

Автоматическое управление четырёхвинтовым вертолетом

Пятая Традиционная всероссийская молодежная летняя школа

Выполнила: Белинская Ю.С., студентка гр.ФН12-121

Кафедра "Математическое моделирование"
МГТУ имени Н.Э.Баумана
Москва

20 июня 2013 года

Четырехвинтовой вертолет

Четырехвинтовой вертолет (квадрокоптер, четырехроторный вертолет) представляет собой летательный аппарат с четырьмя винтами (см. рис. 1). Винты закреплены на двух пересекающихся крест-накрест жестких балках и вращаются диагонально в противоположных направлениях, как показано на рис. 2.

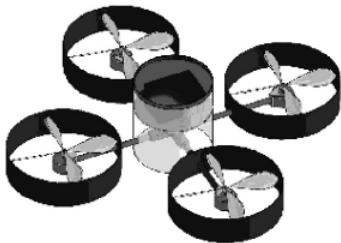


Рис 1. Модель квадрокоптера.

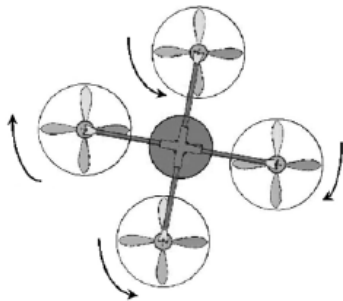


Рис 2. Вращение винтов вертолета.

Математическая модель движения квадрокоптера

Движение квадрокоптера описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \varphi \\m\ddot{z} + mg &= u \cos \theta \cos \varphi \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ \ddot{\varphi} &= \tilde{\tau}_\varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

Обозначения:

$(x \ y \ z)^T$ — координаты центра масс,

u — суммарная сила тяги четырех винтов (управление),

m — масса квадрокоптера,

$\eta = (\psi \ \theta \ \varphi)^T$ — углы Эйлера,

$\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_\psi \ \tilde{\tau}_\theta \ \tilde{\tau}_\varphi)^T$ — вектор вспомогательных управлений.

Истинные управления квадрокоптера — силы тяги четырех винтов f_1 , f_2 , f_3 , f_4 . Все двигатели идентичны и расположены на равном расстоянии от центра масс. Связь истинных управлений со вспомогательными:

$$\begin{aligned} f_1 &= k\left(\frac{\tau_\psi}{4k} - \frac{\tau_\varphi}{2l} + \frac{u}{4k}\right), & f_3 &= k\left(\frac{\tau_\psi}{4k} + \frac{\tau_\varphi}{2l} + \frac{u}{4k}\right), \\ f_2 &= k\left(-\frac{\tau_\psi}{4k} + \frac{\tau_\theta}{2l} + \frac{u}{4k}\right), & f_4 &= k\left(-\frac{\tau_\psi}{4k} - \frac{\tau_\theta}{2l} + \frac{u}{4k}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где k — коэффициент зависимости силы тяги винта от его угловой скорости,

l — расстояние от двигателя до центра масс,

$$\tau = (\tau_\psi \quad \tau_\theta \quad \tau_\varphi)^T = \Pi_G(\eta)\tilde{\tau} + \dot{\Pi}_G(\eta)\dot{\eta},$$

$$\Pi_G(\eta) = I_G \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix},$$

I_G — матрица инерции квадрокоптера.

Динамическая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

называется *плоской*, если определены такие функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad \dots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad (3)$$

что переменные x и u выражаются через t , функции (3) и их производные в силу системы до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор этих функций, их производных в силу системы и функции t функционально-независим. При этом набор функций (3) называется *линеаризующим (плоским) выходом*.

Теорема. Функции

$$h_1 = x, \quad h_2 = y, \quad h_3 = z \quad (4)$$

являются плоским выходом системы.

Доказательство. Выразим переменные состояния через функции плоского выхода.

$$x = h_1, \quad y = h_2, \quad z = h_3, \quad \dot{x} = \dot{h}_1, \quad \dot{y} = \dot{h}_2, \quad \dot{z} = \dot{h}_3, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\ddot{h}_2}{\ddot{h}_3 + g} \right), \quad \theta = -\operatorname{arctg} \left(\cos \varphi \frac{\ddot{h}_1}{\ddot{h}_3 + g} \right), \quad (5)$$

Дифференцируя по времени эти равенства, получаем выражения для $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$. Количество функций плоского выхода равно количеству входов системы, поэтому набор функций (4) функционально независим.

