Достижение консенсуса за заданное время

С. Э. Парсегов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
Лаборатория №7 Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Содержание

Мультиагентные системы

распределенное координирование

сетевое управление

распределенная оптимизация

управление формациями

роение

децентрализованное управление

glocal control

мультиагентное управление

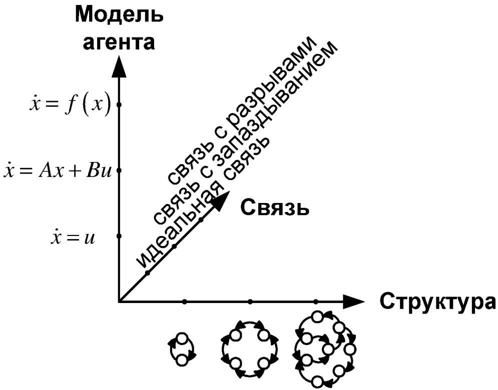
управление системами, которые представляют собой совокупность взаимодействующих подсистем, получающих **локальную информацию** по каналам связи для достижения некоторой **глобальной цели**

Классификация

- Консенсус/соглашение/синхронизация. Задачи перевода группы агентов в некоторое общее состояние
(Р.П. Агаев, О.Н. Граничин, А.В. Проскурников, А.Л. Фрадков, П.Ю. Чеботарев, R.W. Beard, J. Cortes, R.M. Murray, R. Olfati-Saber, W. Ren,...)
- Распределенная оптимизация
(S. Boyd, F. Zanella, M. Arcak, L. El Ghaoui, ...)
- Распределенное управление формациями
(Я.И. Квинто, Р.И. Козлов, Н.Н. Максимкин, П.С. Щербаков, С.А. Ульянов, F. Bullo, A. Williams, S. Hara, G. Lafferriere, M. Broucke, B. Francis, ...)
- Другие задачи: Диспетчеризация, распределенное оценивание и т.п.

Основные компоненты мультиагентной системы

- математическая модель агента
- сетевая структура
- связь между агентами



Мотивация

1. Желание скопировать поведение биологических групп

2. Большие группы простых агентов могут выполнять сложные задания. Более дешевые, надежные и гибкие решения, для многих операций можно использовать равноправных агентов

Консенсус

Википедия

Слово консенсус происходит от латинских слов cum – «с» или «совместно» и sentire – «мыслить» или «чувствовать». В широком смысле слова общее согласие при отсутствии возражений по существенным вопросам.

В мультиагентных системах:

Нестрогое определение

В простейшем случае консенсус означает достижение характеристиками агентов некоторого общего значения. Информацией обмениваются те агенты, между которыми установлены связи.

Консенсус и синхронизация

Другое нестрогое определение

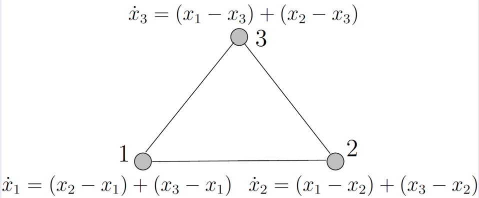
Под синхронизацией понимается согласованное во времени функционирование нескольких процессов или объектов. В частности, это может быть совпадение или сближение переменных состояния ... или согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем
(А.Л. Фрадков, “Кибернетическая физика”, СПб, 2003).

В истории:

- опыты Х. Гюйгенса по синхронизации маятниковых часов (XVII век)
- задача Г. Дарбу о перестановке вершин многоугольника (1878)
- опыты лорда Рэлея по синхронизации в акустических системах (XIX век)
- Персимфанс (1922-1932)

I. Линейный алгоритм

Пример



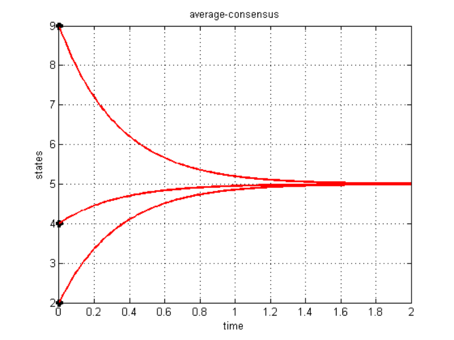
$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ u_i = \sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \end{cases}$$

$\mathcal{N}_i$ – “соседи” агента i

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$x_1(\infty) = x_2(\infty) = x_3(\infty) = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i(0)}{3}$$

Достигается **average-consensus**



Задача консенсуса

Модель агента

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Закон (протокол) управления

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i),$$

где a_{ij} — веса ребер графа

Протокол u_i решает **задачу консенсуса**, если для любых начальных условий и любых $j, k = 1, 2, \ldots, n$

$$|x_j(t) - x_k(t)| \to 0, \quad t \to \infty$$

Лемма 1

Пусть структура системы задается связным неориентированным графом, тогда протокол управления u_i решает задачу **average-consensus**:

$$x_j(t) \to x^* = (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i(0), \quad t \to \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Постановка задачи

Мультиагентная система из n агентов с динамикой

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Положим, что граф, характеризующий структуру мультиагентной системы, является связным.

