Современная анизотропийная теория: Анализ и Синтез

Аркадий Кустов

ТМШ-V

16-23 июня 2013

Объект управления, регулятор

Объект управления, регулятор

Объект управления описывается линейной дискретной стационарной системой

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_{k+1} & = & A_1 x_k & + & B_1 w_k & + & B_2 u_k, \\ z_k & = & C_1 x_k & + & D_{11} w_k & + & D_{12} u_k, \\ y_k & = & C_2 x_k & + & D_{21} w_k, & & \end{array}\right. \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешние возмущения, $u_k \in \mathbb{R}^p$ – управление, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – регулируемый выход, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измеряемый выход.

Объект управления, регулятор

Объект управления описывается линейной дискретной стационарной системой

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_{k+1} & = & A_1 x_k & + & B_1 w_k & + & B_2 u_k, \\ z_k & = & C_1 x_k & + & D_{11} w_k & + & D_{12} u_k, \\ y_k & = & C_2 x_k & + & D_{21} w_k, \end{array}\right. \qquad (1)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешние возмущения, $u_k \in \mathbb{R}^p$ – управление, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – регулируемый выход, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измеряемый выход.

Регулятор имеет представление

$$\left\{\begin{array}{lllll} \xi_{k+1} & = & \widehat{A}\xi_k & + & \widehat{B} y_k, \\ u_k & = & \widehat{C}\xi_k, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ – внутреннее состояние регулятора.

Объект управления, регулятор

Объект управления описывается линейной дискретной стационарной системой

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} x_{k+1} & = & A_1 x_k & + & B_1 w_k & + & B_2 u_k, \\ z_k & = & C_1 x_k & + & D_{11} w_k & + & D_{12} u_k, \\ y_k & = & C_2 x_k & + & D_{21} w_k, & & \end{array}\right. \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешние возмущения, $u_k \in \mathbb{R}^p$ – управление, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – регулируемый выход, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измеряемый выход.

Регулятор имеет представление

$$\left\{\begin{array}{lcccc} \xi_{k+1} & = & \widehat{A}\xi_k & + & \widehat{B} y_k, \\ u_k & = & \widehat{C}\xi_k, & & \end{array}\right. \tag{2}$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ – внутреннее состояние регулятора.

Цель управления: стабилизировать исходную систему и минимизировать заданный функционал качества для любых входных возмущений из данного класса.

Входные возмущения

Входные возмущения

Варианты задания возмущения:

Входные возмущения

Варианты задания возмущения:

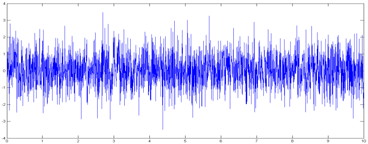
1) точно задать входное возмущение (ступенька; синусоида)

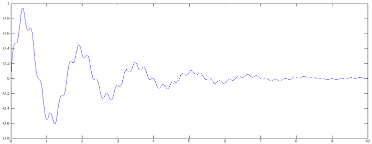
Входные возмущения

Варианты задания возмущения:

1) точно задать входное возмущение (ступенька; синусоида)

2) задать класс входных возмущений ($\mathcal{H}_2$-теория управления – гауссовский белый шум; $\mathcal{H}_\infty$-теория управления – возмущение из l_2)



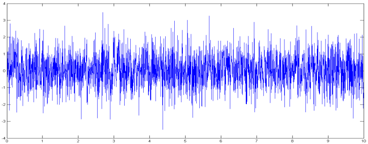


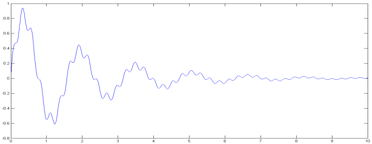
Входные возмущения

Варианты задания возмущения:

1) точно задать входное возмущение (ступенька; синусоида)

2) задать класс входных возмущений ($\mathcal{H}_2$-теория управления – гауссовский белый шум; $\mathcal{H}_\infty$-теория управления – возмущение из l_2)