Теорема доказана.

Управления u , $\tilde{\tau}_\theta$ и $\tilde{\tau}_\varphi$ могут быть выражены через $t, h_i^{(j)}, i = 1, \dots, 3, j = 0, \dots, 4$.

$$u = m \sqrt{\ddot{h}_1^2 + \ddot{h}_2^2 + (\ddot{h}_3 + g)^2}. \quad (6)$$

Строим динамическую связь. Введем дополнительные переменные ξ_1, ξ_2 равенствами

$$\xi_1 = \sqrt{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + (\dot{h}_3 + g)^2}, \quad \xi_2 = \dot{\xi}_1. \quad (7)$$

Функции (7) вместе с функциями состояния системы определяют обратную замену переменных к переменным $h_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, 3$, $j = 0, \dots, 3$. Используя указанную замену переменных, выразим производные $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ и входы системы через ξ_1, ξ_2 , переменные состояния и $v_i = h_i^{(4)}$, $i = 1, 2, 3$. Продифференцировав (7) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1(\cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - \sin \theta \cdot v_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot v_2 + \cos \theta \cos \varphi \cdot v_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Суммарная сила тяги u выражается тривиально:

$$u = m\xi_1. \quad (9)$$

Чтобы выразить $\tilde{\tau}_\varphi = \ddot{\varphi}$ и $\tilde{\tau}_\theta = \ddot{\theta}$, используем выражения для φ и θ .
Получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\varphi &= \frac{1}{\xi_1} \left(\sec \theta \cdot (v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi) - 2\dot{\varphi}(\xi_2 - \xi_1 \dot{\theta} \operatorname{tg} \theta) \right), \\ \tilde{\tau}_\theta &= -\frac{\cos \varphi}{\xi_1} |\sec \varphi| \left(v_1 \cos \theta + (v_3 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi) \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \xi_1 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\xi_2 \dot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Эти формулы определяют такую динамическую обратную связь, что исходная система эквивалентна системе уравнений $h_i^{(4)} = v_i$.

Постановка задачи терминального управления

Предположим, нам нужно из нулевого начального положения попасть в точку $(x_d, y_d, z_d, 0, 0, 0)$, причем $x_d = y_d = z_d = h_d$. Пусть $t_0 = 0$ — начальный момент времени, $t = T$ — время окончания движения. Таким образом, поставлена задача терминального управления

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0, \\ \theta(0) &= 0, & \dot{\theta}(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, \\ x(T) &= h_d, & y(T) &= h_d, & z(T) &= h_d, \\ \dot{x}(T) &= 0, & \dot{y}(T) &= 0, & \dot{z}(T) &= 0, \\ \theta(T) &= 0, & \dot{\theta}(T) &= 0, & \varphi(T) &= 0, & \dot{\varphi}(T) &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Начальные и конечные значения переменных ξ зададим следующим образом: $\xi_1(0) = \xi_1(T) = g$, $\xi_2(0) = \xi_2(T) = 0$.

Задача в переменных плоского выхода

Для решения задачи ее нужно поставить в переменных h . Воспользуемся формулами для функций плоского выхода и поставим задачу в переменных h :

$$\begin{aligned}h_1(0) &= 0, & h_2(0) &= 0, & h_3(0) &= 0, \\ \dot{h}_1(0) &= 0, & \dot{h}_2(0) &= 0, & \dot{h}_3(0) &= 0, \\ \ddot{h}_1(0) &= 0, & \ddot{h}_2(0) &= 0, & \ddot{h}_3(0) &= 0, \\ \dddot{h}_1(0) &= 0, & \dddot{h}_2(0) &= 0, & \dddot{h}_3(0) &= 0, \\ h_1(T) &= h_d, & h_2(T) &= h_d, & h_3(T) &= h_d, \\ \dot{h}_1(T) &= 0, & \dot{h}_2(T) &= 0, & \dot{h}_3(T) &= 0, \\ \ddot{h}_1(T) &= 0, & \ddot{h}_2(T) &= 0, & \ddot{h}_3(T) &= 0, \\ \dddot{h}_1(T) &= 0, & \dddot{h}_2(T) &= 0, & \dddot{h}_3(T) &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

Решение задачи терминального управления

Решение этой задачи в переменных h в пространстве многочленов порядка 7 выглядит следующим образом:

$$h_i^* = -20h_d \left(\frac{t}{T}\right)^7 + 70h_d \left(\frac{t}{T}\right)^6 - 84h_d \left(\frac{t}{T}\right)^5 + 35h_d \left(\frac{t}{T}\right)^4. \quad (13)$$

Благодаря выбору начальных значений переменной ξ_1 желаемая траектория по всем трем координатам одинакова, а также координата z не уходит в отрицательную подобласть. Эта траектория изображена на рис. 3 (для $T = 4\text{с}$, $h_d = 10\text{м}$).

