ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ЭЛЛИПСОИДЫ

М. В. Хлебников

(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН)

V Традиционная всероссийская молодежная летняя школа
"Управление, информация и оптимизация"
Солнечногорск, 16–23 июня 2013 г.

(Полу)определенные матрицы

Пусть $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Матрица A называется *положительно определенной* ($A \succ 0$), если

$$x^\top A x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

- Матрица A называется *неотрицательно определенной* ($A \succcurlyeq 0$), если

$$x^\top A x \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Запись $A \succ B$ означает, что $A - B \succ 0$

- Матрица A называется *отрицательно (неположительно) определенной* ($A \prec 0$, $A \preccurlyeq 0$), если $-A$ положительно (неотрицательно) определена

- $A \succ (\succcurlyeq) 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i(A) > (\geqslant) 0$

Элементарные свойства (полу)определенных матриц

Пусть A, B, C, D — матрицы соответствующих размерностей

- $A \prec (\preccurlyeq) 0, \quad B \prec (\preccurlyeq) 0 \quad \Longrightarrow \quad A + B \prec (\preccurlyeq) 0$
- $A \prec (\preccurlyeq) B, \quad C \prec (\preccurlyeq) D \quad \Longrightarrow \quad A + C \prec (\preccurlyeq) B + D$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \Longrightarrow \quad A^\top A \succcurlyeq 0, \quad AA^\top \succcurlyeq 0$
- A — квадратная невырожденная $\quad \Longrightarrow \quad A^\top A \succ 0, \quad AA^\top \succ 0$
- $A \succ 0$, $\quad B$ — полного строчного ранга $\quad \Longrightarrow \quad BAB^\top \succ 0$
- $A \succcurlyeq 0 \quad \Longrightarrow \quad BAB^\top \succcurlyeq 0$ для любой матрицы B
- $A \succcurlyeq B \succ 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \prec A^{-1} \preccurlyeq B^{-1}$
- $A = A^\top \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\min}(A) I \preccurlyeq A \preccurlyeq \lambda_{\max}(A) I$
- $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\max}(A) \leqslant \lambda_{\max}(B)$

Что такое “линейное матричное неравенство”?

Линейная система:

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Устойчивость линейной системы ($x(t) \longrightarrow 0$) эквивалентна существованию квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^\top Qx: \qquad V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \text{(производная в силу системы)}$$

Имеем:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^\top Qx) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = x^\top(A^\top Q + QA)x < 0$$

$\Longrightarrow$ неравенство Ляпунова:

$$A^\top Q + QA \prec 0$$

относительно матрицы $0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$n(n+1)/2$ переменных q_{ij} входят в матричное неравенство линейно!

Каноническая форма LMI

Линейное матричное неравенство $\equiv$ Linear Matrix Inequality $\equiv$ LMI

$F_i = F_i^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0, \ldots, \ell$, — матричные коэффициенты

$x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, \ell$, — скалярные переменные

Каноническая форма LMI:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i \prec 0$$

Оно эквивалентно числовому неравенству

$$\lambda_{\max}\big(F(x)\big) < 0$$

но функция $\lambda_{\max}\big(F(x)\big)$ нелинейна по x!

Приведение LMI к канонической форме

Сведем “матричное” LMI

$$AX + XA^\top + Q \preccurlyeq 0$$

к канонической форме. Пусть

$$E_1, \dots, E_\ell, \qquad \ell = n(n+1)/2$$

— базис в пространстве $\mathbb{S}^{n\times n}$.