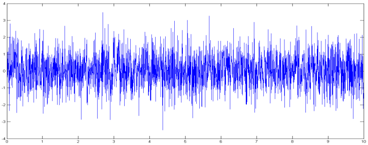
3) ввести меру отличия от эталонного класса, и задать возмущение (точнее, целое множество) числом $\rightarrow$ анизотропийная теория

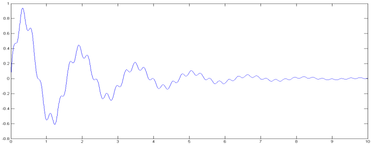
Входные возмущения

Варианты задания возмущения:

1) точно задать входное возмущение (ступенька; синусоида)

2) задать класс входных возмущений ($\mathcal{H}_2$-теория управления – гауссовский белый шум; $\mathcal{H}_\infty$-теория управления – возмущение из l_2)





3) ввести меру отличия от эталонного класса, и задать возмущение (точнее, целое множество) числом $\rightarrow$ анизотропийная теория

Анизотропийная теория управления использует понятие относительной энтропии как меры отличия от эталонного класса возмущений, в роли которого выступает гауссовский белый шум.

Относительная энтропия

Относительная энтропия

Для двух плотностей вероятности f и g (причем f абсолютно непрерывна по g, т.е. из $g(x) = 0$ следует $f(x) = 0$) относительной энтропией f относительно g (или расстоянием Кульбака-Лейблера) называют интеграл

$$\mathbf{D}(f||g) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx_1 \dots dx_m, \quad 0 \ln 0 = 0. \tag{3}$$

Относительная энтропия

Для двух плотностей вероятности f и g (причем f абсолютно непрерывна по g, т.е. из $g(x) = 0$ следует $f(x) = 0$) относительной энтропией f относительно g (или расстоянием Кульбака-Лейблера) называют интеграл

$$\mathbf{D}(f||g) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx_1 \ldots dx_m, \quad 0 \ln 0 = 0. \tag{3}$$

Если g – гауссовская плотность вероятности с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m

$$g(x) \doteq p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp \left\{ -\tfrac{x^T x}{2\lambda} \right\},$$

а f – нормальная плотность вероятности с ненулевым матожиданием μ и ковариационной матрицей Σ

$$f(x) = ((2\pi)^m |\Sigma|)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\},$$

Относительная энтропия

Для двух плотностей вероятности f и g (причем f абсолютно непрерывна по g, т.е. из $g(x) = 0$ следует $f(x) = 0$) относительной энтропией f относительно g (или расстоянием Кульбака-Лейблера) называют интеграл

$$\mathbf{D}(f||g) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx_1 \ldots dx_m, \quad 0 \ln 0 = 0. \tag{3}$$

Если g – гауссовская плотность вероятности с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m

$$g(x) \doteq p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left\{-\tfrac{x^T x}{2\lambda}\right\},$$

а f – нормальная плотность вероятности с ненулевым матожиданием μ и ковариационной матрицей Σ

$$f(x) = ((2\pi)^m |\Sigma|)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

то относительная энтропия (3) равна

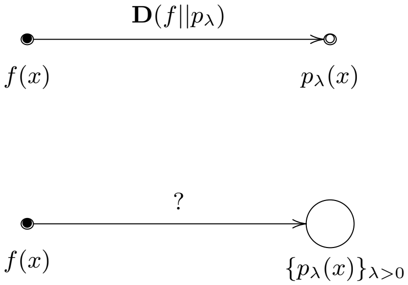
$$\mathbf{D}(f||p_\lambda) = \frac{m}{2}\ln(2\pi\lambda) + \frac{\mathrm{tr}\Sigma + |\mu|^2}{2\lambda} + \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \ln f(x) dx_1 \ldots dx_m. \tag{4}$$

Графическая интерпретация

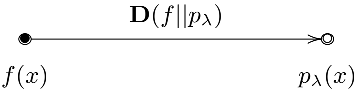
Графическая интерпретация

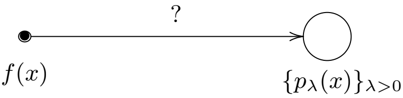
$$f(x) \xrightarrow{\mathbf{D}(f||p_\lambda)} p_\lambda(x)$$

Графическая интерпретация



Графическая интерпретация





Величину

$$\mathbf{A}(w) \doteq \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_\lambda) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}\Sigma + |\mu|^2} \right) \tag{5}$$

называют анизотропией вектора w с плотностью вероятности $f(x)$.