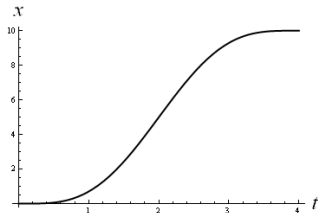


Рис. 3. Желаемая траектория по координате x .

Стабилизация вблизи желаемой траектории

Для решения задачи стабилизации вблизи желаемой траектории рассмотрим следующую устойчивую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$e_i^{(4)} = -4\ddot{e}_i - 6\dot{e}_i - 4e_i - e_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Полагая $e_1(t) = x(t) - x^*(t)$, $e_2(t) = y(t) - y^*(t)$, $e_3(t) = z(t) - z^*(t)$, а также $v_1 = \dot{x}^{(4)}(t)$, $v_2 = \dot{y}^{(4)}(t)$, $v_3 = \dot{z}^{(4)}(t)$, из формул (14) получаем стабилизирующую обратную связь.

В качестве обратной связи по ψ выберем обратную связь, стабилизирующую нулевое положение равновесия угла крена, то есть

$$\tilde{\tau}_\psi = -\psi - \dot{\psi}.$$

Предположим, что внешние воздействия ограничиваются тем, что в начальный момент времени систему отклонили от нулевого положения так, что

$$\begin{aligned}x(t_0) &= -1; & y(t_0) &= -1; & z(t_0) &= 0.2; \\ \dot{x}(t_0) &= 0.5; & \dot{y}(t_0) &= 0.5; & \dot{z}(t_0) &= 0.5;\end{aligned}$$

В качестве времени окончания движения выберем $T = 10$ с, чтобы обратная связь "успела сработать". На рисунках приведены графики изменения переменных состояния (графики y и \dot{y} совпадают с приведенными графиками x и \dot{x}) и силы тяги от времени при отсутствии внешних воздействий и при наличии указанных внешних воздействий.

Результаты численного моделирования

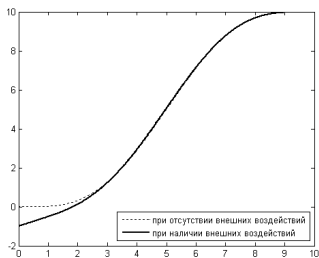


Рис. 4. График $x(t)$.

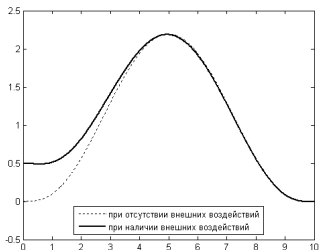


Рис. 5. График $\dot{x}(t)$.

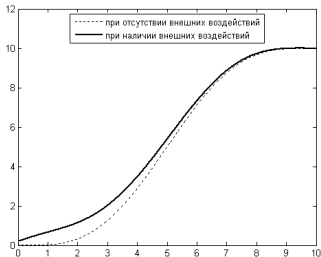


Рис. 6. График $z(t)$.

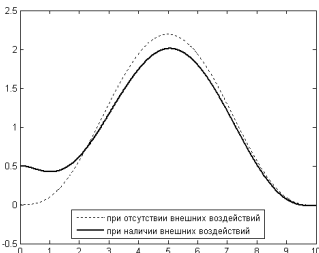


Рис. 7. График $\dot{z}(t)$.

Проверка допустимости управления

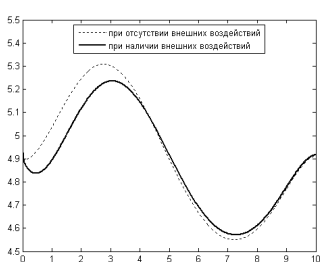


Рис. 8. График $f_1(t)$.