Тогда

$$X = \sum_{i=1}^{\ell} x_i E_i$$

откуда

$$\underbrace{Q}_{F_0} + \sum_{i=1}^{\ell} x_i \underbrace{\left(AE_i + E_i A^\top\right)}_{F_i} \preccurlyeq 0$$

Кое-что из истории вопроса

- Первое LMI:

$$A^\top Q + QA \prec 0$$

А. М. Ляпунов (1892), теория устойчивости

- Термин “матричные неравенства”: В. А. Якубович (1962), задачи абсолютной устойчивости

“It is fair to say that Yakubovich is the father of the <LMI> field, and Lyapunov the grandfather” (С. Бойд)

- Выпуклость LMI: Е. С. Пятницкий, В. И. Скородинский (1982)

- Численные методы (методы внутренней точки): Ю. Е. Нестеров, А. С. Немировский (1988)

Задача может считаться решенной, если она сведена к формату LMI!

Nesterov Yu., Nemirovskii A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

Кое-что из истории вопроса (продолжение)

• Формулировка задач теории систем и управления в терминах LMI: S. Boyd (1994)

• Программные пакеты для среды Matlab, удобный интерфейс: SeDuMi (J. Sturm, 1998), YALMIP (J. Löfberg, 2001), `cvx` (S. Boyd, 2005)

• Использование аппарата LMI в управлении: Д. В. Баландин, М. М. Коган (2007)

Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

Sturm J. F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones (updated for version 1.05). URL `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`

Grant M., Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL `http://stanford.edu/~boyd/cvx`

Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

Элементарные свойства

- выпуклость:

$$F(x) \prec 0, \quad F(y) \prec 0 \quad \Longrightarrow \quad F\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \prec 0 \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- объединение нескольких LMI:

$$F_i(x) \prec 0, \quad i = 1, \ldots, m \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} F_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_m(x) \end{pmatrix} \prec 0$$

- двустороннее домножение:

$$F(x) \prec 0, \quad M \text{ — полного строчного ранга} \quad \Longrightarrow \quad MF(x)M^\top \prec 0$$

$$F(x) \preccurlyeq 0, \quad M \text{ — произвольная} \quad \Longrightarrow \quad MF(x)M^\top \preccurlyeq 0$$

Пример: степень устойчивости

Система

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

Знаем:

$$A^\top Q + QA \prec 0, \quad Q \succ 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}\lambda(A) < 0$$

но степень устойчивости

$$\sigma(A) = -\max_i \operatorname{Re}\lambda_i(A)$$

может быть сколь угодно малой!

Однако

$$A^\top Q + QA \preccurlyeq -2\sigma Q, \quad Q \succ 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}\lambda(A) \leqslant -\sigma$$