Средняя анизотропия последовательности

Средняя анизотропия последовательности

Пусть $W = \{w_k\}$ – стационарная эргодическая последовательность m-мерных случайных векторов. Определим среднюю анизотропию W (мера отличия для последовательности) как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \tag{6}$$

где

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Средняя анизотропия последовательности

Пусть $W = \{w_k\}$ – стационарная эргодическая последовательность m-мерных случайных векторов. Определим среднюю анизотропию W (мера отличия для последовательности) как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \qquad (6)$$

где

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Первая задача анализа:

как считать среднюю анизотропию последовательности?

Вычисление средней анизотропии

Пусть последовательность W генерируется из гауссовского белого шума $\{v_k\}$ формирующим фильтром

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k, & & \\ w_k & = & Cx_k^f & + & Dv_k & + & \mu_k, \end{array} \right. \tag{7}$$

где матрица A асимптотически устойчива ($\max|\lambda(A)| < 1$),матрица D невырождена ($\det D \neq 0$), а последовательность $\{\mu_k\}$ ограничена по модулю и сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k \doteq \mathcal{M}$ и $|\mathcal{M}| < \infty$.

Вычисление средней анизотропии

Пусть последовательность W генерируется из гауссовского белого шума $\{v_k\}$ формирующим фильтром

$$\begin{cases} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k, \\ w_k & = & Cx_k^f & + & Dv_k & + & \mu_k, \end{cases} \tag{7}$$

где матрица A асимптотически устойчива ($\max|\lambda(A)| < 1$),матрица D невырождена ($\det D \neq 0$), а последовательность $\{\mu_k\}$ ограничена по модулю и сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k \doteq \mathcal{M}$ и $|\mathcal{M}| < \infty$.

Рассмотрим простейший случай фильтра:

$$\begin{cases} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k & + & \nu, \\ w_k & = & Cx_k^f & + & Dv_k & + & \mu. \end{cases} \tag{8}$$

Легко проверить, что

$$\mathcal{M} = \mu + C(I - A)^{-1}\nu.$$

Результат 1: вычисление средней анизотропии

Теорема

Средняя анизотропия $\overline{\mathbf{A}}(W)$ последовательности W, сформированной фильтром (8), определяется по формуле

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m(\Sigma+\Xi)}{\mathrm{tr}\Sigma + |\mathcal{M}|^2}\right), \tag{9}$$

где матрицы Σ и Ξ связаны с решениями P и R уравнений Ляпунова и Риккати соотношениями

$$\begin{aligned} \Sigma &= CPC^T + DD^T, \\ P &= APA^T + BB^T, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Xi &= CRC^T, \\ R &= ARA^T - \Lambda(\Sigma+\Xi)^{-1}\Lambda^T, \\ \Lambda &= BD^T + A(P+R)C^T. \end{aligned}$$

Критерий качества

Критерий качества

Пусть $\{h_k\}$ – последовательность m-мерных векторов (вообще говоря, случайных). Мощностной нормой сигнала h называют число

$$\|h\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|h_k|^2}.$$

Критерий качества

Пусть $\{h_k\}$ – последовательность m-мерных векторов (вообще говоря, случайных). Мощностной нормой сигнала h называют число

$$\|h\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|h_k|^2}.$$

Для системы F, замкнутой регулятором K, со входом $\{w_k\}$ и выходом $\{z_k\}$ определим среднеквадратичный коэффициент усиления как

$$Q(F, W) \triangleq \frac{\|z\|_{\mathcal{P}}}{\|w\|_{\mathcal{P}}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|z_k|^2}{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|w_k|^2}}.$$

