Интервальные динамические системы

Болодурина И.П.,
Кулешов А.В.

Оренбургский государственный университет

20 июня, 2013

Постановка задачи

- Шашихин В.Н. Интервальные динамические системы: Модели, анализ, синтез. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 214 с.
- Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. – Институт прикладной математики ДВО РАН. – М. Наука, 2006. – 151 с.

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{h}(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0 \in R^n, \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(t) \in [\underline{A}(t), \overline{A}(t)], \;\; \mathbf{B}(t) \in [\underline{B}(t), \overline{B}(t)], \;\; \mathbf{h}(t) \in [\underline{h}(t), \overline{h}(t)].$$

Постановка задачи

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{h}(t), \qquad (1)$$

начальное условие

$$x(t_0) = x^0 \in R^n, \quad (2) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x^0} = [\overline{x^0}, \underline{x}^0],$$

$$\mathbf{A}(t) \in [\underline{A}(t), \overline{A}(t)], \; \mathbf{B}(t) \in [\underline{B}(t), \overline{B}(t)], \; \mathbf{h}(t) \in [\underline{h}(t), \overline{h}(t)].$$

Но при этом

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) - ?$$

Задачи исседования

- Построить модель динамической системы с учетом интервальной неопределенности как параметров, так и начальных данных.
- Разработать математический аппарат для исследования динамических систем с неопределенностью в начальных данных.
- Сформулировать алгоритм численного решения задачи управления на заданное множество системой с интервальной неопределенностью в начальных данных.

Пространство многомерных интервалов IR^n

Рассмотрим пространство

$$IR^n = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [mid\mathbf{x_1} - rad\mathbf{x_1}, mid\mathbf{x_1} + rad\mathbf{x_1}] \\ \cdots \\ [mid\mathbf{x_n} - rad\mathbf{x_n}, mid\mathbf{x_n} + rad\mathbf{x_n}] \end{pmatrix},$$

$$mid\mathbf{x_i} = \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2}, rad\mathbf{x_i} = \frac{\overline{x}_i - \underline{x}_i}{2}, \underline{x}_1, \overline{x}_i \in R, i = \overline{1, n}\}. \quad (3)$$

$\mathbf{f}(t) : T \to IR^n$ есть функция точек отрезка $T \subset R$ со значениями в IR^n, если $\forall t \in T\ \exists \mathbf{f}(t) \in IR^n$.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR^n,\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |mid\mathbf{y_i} - mid\mathbf{x_i}| + \sum_{i=1}^{n} |rad\mathbf{y_i} - rad\mathbf{x_i}| \quad (4)$$

Предел и производная в IR^n

Интервальный вектор $\mathbf{A} \in IR^n$ является *пределом* интервальной функции $\mathbf{f}(t)$ при $t \to t_0$, то есть
$\mathbf{A} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t)$, если
$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \delta(\varepsilon) \in R^+ : \forall t \in T, |t - t_0| < \delta :$

$$\rho\left(\mathbf{f}(t), \mathbf{A}\right) < \varepsilon. \tag{5}$$

Приращением функции $\mathbf{f}(t)$ на отрезке времени $[t_1, \; t_2]$ назовем величину

$$\delta \mathbf{f}(t_1, t_2) = \Big(mid\mathbf{f}(t_2) - mid\mathbf{f}(t_1); rad\mathbf{f}(t_2) - rad\mathbf{f}(t_1) \Big). \tag{6}$$

Производной функции $\mathbf{f}(t)$ в точке t_0 назовем предел

$$\dot{\mathbf{f}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{f}(t_0, t_0 + \Delta t)}{\Delta t}, \tag{7}$$

если он существует.

Интеграл в IR^n с свойство предела в IR^n

Интегралом интервальной функции $\mathbf{f}(\tau)$ на отрезке $[t_0, t]$, то есть, $\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau) d\tau$, называется предел, если он существует, вида $\lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbf{f}(t_i) \Delta t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$.

Лемма 1

Предел интервальной функции равен интервалу с предельными границами.

Следствие 1. Производная интервальной функции есть интервальная функция, границами которой являются производные границ исходной функции.