так как эквивалентно

$$(A + \sigma I)^\top Q + Q(A + \sigma I) \preccurlyeq 0$$

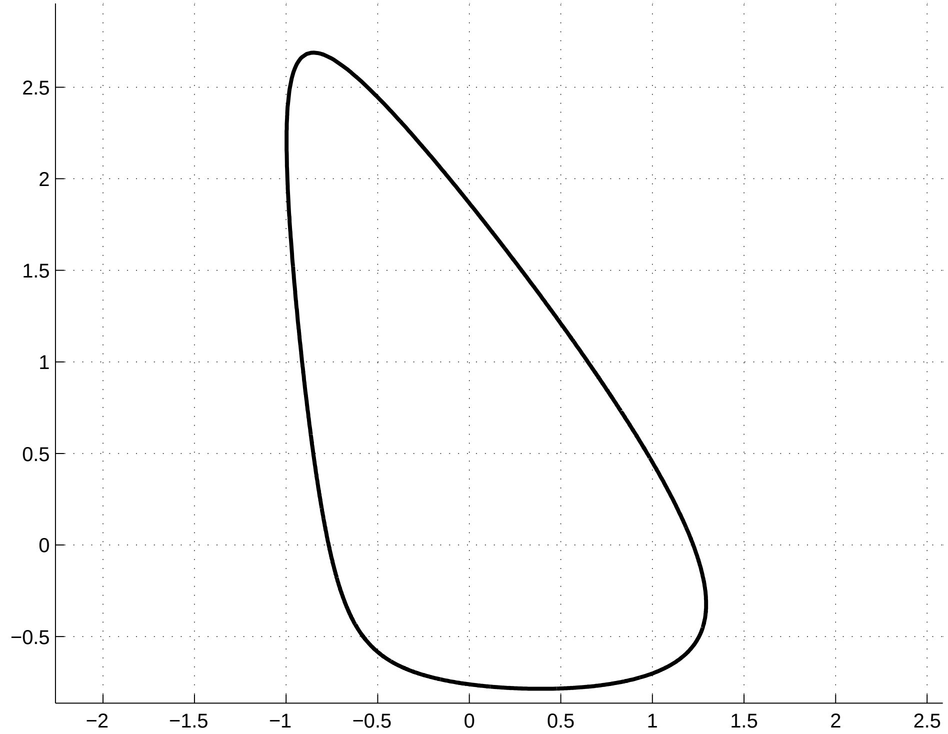
Допустимая область

- *Допустимая область* для LMI:

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} = \{x \in \mathbb{R}^\ell: \quad F(x) \preccurlyeq 0\}$$

$\mathcal{D}_{\text{feas}}$ — выпуклая область (возможно неограниченная, возможно пустая)

- *Задача допустимости* (feasibility) — отыскание некоторой точки $x \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$



Примеры допустимых областей

Простейший случай:

$$\ell = 2, \quad n = 2 \quad (\mathcal{D}_{\text{feas}} \subset \mathbb{R}^2)$$

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \implies \mathcal{D}_{\text{feas}} = \left\{ |x_2| \leqslant 1 \right\}$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \implies \mathcal{D}_{\text{feas}} = \left\{ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \right\}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

$\implies$ $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ — внутренность отрицательной ветви гиперболы $x_1 x_2 = 1$

Задача полуопределенного программирования

Задача *полуопределенного программирования* (Semi-Definite Programming, SDP):

$$c^\top x \longrightarrow \min \quad \text{при ограничении} \quad F(x) \preccurlyeq 0$$

Сведѐние задачи допустимости к SDP:

LMI $F(x) \preccurlyeq 0$ разрешимо $\iff$ задача SDP

$$\gamma \longrightarrow \min \qquad \text{при ограничении} \qquad F(x) \preccurlyeq \gamma I$$

относительно переменных $\gamma \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^\ell$ имеет решение $\widehat{\gamma}$, $\widehat{x}$ такое, что

$$\widehat{\gamma} \leqslant 0$$

При этом $\widehat{x}$ является допустимой точкой

Лемма Шура

Рассмотрим блочную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix}$$

где $M_{11} = M_{11}^\top$, $M_{22} = M_{22}^\top$, M_{12} — матрицы соответствующих размерностей

Лемма Шура.

$$M \prec 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{22} \prec 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \prec 0$$

Матрица $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top$ называется дополнением по Шуру к блоку M_{22}

Лемма Шура для нестрогого неравенства.

Пусть $M_{22} = M_{22}^\top$ — невырожденная матрица. Тогда

$$M \preccurlyeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{22} \prec 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \preccurlyeq 0$$

Сведѐние некоторых задач к LMI

Пусть

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{12}^\top(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix}$$

где $F_{ij}(x)$ — аффинны по $x = (x_1, \ldots, x_\ell)^\top$, $F_{11}(x) = F_{11}^\top(x)$, $F_{22}(x) = F_{22}^\top(x)$

$$F(x) \prec 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_{22}(x) \prec 0, \quad F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{12}^\top(x) \prec 0$$

Поскольку $F(x) \prec 0$ выпукло, то и второе неравенство выпукло!

Пример. Матричное неравенство Риккати относительно матрицы $P = P^\top$:

$$A^\top P + PA + PBR^{-1}B^\top P + Q \prec 0, \quad R \succ 0$$

По лемме Шура (в “обратную сторону”) оно эквивалентно LMI

$$\begin{pmatrix} A^\top P + PA + Q & PB \\ B^\top P & -R \end{pmatrix} \prec 0$$

$\Longrightarrow$ множество решений неравенства Риккати выпукло (что неочевидно!)