Анизотропийная норма

Анизотропийная норма

Пусть $\mathbb{W}_a$ – множество последовательностей $W = \{w_k\}$, для которых $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, где $a > 0$. Анизотропийная норма системы F определяется как

$$\left\| F \right\|_a \triangleq \sup_{\mathbb{W}_a} Q(F, W). \tag{10}$$

Анизотропийная норма

Пусть $\mathbb{W}_a$ – множество последовательностей $W = \{w_k\}$, для которых $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, где $a > 0$. Анизотропийная норма системы F определяется как

$$\left|\!\left|\!\left| F \right|\!\right|\!\right|_a \triangleq \sup_{\mathbb{W}_a} Q(F, W). \qquad (10)$$

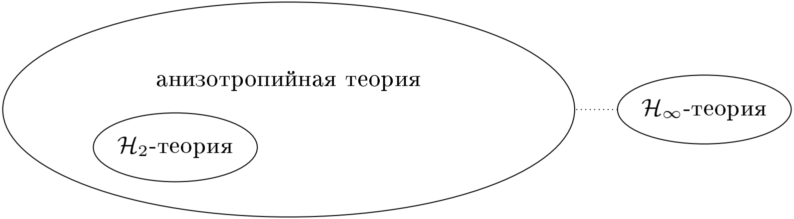
Свойство: $\|F\|_2/\sqrt{m} = \left|\!\left|\!\left| F \right|\!\right|\!\right|_0 \leqslant \left|\!\left|\!\left| F \right|\!\right|\!\right|_a \leqslant \left|\!\left|\!\left| F \right|\!\right|\!\right|_\infty = \|F\|_\infty$.

Анизотропийная норма

Пусть $\mathbb{W}_a$ – множество последовательностей $W = \{w_k\}$, для которых $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, где $a > 0$. Анизотропийная норма системы F определяется как

$$|\!|\!| F |\!|\!|_a \triangleq \sup_{\mathbb{W}_a} Q(F, W). \tag{10}$$

Свойство: $\|F\|_2/\sqrt{m} = |\!|\!| F |\!|\!|_0 \leqslant |\!|\!| F |\!|\!|_a \leqslant |\!|\!| F |\!|\!|_\infty = \|F\|_\infty$.

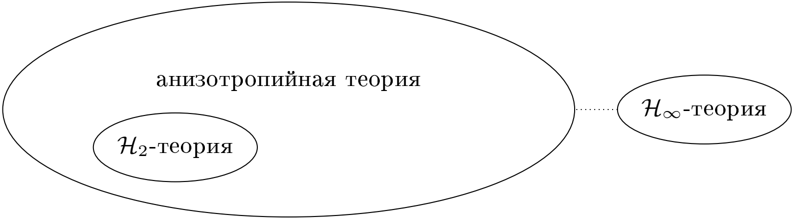


Анизотропийная норма

Пусть $\mathbb{W}_a$ – множество последовательностей $W = \{w_k\}$, для которых $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, где $a > 0$. Анизотропийная норма системы F определяется как

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a \triangleq \sup_{\mathbb{W}_a} Q(F, W). \tag{10}$$

Свойство: $\|F\|_2/\sqrt{m} = |\!|\!|F|\!|\!|_0 \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_\infty = \|F\|_\infty$.



Вторая задача анализа:

как считать анизотропийную норму системы?

Вычисление анизотропийной нормы

Вычисление анизотропийной нормы

Представим векторы w_k входных возмущений как сумму $w_k = w_k^0 + w_k^1$, где w_k^0 – векторы с нулевым матожиданием, генерируемые фильтром

$$G_0 \sim \left\{ \begin{array}{rclcl} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k, \\ w_k^0 & = & Cx_k^f & + & Dv_k, \end{array} \right.$$

а $w_k^1 = \mathbf{E}w_k$ – детерминированные векторы.