Следствие 2. Интеграл интервальной функции есть интервальная функция, границами которой являются интегралы границ исходной функции.

Динамическая система в IR^n

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{h}(t), \qquad (8)$$

где $\mathbf{x}(t) : T \to IR^n$,
$\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{h}(t)$ - интервальные матричные функции.
$u(t) \subset \Omega,\ \ u : T \to R^m$ – управление.

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x^0} \in IR^n, \qquad (9)$$

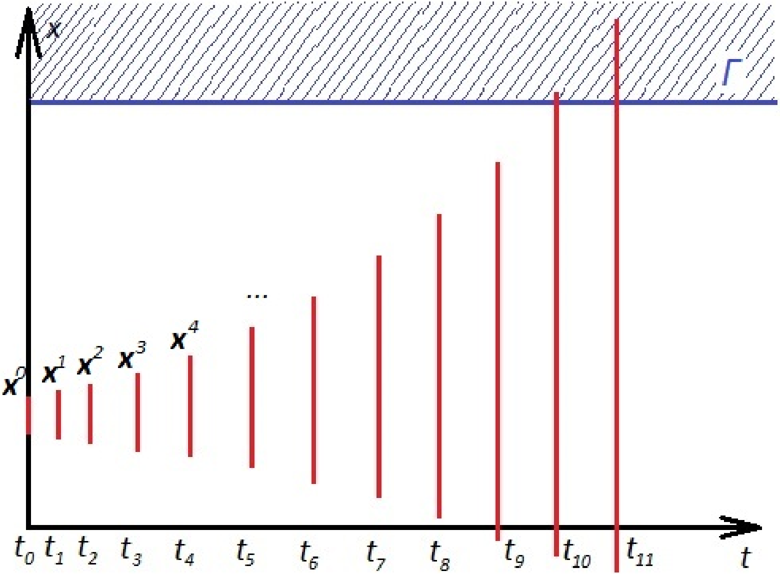
Требуется построить такое управление $u(\tau),\ \ t_0 \leq \tau < \tilde{t}$, чтобы к моменту времени $\tilde{t}$ система (8), (9) оказалась на множестве $\Gamma \subset IR^n$:

$$\mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma \subset IR^n, \qquad (10)$$