Сведѐние некоторых задач к LMI (продолжение)

• Ограничение на норму. Пусть $F(x)$ — аффинная матричная функция от x. Рассмотрим нелинейное неравенство

$$\|F(x)\|_2 \leqslant 1$$

$$\|F(x)\|_2 \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad F^\top(x)F(x) \preccurlyeq I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} I & F(x) \\ F^\top(x) & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

• Взаимно-обратные матрицы. Пусть $F(x)$, $G(x) \prec 0$ — симметричные аффинные матричные функции от x.

Неравенство

$$F(x) \preccurlyeq G^{-1}(x)$$

по лемме Шура эквивалентно LMI

$$\begin{pmatrix} F(x) & I \\ I & G(x) \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

Матричное описание эллипсоидов

Эллипсоид с центром в точке x_c и матрицей P:

$$\mathcal{E}(x_c, P) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad (x - x_c)^\top P^{-1}(x - x_c) \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0$$

LMI-форма записи:

$$\begin{pmatrix} 1 & (x - x_c)^\top \\ x - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad P \succ 0$$

Критерии минимальности эллипсоида:

- Сумма квадратов полуосей: $\operatorname{tr} P$ (след матрицы — линейная функция)
- Большая полуось: $\sqrt{\|P\|_2}$ (2-норма матрицы — сводится к линейной)
- Объем: $c_l\sqrt{\det P}$ (нелинейна, однако $-\log\det X$ выпукла для $X \succ 0$)

Вложенность эллипсоидов

- Пусть

$$\mathcal{E}(0,P)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad x^\top P^{-1}x\leqslant 1\right\},\quad P\succ 0$$

Условие

$$P\succcurlyeq \delta I$$

гарантирует, что

$$\mathcal{B}(0,\delta^{1/2})\subseteq\mathcal{E}(0,P)$$

- Обобщение:

$$\mathcal{E}(0,P_1)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad x^\top P_1^{-1}x\leqslant 1\right\},\quad P_1\succ 0$$

$$\mathcal{E}(0,P_2)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad x^\top P_2^{-1}x\leqslant 1\right\},\quad P_2\succ 0$$

Условие

$$P_1\preccurlyeq P_2$$

эквивалентно вложенности

$$\mathcal{E}(0,P_1)\subseteq\mathcal{E}(0,P_2)$$

Задача 1

Найти эллипсоид, минимальный *по критерию следа*, содержащий точки

$$x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}^n$$

Приходим к задаче SDP

$$\operatorname{tr} P \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_c)^\top \\ x_i - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 1, \dots, \ell$$

по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и векторной переменной $x_c \in \mathbb{R}^n$.

- Если центр эллипсоида фиксирован (например — начало координат), полагаем

$$x_c = \text{const}$$

Задача 2

Найти эллипсоид, минимальный *по критерию объема,* содержащий точки

$$x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}^n$$

1. Центр x_c эллипсоида фиксирован.

Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad (x - x_c)^\top Q(x - x_c) \leqslant 1\right\}, \qquad Q \succ 0$$

С учетом $Q = P^{-1}$ имеем $\log\det P = -\log\det Q \implies$ приходим к задаче выпуклой оптимизации:

$$-\log\det Q \longrightarrow \min$$

при линейных ограничениях

$$(x_i - x_c)^\top Q(x_i - x_c) \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, \ell, \qquad Q \succ 0$$

относительно матричной переменной $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Решение $\widehat{Q}$ определяет матрицу эллипсоида $\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}$

Задача 2 (продолжение)

2. Центр x_c эллипсоида нефиксирован.

