Необходимые условия оптимальности линейного регулятора стохастических систем при неполной информации о состоянии

Хрусталев М.М., Халина А.С.

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Лаборатория теории устойчивости и управления ИМАШ РАН

16-23 июня 2013

1. Постановка задачи АКОРСС

Пусть управляемый процесс описывается линейным уравнением Ито

$$dx = (Ax + Bu)dt + Cdw, \tag{1}$$

а минимизируемый критерий оптимальности имеет вид

$$J_\infty = \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} f^c(x, u) P(t, dx) dt, \tag{2}$$

где время $t > t_0$,
$x = (x_1, ..., x_n)^T \in R^n$ – состояние системы,
$u = (u_1, ..., u_m)^T \in R^m$ – вектор управления,
$w = (w_1, ..., w_\sigma)^T \in R^\sigma$ – нормированный винеровский процесс,
$f^c(x, u) = \frac{1}{2} x^T Q x + u^T S x + \frac{1}{2} u^T E u$ – неотрицательная квадратичная форма,
A, B, C, Q, S, E – матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times \sigma$, $n \times n$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно,
E – симметрическая, положительно определенная матрица.

Вероятностная мера $P(t, \cdot)$ задает распределение состояния x системы (1) в момент времени t.

Информационная матрица

$$\Lambda := diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},$$

где $\lambda_\alpha = 0$, если компонента x_α вектора x доступна измерению и $\lambda_\alpha = 1$, если x_α не может быть измерена.

Экстремальную стабилизирующую стратегию $\bar{u}(x)$, удовлетворяющую информационным ограничениям, будем искать в классе линейных стратегий

$$x \to u(x) = -Lx : R^n \to R^m, \tag{3}$$

где L – постоянная матрица размеров $m \times n$.
Предполагается, что начальная плотность распределения $p_0(x) = p(t_0, x)$ вектора состояния x задана, гауссова и невырожденная.

Система уравнений для определения экстремальной стабилизирующей стратегии $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ и экстремального значения критерия $\bar{\gamma}$

$$A_{\bar{u}}\bar{\Omega} + \bar{\Omega}A_{\bar{u}}^T + CC^T = 0, \tag{4}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2}tr(CC^T M), \tag{5}$$

$$MA_{\bar{u}} + A_{\bar{u}}^T M + \bar{L}^T E\bar{L} - S^T\bar{L} - \bar{L}^T S + Q = 0, \tag{6}$$

$$\bar{L} = E^{-1}(B^T M + S - K\bar{\Omega}^{-1}). \tag{7}$$

$$K = (B^T M + S)\Lambda(\Lambda\bar{\Omega}^{-1}\Lambda + I - \Lambda)^{-1}, \tag{8}$$

где I – единичная матрица размеров $n \times n$.
Здесь и далее $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$.

4. Необходимые условия оптимальности регулятора

Theorem

Пусть матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ *асимптотически устойчива, тогда критерий* $J_\infty(L)$ *дифференцируем в точке* $L = \bar{L}$ *и его градиент имеет вид*

$$\left.\frac{\partial J_\infty(L)}{\partial L}\right|_{L=\bar{L}} = \left(-B^T M - S + E\bar{L}\right)\bar{\Omega}, \tag{9}$$

где матрицы $\bar{\Omega}$ *и* M *удовлетворяют уравнениям* (4), (6).