Вычисление анизотропийной нормы

Представим векторы w_k входных возмущений как сумму $w_k = w_k^0 + w_k^1$, где w_k^0 – векторы с нулевым матожиданием, генерируемые фильтром

$$G_0 \sim \left\{ \begin{array}{lcccc} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k, \\ w_k^0 & = & Cx_k^f & + & Dv_k, \end{array} \right.$$

а $w_k^1 = \mathbf{E}w_k$ – детерминированные векторы. Можно показать, что среднеквадратичный коэффициент усиления $Q(F,W)$ имеет вид

$$Q(F,W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}},$$

где $\mathcal{F} = D_{cl} + B_{cl}(I - A_{cl})^{-1}B_{cl}$.

Вычисление анизотропийной нормы

Представим векторы w_k входных возмущений как сумму $w_k = w_k^0 + w_k^1$, где w_k^0 – векторы с нулевым матожиданием, генерируемые фильтром

$$G_0 \sim \left\{ \begin{array}{lcccc} x_{k+1}^f & = & Ax_k^f & + & Bv_k, \\ w_k^0 & = & Cx_k^f & + & Dv_k, \end{array} \right.$$

а $w_k^1 = \mathbf{E} w_k$ – детерминированные векторы. Можно показать, что среднеквадратичный коэффициент усиления $Q(F, W)$ имеет вид

$$Q(F, W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}},$$

где $\mathcal{F} = D_{cl} + B_{cl}(I - A_{cl})^{-1} B_{cl}$.

Следующие теоремы завершают решение задачи анализа.

Результат 2: вычисление средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы системы

Теорема2

Существуют функции $A(q)$ и $N(q)$ аргумента $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})$, такие, что

$$A(q) = \overline{\mathbf{A}}(W), \; N(q) = Q(F, W),$$

где W – последовательность со спектральной плотностью $S(q)$.

Результат 2: вычисление средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы системы

Теорема2

Существуют функции $A(q)$ и $N(q)$ аргумента $q \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2})$, такие, что

$$A(q) = \overline{\mathbf{A}}(W), \; N(q) = Q(F, W),$$

где W – последовательность со спектральной плотностью $S(q)$.

Теорема3

Для анизотропийной нормы системы F справедлива формула

$$\|F\|_a = \sup_{q \in [0; \|F\|_{\infty}^{-2})} \{N(q) | A(q) = a\}.$$

Задача синтеза

Постановка задачи: построить регулятор K, который:

а) стабилизирует замкнутую систему,

б) минимизирует анизотропийную норму,

в) делает это для всех возмущений $\mathbb{W}_a$ с ограничением $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Задача синтеза

Постановка задачи: построить регулятор K, который:

а) стабилизирует замкнутую систему,

б) минимизирует анизотропийную норму,

в) делает это для всех возмущений $\mathbb{W}_a$ с ограничением $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Варианты решения:

1) вначале построить H_∞-регулятор, который бы "компенсировал" матожидания входного возмущения, затем вторым контуром построить анизотропийный регулятор, который бы "гасил" стохастику. Недостатки: такой регулятор не минимизирует анизотропийную норму.

Задача синтеза

Постановка задачи: построить регулятор K, который:

а) стабилизирует замкнутую систему,

б) минимизирует анизотропийную норму,

в) делает это для всех возмущений $\mathbb{W}_a$ с ограничением $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Варианты решения:

1) вначале построить H_∞-регулятор, который бы "компенсировал" матожидания входного возмущения, затем вторым контуром построить анизотропийный регулятор, который бы "гасил" стохастику. Недостатки: такой регулятор не минимизирует анизотропийную норму.

2) предположить выполнение некоторых условий на матожидание, при которых задача сводится к уже решенной - при нулевых векторах μ и ν. Недостатки: это удается сделать не для любых систем.

Заключение

- Предложен новый способ формирования входной последовательности $\{w_k\}$, который позволяет расширить класс входных возмущений в анизотропийной теории управления.
- Полностью решена задача анизотропийного анализа: получены формулы для вычисления анизотропии вектора, средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы системы.
- В рамках задачи синтеза предложены два подхода построения регулятора (которые, однако, нуждаются в уточнении).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

и терпение!