Другая форма записи эллипсоида:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \|Ex - d\| \leqslant 1 \right\}$$

где E — прямоугольная матрица, d — вектор, норма $\|\cdot\|$ евклидова

Эллипсоид $(x - x_c)^\top P^{-1}(x - x_c) \leqslant 1$ представи́м в таком виде при

$$E = P^{-1/2} \succ 0, \qquad d = P^{-1/2} x_c$$

Далее, неравенство $\|Ex - d\| \leqslant 1$ эквивалентно

$$(Ex - d)^\top (Ex - d) \leqslant 1$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} 1 & (Ex - d)^\top \\ Ex - d & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

Задача 2 (продолжение)

Поскольку $P = E^{-2}$, то

$$\log\det P = \log\det E^{-2} = -2\log\det E$$

$\Longrightarrow$ приходим к задаче выпуклой оптимизации:

$$-\log\det E \longrightarrow \min$$

при линейных ограничениях

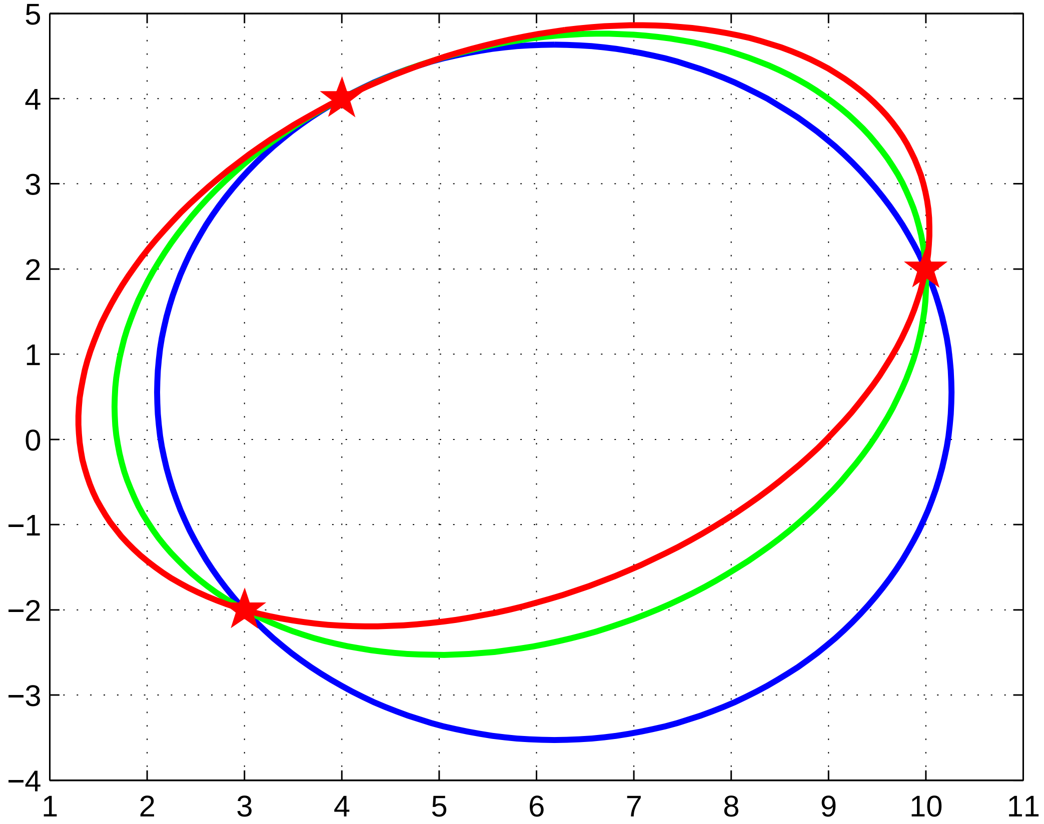
$$\begin{pmatrix} 1 & (Ex_i - d)^\top \\ Ex_i - d & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 1, \ldots, \ell, \qquad E \succ 0$$

по матричной переменной $E = E^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и векторной переменной $d \in \mathbb{R}^n$.