Theorem

Если матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ *асимптотически устойчива и* $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ *оптимальный линейный регулятор, минимизирующий критерий* $J_\infty(L)$, *то выполнено условие*

$$\left.\frac{\partial J_\infty(L)}{\partial L}\cdot(I-\Lambda)\right|_{L=\bar{L}} = (-B^T M - S + E\bar{L})\bar{\Omega}\cdot(I-\Lambda) = 0, \tag{10}$$

где $\bar{\Omega}$ *и* M *определяются выражениями* (4) *и* (6) *соответственно,*
I – *единичная матрица.*

5. Градиентный численный метод синтеза оптимального линейного регулятора

Стратегия поиска оптимального регулятора $\bar{u}(x)$ состоит в построении точек $\{L_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, таких, что $J_\infty(L_{i+1}) < J_\infty(L_i)$, $i = 0, 1, \ldots$.
Точки последовательности $\{L_i\}$ вычисляются по правилу

$$L_{i+1} = L_i - \lambda_i \cdot \frac{\partial J_\infty(L)}{\partial L} \cdot (\Lambda - I)\Big|_{L=L_i},$$

где начальное приближение L_0 и величина шага $\lambda_i > 0$ задаются произвольно.

Шаг считается неудачным, если
а) значение критерия $J_\infty(L_{i+1})$ не уменьшилось,
б) матрица $A_{u_{i+1}}$ не асимптотически устойчива.

6. Стабилизация орбиты искусственного спутника Земли.

Плоское движение ИСЗ в окрестности круговой орбиты описывается следующими линеаризованными уравнениями

$$\begin{aligned} d\Delta V_r &= (2\Delta V_\tau + \Delta r)dt + \eta dw, \\ d\Delta V_\tau &= (-\Delta V_r + u)dt + \xi dw, \\ d\Delta r &= \Delta V_r dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь Δr – отклонение ИСЗ по нормали к номинальной круговой орбите,
ΔV_r, ΔV_τ – нормальная и тангенциальная составляющие отклонения вектора скорости ИСЗ от вектора скорости на круговой орбите,
u – управление,
ηdw, ξdw – случайные возмущения (w – нормированный винеровский процесс).
Требуется найти оптимальное управление с различной степенью информированности управления о состоянии, обеспечивающее минимальное значение функционала

$$J = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \int_R \frac{1}{2}((\Delta V_r)^2 + (\Delta r)^2 + 10u^2)p(t,x)dxdt. \tag{12}$$

Вектор состояния $x = \begin{pmatrix} \Delta V_r & \Delta V_\tau & \Delta r \end{pmatrix}$.

Таблица 1. Значения критерия оптимальности.
Задача стабилизации орбиты спутника.

Измеряемые компоненты вектора состояния (информационная матрица Λ)	Значение критерия
$diag(0,0,0)$	2.03
$diag(1,0,0)$	2.84

В случае полной информации стратегия управления имеет вид
$\bar{u}(x) = 0.35\Delta V_r + 1.19\Delta V_\tau + 0.91\Delta r$,
а в случае измерения ΔV_τ, Δr экстремальная стратегия управления
$\bar{u}(x) = 1.43\Delta V_\tau + 1.01\Delta r$.

Используя критерий Гурвица, можно показать, что при других наборах доступных измерению компонент система не может быть стабилизирована.

8. Модельный пример.

В качестве модельного примера рассмотрена система (1)-(2) с асимптотически устойчивой матрицей A, имеющей собственные числа: $-1.5 \pm 1.5i$, -1.65, -0.5, -1.05.

Таблица 2. Значения критерия оптимальности.
Задача стабилизации орбиты спутника.

Измеряемые компоненты вектора состояния (информационная матрица Λ)	Значение критерия
$diag(0,0,0,0,0)$	3.45
$diag(0,0,0,1,1)$	3.49
$diag(1,0,0,0,1)$	4.13
$diag(1,1,0,1,0)$	5.61
$diag(0,1,1,1,1)$	11.07
$diag(1,1,1,1,1)$	13.53

Если измерению доступны все компоненты, то экстремальная стратения имеет вид $\bar{u}(x) = 1.2x_1 + 2.7x_2 + 2.5x_3 + 0.7x4 - 0.13x_5$,
а оптимальное значение критерия $\bar{\gamma} = 3.45$.

9. Литература

- *Хрусталев М.М.* Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика, — 2011.— № 11. — С. 174–190.
- *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М.* Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. ТиСУ, 2006. N 5.