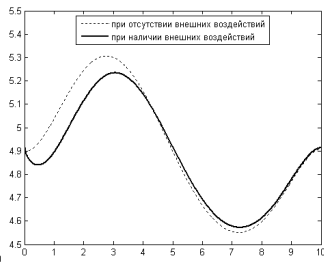


Рис. 9. График $f_2(t)$.

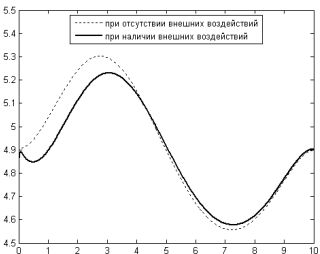


Рис. 10. График $f_3(t)$.

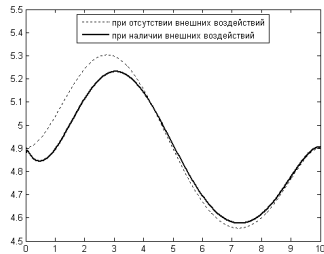


Рис. 11. График $f_4(t)$.

Граничные условия задачи терминального управления для типового маневра смены высоты вертолета ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= z_0, \\ \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0, \\ \theta(0) &= 0, & \dot{\theta}(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, \\ x(T) &= x_0, & y(T) &= y_0, & z(T) &= z_d, \\ \dot{x}(T) &= 0, & \dot{y}(T) &= 0, & \dot{z}(T) &= 0, \\ \theta(T) &= 0, & \dot{\theta}(T) &= 0, & \varphi(T) &= 0, & \dot{\varphi}(T) &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Начальные и конечные значения переменных ξ зададим следующим образом: $\xi_1(0) = \xi_1(T) = g$, $\xi_2(0) = \xi_2(T) = 0$.

В переменных h задача ставится следующим образом:

$$\begin{aligned}h_1(0) &= x_0, & h_2(0) &= y_0, & h_3(0) &= z_0, \\ \dot{h}_1(0) &= 0, & \dot{h}_2(0) &= 0, & \dot{h}_3(0) &= 0, \\ \ddot{h}_1(0) &= 0, & \ddot{h}_2(0) &= 0, & \ddot{h}_3(0) &= 0, \\ \dddot{h}_1(0) &= 0, & \dddot{h}_2(0) &= 0, & \dddot{h}_3(0) &= 0, \\ h_1(T) &= x_0, & h_2(T) &= y_0, & h_3(T) &= z_d, \\ \dot{h}_1(T) &= 0, & \dot{h}_2(T) &= 0, & \dot{h}_3(T) &= 0, \\ \ddot{h}_1(T) &= 0, & \ddot{h}_2(T) &= 0, & \ddot{h}_3(T) &= 0, \\ \dddot{h}_1(T) &= 0, & \dddot{h}_2(T) &= 0, & \dddot{h}_3(T) &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Решение задачи

Решение задачи для h_1 и h_2 тривиально: $h_1^* \equiv x_0$, $h_2^* \equiv y_0$. Решение задачи для h_3 выглядит следующим образом:

$$h_3^* = -20(z_d - z_0) \left(\frac{t}{T}\right)^7 + 70(z_d - z_0) \left(\frac{t}{T}\right)^6 - \\ - 84(z_d - z_0) \left(\frac{t}{T}\right)^5 + 35(z_d - z_0) \left(\frac{t}{T}\right)^4.$$

Численное моделирование для $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 2$, $z_d = 10$:

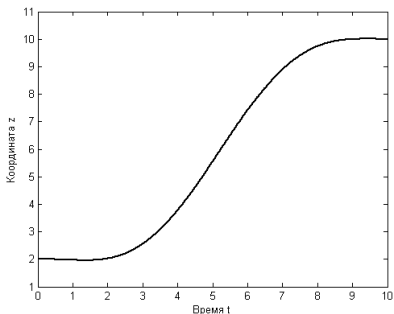


Рис. 12. График $z(t)$ при смене высоты.

Графики сил тяги каждого винта

Для проверки физической реализуемости управления построим графики сил тяги каждого винта:

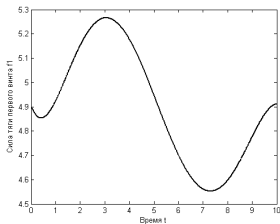


Рис. 13. График $f_1(t)$.