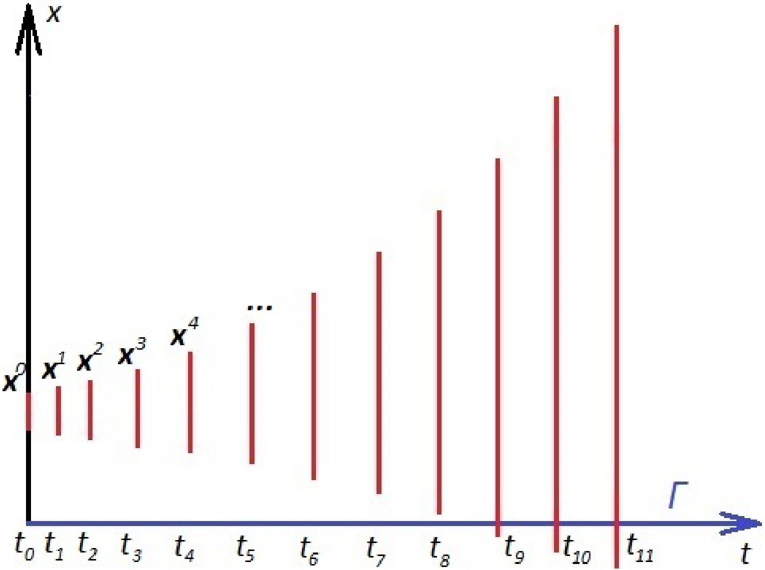
при этом

$$J = \tilde{t} \to \min\,. \qquad (11)$$

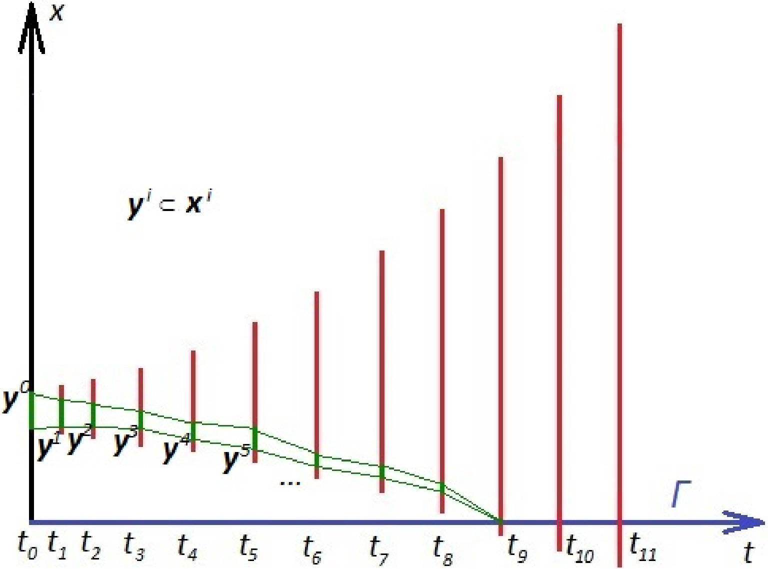
$$\text{Не выполняется } \mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma \qquad (10)$$



$$\text{Не выполняется } \mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma \tag{10}$$



$$\text{Не выполняется } \mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma \tag{10}$$



Избыточное решение

Избыточным решением задачи управления называется такая последовательность управлений $u(\tau),\ t_0 \le \tau < t$, что правый конец соответствующей траектории целиком содержит в себе терминальное множество $\Gamma \subset \mathbf{x}(t)$.

При решении задач управления будем рассматривать два случая:

1. $\exists \tilde{t} \in T:\ \mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma$. В этом случае будем строить такое управление $u(\tau),\ t_0 \le \tau < \tilde{t}$, которое обеспечит данное включение за минимальное время $\tilde{t} \to \min$;
2. $\forall t \in T$ при $C(t) = \mathbf{x}(t) \cap \Gamma,\ C \ne \mathbf{x}(t)$. При этом, в свою очередь, возможны случаи
   - $\exists \tilde{t} \in T:\ C(\tilde{t}) = \Gamma$. В этом случае будем искать избыточное решение, то есть такое управление $u(\tau),\ t_0 \le \tau < \tilde{t}$, что $\Gamma \subset \mathbf{x}(\tilde{t})$ и при этом $\tilde{t} = arg \min\limits_{t \in T} \rho(\mathbf{x}(t), \Gamma)$.
   - $\forall t \in T:\ C(t) \ne \Gamma$. В этом случае будем считать задачу управления неразрешимой.

Задача управления динамической системой в IR^n

Построить такое управление $u(\tau) \in \Omega \subset R^m$, $t_0 \leq \tau < \tilde{t}$, чтобы к моменту времени $\tilde{t}$ система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{h}(t), \tag{12}$$

с интервальной неопределенностью в параметрах $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{h}(t)$ и интервальной неопределенностью в начальном условии

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{\mathbf{0}} \in IR^n, \tag{13}$$

оказалась на множестве $\Gamma \subset IR^n$:

$$\mathbf{x}(\tilde{t}) \subset \Gamma \subset IR^n, \tag{14}$$

за минимальное время

$$J = \tilde{t} \to \min, \tag{15}$$

либо, если это невозможно, построить избыточное решение, то есть такое управление, при котором из моментов времени t, таких, что

$$\Gamma \subset \mathbf{x}(t), \tag{16}$$

выбирается $\mathbf{x}(t)$ минимальной ширины.

Множество достижимости

Множество достижимости системы (12), (13) в момент времени $t \in T$ есть множество $P(t, t_0, \mathbf{x^0}, \Omega)$ правых концов траекторий $\mathbf{x}(t)$, выходящих из $\mathbf{x^0}$ с учетом всевозможных допустимых реализаций управлений $u(\tau) \in \Omega,\ t_0 \leq \tau < t$.

