгую выпуклость функции $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr}\big[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\big]$ на интервале $\big(\rho^2(A), 1\big)$. Согласно [11, Приложение; лемма П.19], решение уравнения (12) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\Big)^k \frac{1}{1-\alpha} DD^{\mathrm{T}}\Big(\frac{A^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\alpha}}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k} A^k DD^{\mathrm{T}}\big(A^{\mathrm{T}}\big)^k > 0,$$

следовательно,

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr}\big[CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k}\operatorname{tr}\big[CA^k DD^{\mathrm{T}}\big(A^{\mathrm{T}}\big)^k C^{\mathrm{T}}\big] > 0,$$

поскольку C — матрица максимального ранга и, поэтому, $CP(\alpha)C^{\mathrm{T}} > 0$.

Заметим, что функция

$$\alpha \to \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k}$$

строго выпукла на интервале $\big(\rho^2(A), 1\big)$ при всех неотрицательных k, а

$$\operatorname{tr}\big[CA^k DD^{\mathrm{T}}\big(A^{\mathrm{T}}\big)^k C^{\mathrm{T}}\big] \geqslant 0,$$

причем при некоторых $k \geqslant 0$ это неравенство является строгим. Поэтому функция $\varphi(\alpha)$ строго выпукла на интервале $\big(\rho^2(A), 1\big)$ как сумма выпуклых и строго выпуклых функций. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 3. Применим теорему 1 с целью поиска минимального инвариантного эллипсоида по выходу для замкнутой системы (15) с ограниченными внешними возмущениями $\|w(t)\| \leqslant 1$. Тогда задача перепишется в виде минимизации

$$\operatorname{tr}\big[(C + B_2K)P(C + B_2K)^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min \tag{П.10}$$

при ограничениях (5) и

$$(A + B_1K)P + P(A + B_1K)^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad \alpha > 0. \tag{П.11}$$

В матричное неравенство (П.11) переменные P и K входят нелинейным образом. Однако после замены $Y = KP$ оно принимает линейный вид (17).

Далее, с учетом введенной переменной Y целевая функция в (П.10) перепишется в виде

$$f(P, Y) = \operatorname{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}} + B_2YP^{-1}Y^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}\big].$$

Чтобы свести задачу (П.10) к минимизации линейной функции, рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix}.$$

По формуле Шура при $P > 0$ неравенство $H \geqslant 0$ эквивалентно $Z \geqslant YP^{-1}Y^{\mathrm{T}}$. Тогда минимизация функции $f(P, Y)$ эквивалентна минимизации $\mathrm{tr}\big[CPC^{\mathrm{T}} + B_2 Z B_2^{\mathrm{T}}\big]$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

откуда, с учетом (5), следует (18). Теорема доказана. □

Доказательство леммы 1. Поскольку $u = Kx$, то ограничение на управление $\|u\| \leqslant \mu$ представимо в виде

$$x^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K x \leqslant \mu^2.$$

Рассмотрим эллипсоид с матрицей $P = Q^{-1} > 0$, инвариантный по состоянию для замкнутой системы (15). Для того, чтобы удовлетворить ограничениям на управление, потребуем выполнения

$$x^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K x \leqslant \mu^2, \qquad \forall x: \quad x^{\mathrm{T}} Q x \leqslant 1. \tag{П.12}$$

Это классическая S-процедура для двух квадратичных форм. Согласно Утверждению П.1, случай а), для выполнения (П.12) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\tau \geqslant 0$, что

$$K^{\mathrm{T}} K \leqslant \tau Q, \quad \tau \leqslant \mu^2.$$

Поскольку нас интересуют минимальные инвариантные эллипсоиды, то

$$\tau = \tau_{\max} = \mu^2.$$

Далее, пусть $Y = KP$. Тогда $K = YQ$, и

$$QY^{\mathrm{T}} Y Q \leqslant \mu^2 Q.$$

Домножив полученное неравенство слева и справа на P, имеем

$$Y^{\mathrm{T}} Y \leqslant \mu^2 P,$$

которое с помощью формулы Шура представимо в виде (20). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4. Применим теорему 2 с целью поиска минимального инвариантного эллипсоида по выходу для замкнутой системы (23) с ограниченными внешними возмущениями $\|w_k\| \leqslant 1$. Тогда задача перепишется в виде минимизации

$$\mathrm{tr}\big[(C + B_2 K) P (C + B_2 K)^{\mathrm{T}}\big] \longrightarrow \min \tag{П.13}$$

при ограничениях (5) и

$$\frac{1}{\alpha}(A + B_1 K) P (A + B_1 K)^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha} D D^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \quad \alpha > 0. \tag{П.14}$$

В матричное неравенство (П.14) переменные P и K входят нелинейным образом. Однако после замены $Y = KP$ оно принимает линейный вид (25).