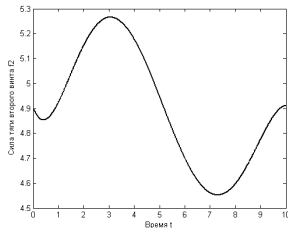


Рис. 14. График $f_2(t)$.

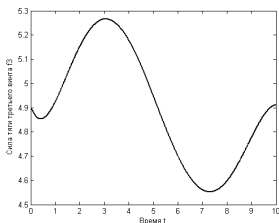


Рис. 15. График $f_3(t)$.

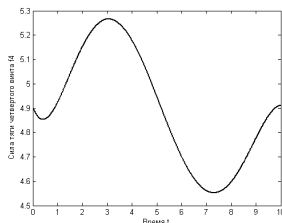


Рис. 16. График $f_4(t)$.

Постановка задачи поворота

Для поворота на 90° задача терминального управления ставится следующим образом:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= z_0, \\ \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0, \\ \theta(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= 0, \\ \dot{\theta}(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\psi}(0) &= 0, \\ x(T) &= x_d, & y(T) &= y_d, & z(T) &= z_0, \\ \dot{x}(T) &= 0, & \dot{y}(T) &= 0, & \dot{z}(T) &= 0, \\ \theta(T) &= 0, & \varphi(T) &= 0, & \psi(T) &= \frac{\pi}{2}, \\ \dot{\theta}(T) &= 0, & \dot{\varphi}(T) &= 0, & \dot{\psi}(T) &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Решение задачи по переменной ψ ищется в пространстве полиномов 3-й степени. По остальным переменным решение задачи аналогично решению, представленному при реализации маневра смены высоты.

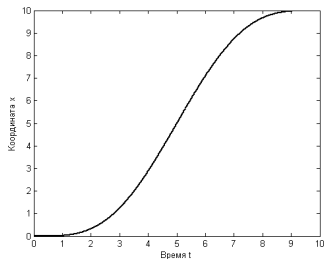


Рис. 17. График $x(t)$ при повороте.

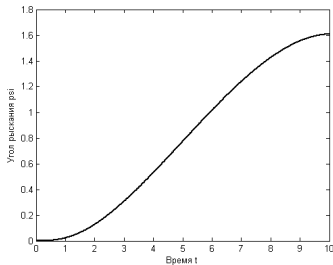


Рис. 18. График $\psi(t)$ при повороте.

Графики сил тяги каждого винта

Для проверки физической реализуемости управления построим графики сил тяги каждого винта:

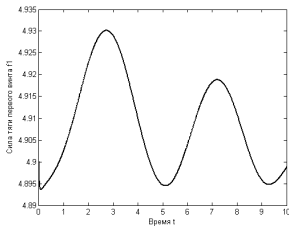


Рис. 19. График $f_1(t)$.

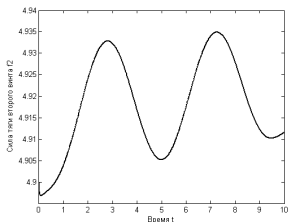


Рис. 20. График $f_2(t)$.

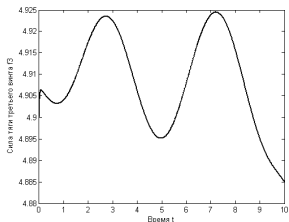


Рис. 21. График $f_3(t)$.

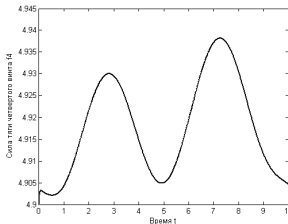








Рис. 22. График $f_4(t)$.

-  Beji, L., Abichou, A., Slim, R. Stabilization with Motion Planning of a Four Rotor Mini-rotorcraft for Terrain Missions // Fourth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA) — 2004. — P.335-340.
-  Beji, L., Abichou, A. Trajectory and Tracking of a Mini-Rotorcraft // Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation — 2005. — P.2618-2623.
-  Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, № 5. — P. 922–937.
-  Четвериков В. Н. Управляемость плоских систем // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 11. — С. 1518–1527.
-  Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/397373.html> (дата обращения 15.04.2013).
-  Белинская Ю. С. Реализация типовых маневров четырехвинтового вертолета // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. № 2, 2013. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html> (дата обращения 15.04.2013)

Спасибо за внимание!