Если $\mathbf{a_{i,j}}, \mathbf{b_{i,k}}, \mathbf{h_i}$, - интервальные функции типа $T \to IR$ с известными непрерывно дифференцируемыми границами $i, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$;

Ω – выпуклое компактное множество;

$\mathbf{x^0} \in IR^n$ - интервальный вектор с известными конечномерными границами, то справедлива теорема.

Теорема 1

Множество достижимости $P(t)$ интервальной динамической системы является компактным выпуклым в IR^n множеством.

Компактность и выпуклость в IR^n

- Множество $P(t) \subset IR^n$ называется *ограниченным*, если для $\forall \mathbf{x} \in P(t),\ \exists \mathbf{M} \in IR^n : r\left(\mathbf{x_i} \leq \mathbf{M_i}\right), r\left(-\mathbf{M_i} \leq \mathbf{x_i}\right)$ одновременно больше 1.

$$r\left(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\right) = \frac{mid\mathbf{y} - mid\mathbf{x}}{rad\mathbf{y} + rad\mathbf{x}} \tag{17}$$

- Множество $P(t) \subset IR^n$ называется *замкнутым*, если для $\forall \varepsilon \in R^+,\ \exists \mathbf{x}, \mathbf{y_1} \in P(t) : \rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{y_1}\right) < \varepsilon$, $\exists \mathbf{y_2} \notin K : \rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{y_2}\right) < \varepsilon$.
- Множество $K \subset IR^n$ называется выпуклым, если для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K,\ \forall \lambda \in R,\ \lambda \in [0, 1] : \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in K$.

Этапы доказательства теоремы

- Показывают ограниченность множества достижимости с использованием аналога интегральной формулы и требований, накладываемых на коэффициенты модели;
- Обосновывают непрерывную зависимость выбора управляющей последовательности и соответствующей ей траекторией;
- Используя непрерывность соотношения $u(\tau),\ t_0 \leq \tau < t$ и $\mathbf{x}(t)$, доказывают замкнутость и выпуклость множества достижимости $P(t)$.

Алгоритм решения задачи управления интервальной динамической системой

Шаг	Действие
1	Выбрать шаг Δt разбиения времени. Обозначить $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = \overline{1, N}$ таким образом, чтобы крайний правый момент времени t_N был достаточно велик. Задать разбиение множества $\overline{\Omega}$ точками $u_0, u_1, ..., u_M$ с шагами Δu_i для каждой компоненты $i = \overline{1, m}$. Положить $\mathbf{x_i}$ – точка траектории $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t_i. $\mathbf{x_i}$ содержит $2n$ пар чисел: левая и правая граница каждой из n компонент $\mathbf{x}(t)$. Определить множество достижимости P_i. Положить $P_0 = \mathbf{x^0}$. Положить $\rho_{min} = \infty$, $i_{min} = -1$. Задать вспомогательные точки $L_1, ..., L_N$, траекторию решения $T_1, ..., T_N$ и соответствующее управление $U_0, ..., U_{N-1}$, при чем $L_i, T_i, U_i \in IR^n$.

Алгоритм решения задачи управления интервальной динамической системой

Шаг	Действие
2	Организуем цикл по i. $i = 0$.
3	Следующий шаг по времени $i = i + 1$.
4	Строить следующее множество достижимости $P_i = \{\mathbf{x_i} \mid \mathbf{x_i} = \mathbf{x_j} + \Delta t\,(\mathbf{A}(t_{i-1})\mathbf{x_j} + \mathbf{B}(t_{i-1})u_k + \mathbf{h}(t_{i-1}))\,,$ $\forall u_k \in \overline{\Omega},\ \forall \mathbf{x_j} \in P_{i-1}\}$
5	Проверить выполнение условия $\exists \mathbf{x} \in P_i : \ \mathbf{x} \subset \Gamma$. Если выполняется, то решение классическое, $i_{min} = i$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, переход к шагу 10, иначе шаг 6.
6	Проверить выполнение условия $\exists \mathbf{x} \in P_i : \ \Gamma \subset \mathbf{x}$. Если выполняется - переход к шагу 7, иначе переход к шагу 8.