Далее, с учетом введенной переменной Y целевая функция в (П.13) перепишется в виде

$$f(P,Y) = \operatorname{tr}\bigl[CPC^{\mathrm{T}} + B_2YP^{-1}Y^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}\bigr].$$

Для того, чтобы свести задачу (П.13) к минимизации линейной функции, рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix}.$$

По формуле Шура при $P > 0$ неравенство $H \geqslant 0$ эквивалентно $Z \geqslant YP^{-1}Y^{\mathrm{T}}$. Тогда минимизация функции $f(P,Y)$ эквивалентна минимизации $\operatorname{tr}\bigl[CPC^{\mathrm{T}} + B_2ZB_2^{\mathrm{T}}\bigr]$ при ограничении

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

откуда, с учетом (5), следует (26). Теорема доказана. □

Доказательство леммы 2. Для того, чтобы внешние возмущения "выталкивали" траектории системы к границе инвариантного эллипсоида, потребуем

$$\dot V(x) \longrightarrow \max,$$

где

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x$$

функция Ляпунова, построенная на решениях системы (13). Поскольку

$$\dot V(x) = x^{\mathrm{T}}\bigl(A_c^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1} + \widehat P^{-1}A_c\bigr)x + 2w^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x, \quad A_c = A + B_1\widehat K,$$

то мы пришли к задаче

$$\max_{(w,w)=1}\bigl(w, D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x\bigr).$$

Ее очевидное решение

$$w^*(t) = \frac{D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x(t)}{\bigl\|D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x(t)\bigr\|};$$

в частности, при $m = 1$, имеем

$$w^*(t) = \operatorname{sign}\bigl(D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x(t)\bigr).$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 3. Для того, чтобы внешние возмущения "выталкивали" траектории системы к границе инвариантного эллипсоида, потребуем, чтобы

$$V(x_{k+1}) \longrightarrow \max,$$

где

$$V(x_k) = x_k^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}x_k$$

функция Ляпунова, построенная на решениях системы (21). Поскольку

$$V(x_{k+1}) = x_k^{\mathrm{T}}A_c^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}A_cx_k + 2w_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}A_cx_k + w_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\widehat P^{-1}Dw_k, \quad A_c = A + B_1\widehat K,$$

то мы пришли к задаче

$$\max_{(w_k,w_k)=1}\Big[\big(w_k, D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}A_c x_k\big)+\big(w_k, D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}Dw_k\big)\Big],$$

которая, если вектор внешних возмущений одномерен, имеет очевидное решение

$$w_k^* = \mathrm{sign}\big(D^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}(A+B_1\widehat{K})x_k\big).$$

Лемма доказана. $\square$

Список литературы

1. *Булгаков Б. В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. С. 339–342.

2. *Уланов Г. М.* Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1971.

3. *Якубович Е. Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1975. №9. С. 73–79.

4. *Барабанов А. Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольным ограниченным шумом // Вестник ЛГУ. Серия: математика. 1980. Т. 13. С. 119–120.

5. *Vidyasagar M.* Optimal rejection of persistent bounded disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.

6. *Барабанов А. Е., Граничин О. Н.* Оптимальный регулятор для линейных объектов с ограниченным шумом // АиТ. 1984. №5. С. 39–46.

7. *Dahleh M. A., Pearson J. B.* l_1-Optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1987. No. 32. P. 314–322.

8. *Glover D., Schweppe F.* Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 411–423.

9. *Bertsekas D. P., Rhodes I. B.* On the minimax reachability of target sets and target tubes // Automatica. 1971. V. 7. P. 233–247.

10. *Elia N., Dahleh M. A.* Minimization of the worst case peak-to-peak gain via dynamic programming: state feedback case // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45. P. 687–701.

11. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

12. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // АиТ. 2005. №5. С. 7–46.

13. *Schweppe F. C.* Uncertain Dynamic Systems. — NJ: Prentice Hall, 1973.

14. *Bertsekas D. P., Rhodes I. B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 117–128.

15. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.

16. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988.

17. *Blanchini F.* Set invariance in control — a survey // Automatica. 1999. V. 35. P. 1747–1767.

18. *Назин А. В., Назин С. А., Поляк Б. Т.* О сходимости внешних эллипсоидальных аппроксимаций областей достижимости линейных дискретных динамических систем // АиТ. 2004. №8. С. 39–61.

19. *Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.

20. *Abedor J., Nagpal K., Poola K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // International Journal on Robust and Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 899–927.

21. *Blanchini F., Sznaier M.* Persistent disturbance rejection via static state feedback // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. 40. P. 1127–1131.

22. *Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений на примере задачи о двойном маятнике // IX Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" им. Е. С. Пятницкого. 31 мая – 2 июня 2006 г. Тезисы докладов. М.: ИПУ РАН, 2006. С. 213–214.

23. *Polyak B. T., Nazin A. V., Topunov M. V., Nazin S. A.* Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego. Dec. 2006.

24. *Venkatesh S., Dahleh M.* Does star norm capture l_1 norm? // Proceedings of American Control Conference. 1995. P. 944–945.

25. *Polyak B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journ. Optim. Theory and Appl. 1998. V. 99. P. 553–583.

26. *Гусев С. В., Лихтарников А. Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. №10. С. 77–121.

27. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.