- Решение $\widehat{E}$, $\widehat{d}$ определяет параметры эллипсоида:

$$\widehat{P} = \widehat{E}^{-2}, \qquad \widehat{x}_c = \widehat{E}^{-1}\widehat{d}$$

Пример



Синим цветом показан эллипс, минимальный по критерию нормы

Зеленым — по критерию следа

Красным — по критерию объема

КОНКУРС АЛГОРИТМОВ

В пространстве $\mathbb{R}^n$ *заданы* N *точек:*

$$x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$$

Из них нужно выбросить R *точек так, чтобы оставшиеся* $N - R$ *точек содержались в эллипсоиде минимального объема.*

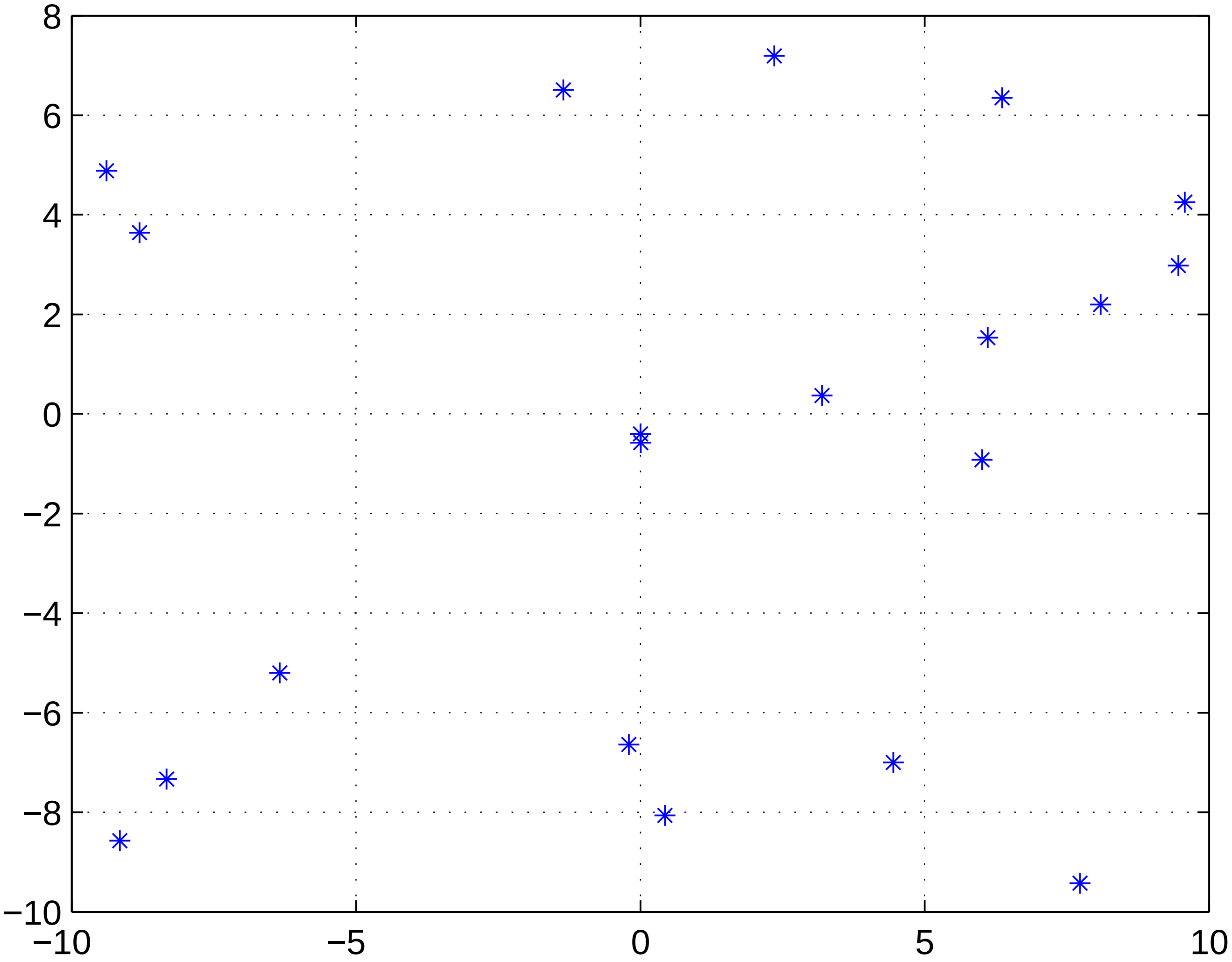
Пусть

- $n = 2, \quad N = 20, \quad R = 10 \qquad (C_{20}^{10} = 184756)$
- точки $x_1, \dots, x_{20} \in \mathbb{R}^2$ генерируются случайно в квадрате $\|x\|_\infty \leqslant 10$
- реализация — в среде Matlab
- продолжительность работы не более 180 секунд

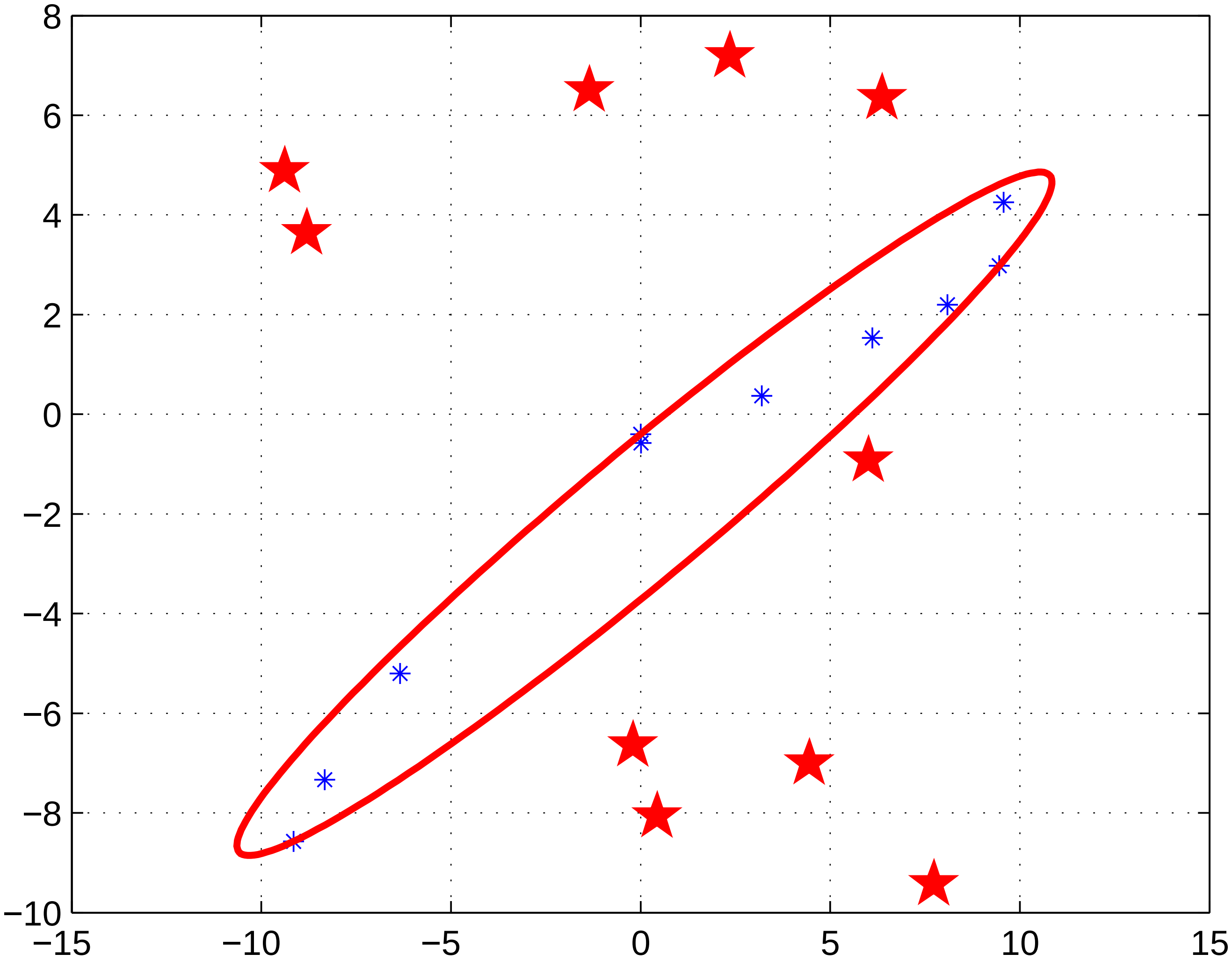
Сравнение алгоритмов:

- 10 тестовых наборов точек
- по каждому набору занимаемые места соответствуют объему эллипсоида
- минимальная сумма мест $\Longrightarrow$ победитель

Пример



Пример (продолжение)



Возможный подход к решению

Пусть d_i — штраф за непопадание точки x_i в эллипсоид. Рассмотрим вектор

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{pmatrix}^\top$$

Как минимизировать число его ненулевых компонент?

Назовем l_0-нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$ величину

$$\|x\|_0 \doteq \sum_{i=1}^{n} |\operatorname{sign} x_i|$$

- $\|x\|_0$ есть число ненулевых компонент вектора x
- $\|x\|_0$ не является нормой (нет однородности)
- Единичный шар $\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x\|_0 \leqslant 1\right\}$ невыпукл (координатные оси!)
- Трудная задача: $\|x\|_0 \longrightarrow \min \quad \text{при} \quad g(x) \leqslant 0$

Идея l_1-оптимизации

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Вспомним 1-норму вектора:

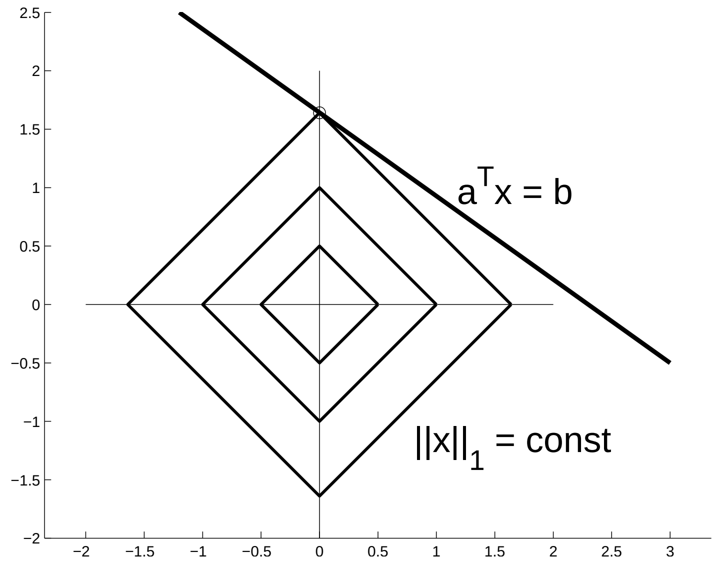
$$\|x\|_1 \doteq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\boxed{\text{минимизация 1-нормы вектора} \quad \Longrightarrow \quad \text{нулевые компоненты}}$$

Лемма. *Если задача минимизации*

$$\|x\|_1 \longrightarrow \min \quad \textit{при ограничениях} \quad Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, разрешима, то существует решение $\widehat{x}$ с не более чем m ненулевыми компонентами.



Пример: $m = 1$, $n = 2$

Насколько хорошо $\min \|x\|_1$ аппроксимирует $\min \|x\|_0$ при иных ограничениях?

Спасибо за внимание!