Алгоритм решения задачи управления интервальной динамической системой

Шаг	Действие
7	Если $\rho(\mathbf{x}, \Gamma) < \rho_{min}$, то $\rho_{min} = \rho(\mathbf{x}, \Gamma)$, $i_{min} = i$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, переход к шагу 8.
8	Если $i > N$, то переход к шагу 9, иначе переход к шагу 3.
9	Если $i_{min} = -1$, то решений нет, конец алгоритма, иначе к шагу 10.
10	Строить опорные точки $L_{i_{min}} = \tilde{\mathbf{x}}$, $L_i = \mathbf{x} \in P_i : \mathbf{x} + \Delta t\,(\mathbf{A}(t_i)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t_i)u_k + \mathbf{h}(t_i)) = L_{i+1}$, $u_k \in \overline{\Omega}$, $i = \overline{i_{min} - 1, 0}$.
11	Строить траекторию и управление $T_0 = \mathbf{x^0}$, $U_i = arg \min\limits_{u_k \in \overline{\Omega}} \rho(T_i + \Delta t(\mathbf{A}(t_i)T_i + \mathbf{B}(t_i)u_k + \mathbf{h}(t_i)), L_{i+1})$, $T_{i+1} = T_i + \Delta t(\mathbf{A}(t_i)T_i + \mathbf{B}(t_i)U_i + \mathbf{h}(t_i))$, $i = \overline{0, i_{min} - 1}$. Конец алгоритма.

Пример решения задачи управления интервальной динамической системой

Уравнение движения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

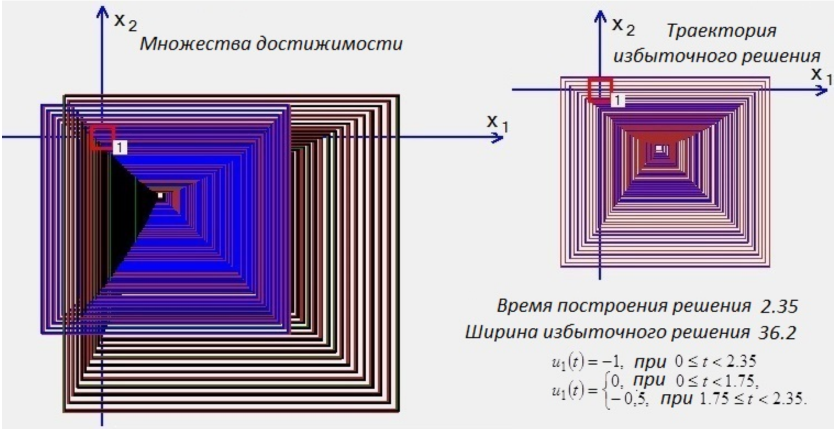
где $|u(t)| \leq 1$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0; \frac{1}{2}] & [\frac{1}{10}; \frac{1}{3}] \\ [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}] & [-\frac{1}{3}; -\frac{1}{10}] \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [0; \frac{1}{3}] & [1; \frac{3}{2}] \\ [-1; -\frac{1}{2}] & [0; \frac{1}{2}] \end{pmatrix},$$

Начальное условие $\mathbf{x^0} = \begin{pmatrix} [5; \frac{11}{2}] \\ [-\frac{11}{2}, -5] \end{pmatrix}$.

Терминальное множество
$\Gamma = \{x \in R^2 | -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$.
Параметры эксперимента $N = 100$, $T = 3$, $\Delta u = 0,5$.

Пример решения задачи управления интервальной динамической системой



Результаты исследования

- Построена модель динамической системы с учетом интервальной неопределенности как параметров, так и начальных данных.
- Предложен математический аппарат для исследования динамических систем с неопределенностью в начальных данных. Доказана теорема о выпуклости и компактности множества достижимости динамической системы с интервальной неопределенностью в начальных данных.
- Разработан алгоритм численного решения задачи управления на заданное множество системой с интервальной неопределенностью в начальных данных.