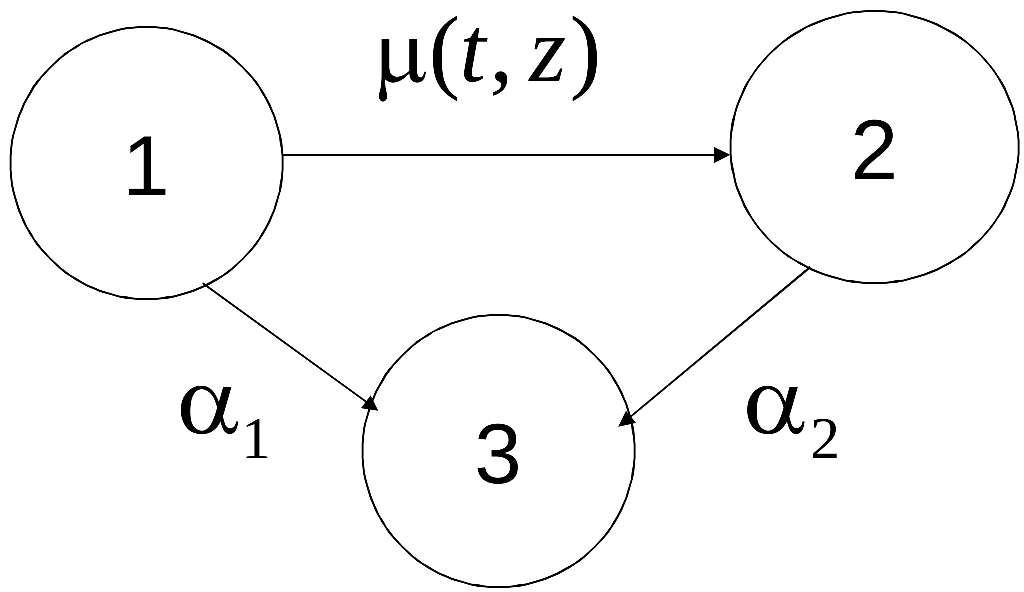
Об идентификации фактора гетерогенности в медицине и страховании

Роман В. Иванов, с.н.с. лаб. 38,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва 2013

Введение

- Vaupel, Yashin (1985), Михальский, Петровский, Яшин (1989), Михальский (2002)
- Norberg (2004)
- Brauer (2008)
- Cox, Lawless (2013), Finkelstein, Cha (2013)

Модель



α_1, α_2 - константы,с.в. z(a,b) имеет гамма распределение

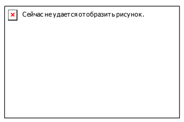
Модель

- задача идентификации параметров распределения z
- $\mu(t,z)=\mu_0(t)z$ и $\mu(t,z)=\mu_0(t)(1+z)$

$$\mu_0(t)=\begin{cases}\mu_1, t\in[0,c_1),\\ \mu_2, t\in[c_1,c_2),\\ \mu_3, t\in[c_2,\infty).\end{cases}$$

- $\alpha_1>\alpha_2, a\notin \mathrm{N}$

Случай полной информации



- Пусть $n_1, n_{12}, n_{13}, n_{123}$- множества оставшихся здоровыми, заболевших, но не умерших, умерших здоровыми, заболевших и затем умерших, соответственно.
- Обозначим через $P_1(t), P_2(t), \langle \quad \rangle_z$ вероятности находиться в состояниях и усреднение по z

Случай полной информации

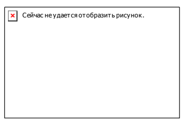
- Функция правдоподобия имеет вид

$$L_c = \prod_{i \in n_1} \left\langle P_1(s_i) \right\rangle_z \prod_{i \in n_{12}} \left\langle \mu(t_i) P_1(t_i) \right\rangle_z e^{-\alpha_2 (s_i - t_i)}$$

$$\times \prod_{i \in n_{13}} \alpha_1 \left\langle P_1(v_i) \right\rangle_z \prod_{i \in n_{123}} \left\langle \mu(t_i) P_1(t_i) \right\rangle_z \alpha_2 e^{-\alpha_2 (v_i - t_i)}$$

- s,t,v – моменты дожития, заболевания, смерти, соответственно

Случай неполной информации



- Пусть $n_1, n_{12}, n_{13}, n_{123}$ - множества оставшихся здоровыми, обнаруженных заболевшими, умерших о которых неизвестно, болели ли они, умерших о которых известно, что они заболели.
- Обозначим через $P_1(t), P_2(t), \langle \quad \rangle_z$ вероятности находиться в состояниях и усреднение по z

Случай неполной информации

- Функция правдоподобия имеет вид

$$L_I = \prod_{i\in n_1} \left\langle P_1(s_i) \right\rangle_z \prod_{i\in n_{12}} \left\langle P_2(t_i) \right\rangle_z \prod_{i\in n_{123}} \alpha_2 \left\langle P_2(v_i) \right\rangle_z$$

$$\times \prod_{i\in n_{13}} \left(\alpha_1 \left\langle P_1(v_i) \right\rangle_z + \alpha_2 \left\langle P_2(v_i) \right\rangle_z \right)$$

Относительный атрибутивный риск

- Имеем

$$\left\langle P_1(t)\right\rangle_z = \left(1+\frac{A}{b}\right)^{-a} e^{-\alpha_1 t},$$

$$\left\langle \mu(t) P_1(t)\right\rangle_z = \mu_0(t)\frac{a}{b}\left(1+\frac{A}{b}\right)^{-a-1} e^{-\alpha_1 t},$$

$$A = \mu_1 t I_{\{0\le t<c_1\}} + \big(\mu_1 c_1 + \mu_2 (t-c_1)\big) I_{\{c_1\le t<c_2\}}$$
$$+\big(\mu_1 c_1 + \mu_2 (c_2-c_1) + \mu_3 (t-c_2)\big) I_{t\ge c_2}$$

Относительный атрибутивный риск

- и

$$\left\langle P_2(t)\right\rangle_z = ab^a\Big(q_1(t)I_{\{t<c_1\}} +$$
$$\big(q_1(c_1)+q_2(t)\big)I_{\{c_1\le t<c_2\}} +$$
$$\big(q_1(c_1)+q_2(c_2)+q_3(t)\big)I_{\{t\ge c_2\}}\Big),$$

где

Относительный атрибутивный риск

$$q_1(t) = e^{-\frac{b(\alpha_1-\alpha_2)}{\mu_1}-\alpha_2 t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^{k-1}\Gamma(-a)}{\mu_1^{k-1}\Gamma(k-a)}\times\right.$$

$$\left(e^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\mu_1}(\mu_1 t+b)}(\mu_1 t+b)^{k-a-1}-e^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\mu_1}}b^{k-a-1}\right)+$$

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^a\Gamma(-a)}{\mu_1^a\Gamma(n-a)}\left(\gamma\left(n-a,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\mu_1}(\mu_1 t+b)\right)\right.$$

$$\left.\left.-\gamma\left(n-a,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\mu_1}b\right)\right)\right)$$

Относительный атрибутивный риск

- с

$$n = \min\left\{k \in \mathrm{N} \cup \{0\} : k - a > 0\right\},$$

$$\gamma(x, y) = \Gamma(x) - \Gamma(x, y),$$

$$\Gamma(x, y) = \int_{y}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Аддитивный риск

- Имеем

$$\left\langle P_1(t)\right\rangle_z = \left(1+\frac{A}{b}\right)^{-a} e^{-\alpha_1 t - A},$$

$$\left\langle \mu(t) P_1(t)\right\rangle_z = \mu_0(t)\frac{a}{b}\left(1+\frac{A}{b}\right)^{-a-1} e^{-\alpha_1 t - A},$$

$$\left\langle P_2(t)\right\rangle_z = w_1(t) I_{\{t<c_1\}} + \left(w_1(c_1) + w_2(t)\right) I_{\{c_1 \le t < c_2\}}$$

$$+\left(w_1(c_1) + w_2(c_2) + w_3(t)\right) I_{\{t \ge c_2\}}$$

Литература

- Brauer F. (2008) Epidemic Models with Heterogeneous Mixing and Treatment. Bull. Mathem. Biol. 70, 1869-1885.
- Cook R., Lawless J. (2013) Statistical Issues in Modeling Chronic Disease in Cohort Studies. Stat. Biosci. To appear.
- Finkelstein M., Cha J. H. (2013) Stochastic Modeling for Reliability. Springer Series in Reliability Engineering, Springer-Verlag, London.
- Михальский А.И. (2002) Методы анализа гетерогенных структур и популяций. Москва, ИПУ РАН.
- Михальский А.И., Петровский А.М., Яшин А.И. (1989) Теория оценивания неоднородных популяций. Москва, Наука.
- Norberg R. (2004) Life Insurance Mathematics. Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley.
- Vaupel J.W., Yashin A.I. (1985) Heterogeneity's ruses: some surprising effects of selection on population dynamics. Am. Stat. 39, 176--182.