Цель

Синтезировать управление в виде обратной связи, которое обеспечивает **точное достижение консенсуса за предопределенное время из любых начальных условий**

Подходы

1. "ускорение" линейного алгоритма путем настройки весов графа (Xiao, Boyd, Shafi, Arcak, El Ghaoui)
2. нелинейный протокол управления типа finite-time (Wang, Xiao, Jiang)
3. новый протокол управления типа fixed-time (гарантирующий сверхфинитную устойчивость решения)

II. Нелинейный алгоритм

Финитная устойчивость

S.P. Bhat, D.S. Bernstein, SIAM Journal of Control and Optimization 2000

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = g(t,z), \quad z(0) = z_0,$$

где $z \in \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Определение

Нулевое положение равновесия системы называется *глобально финитно устойчивым*, если оно глобально асимптотически устойчиво и каждое решение $z(t,z_0)$ системы достигает его за конечное время, т.е., $\forall z_0 \in \mathbb{R}^n \; \exists T(z_0) \geq 0 : z(t,z_0) = 0 \forall\, t \geq T(z_0)$, где $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{0\}$ — функция времени установления.

Например, всякое решение системы $\dot{z} = -z^{\frac{1}{3}}, z \in \mathbb{R}$
сходится к нулевому положению равновесия за конечное время

$$T(z_0) := \frac{3}{2}\sqrt[3]{|z_0|^2}$$

Сверхфинитная устойчивость

А.Е. Поляков, IEEE Trans. on Automatic Control 2012

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = g(t,z), \quad z(0) = z_0,$$

где $z \in \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Определение

Нулевое положение равновесия системы называется *сверхфинитно устойчивым*, если оно глобально финитно устойчиво и функция времени установления $T(z_0)$ ограничена, т.е., $\exists T_{\max} > 0 : \; T(z_0) \le T_{\max} \, \forall z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Система $\dot{z} = -z^{[\frac{1}{2}]} - z^{[2]}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z(0) = z_0$
сверхфинитно устойчива, поскольку ее решение имеет вид

$$z(t,z_0) = \begin{cases} \mathrm{sign}(z_0)\tan^2\left(\frac{T(z_0)-t}{2}\right) & 0 \le t \le T(z_0), \\ 0 & t > T(z_0), \end{cases}$$

где $T(z_0) = 2\arctan(\sqrt{|z_0|}) \le \pi$ и $z^{[k]} := \mathrm{sign}(z)|z|^k$

Лемма 2

Если существует непрерывная радиально неограниченная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, такая что

1. $V(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ и
2. любое решение $z(t)$ системы д.у. удовлетворяет при всех $t \geq 0$ неравенству
$$\dot{V}(z(t)) \leq -\alpha V^p(z(t)) - \beta V^q(z(t))$$
при некоторых $\alpha, \beta, p, q > 0$: $p < 1$, $q > 1$,

тогда начало координат является глобально сверхфинитно устойчивым положением равновесия системы (1) и справедлива следующая оценка:

$$T(z_0) \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(q-1)} \quad \forall z_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Если выбирать параметры p и q особым образом:

Лемма 3

Если существует непрерывная радиально ограниченная функция $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, такая что

1. $V(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ и
2. любое решение $z(t)$ системы д.у. удовлетворяет при всех $t \geq 0$ неравенству

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\alpha V^p(z(t)) - \beta V^q(z(t))$$

при некоторых $\alpha, \beta > 0$, $p = 1 - \frac{1}{2\gamma}$, $q = 1 + \frac{1}{2\gamma}$, $\gamma > 1$,

тогда начало координат является глобально сверхфинитно устойчивым положением равновесия системы (1) и справедлива следующая оценка:

$$T(z_0) \leq \frac{\pi\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}, \forall z_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Основной результат: сверхфинитный протокол

Модель агента и протокол управления

$$\dot{x}_i = u_i,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\Big(x_j - x_i\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Выберем следующие функции взаимодействия между агентами

$$\phi_{ij} = \alpha(a_{ij}(x_j - x_i))^{[\mu]} + \beta(a_{ij}(x_j - x_i))^{[\nu]}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\alpha, \beta > 0, \quad 0 < \mu < 1, \quad \nu > 1, \quad a_{ij} = a_{ji} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$

Основной результат: сверхфинитный протокол

Теорема

Положим, что граф системы связный, тогда протокол управления

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\Big(x_j - x_i\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

обеспечивает достижение общего для всех агентов состояния $x^* = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i(0)$ каждым агентом за время, которое глобально ограничено величиной $T_{\max 1}$:

$$T_{\max 1} = \frac{2}{\bar{\alpha}(1-\mu)} + \frac{2}{\bar{\beta}(\nu-1)} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

где $0 < \mu < 1$, $\nu > 1$, $\bar{\alpha} = 2^{\mu}\alpha\lambda_2^{\frac{\mu+1}{2}}(\mathscr{L}_1)$, $\bar{\beta} = 2^{\nu}\beta n^{\frac{1-\nu}{2}}\lambda_2^{\frac{\nu+1}{2}}(\mathscr{L}_2)$, $\lambda_2(\mathscr{L}_1)$ и $\lambda_2(\mathscr{L}_2)$ — алгебраические связности графов с весами ребер $a_{ij}^{\frac{2\mu}{\mu+1}}$ и $a_{ij}^{\frac{2\nu}{\nu+1}}$, соответственно, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство

$$\phi_{ij}(x_j - x_i) = -\phi_{ji}(x_i - x_j) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) = 0 \Rightarrow x^* = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

Введем новые переменные — рассогласования агентов δ_i:

$$x_i = x^* + \delta_i$$

Очевидно, что $\dot{\delta}_i(t) = \dot{x}_i(t)$ и $x_j - x_i = \delta_j - \delta_i \Rightarrow$ будем исследовать систему

$$\dot{\delta}_i = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\Big(\delta_j - \delta_i\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Рассмотрим функцию (Olfati-Saber, Murray 2003):

$$V(\delta) = 0.5\delta^\top \delta = 0.5\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$$

$$\dot{V}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \dot{\delta}_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha a_{ij}^{\mu}(\delta_j - \delta_i)^{[\mu]} + \beta a_{ij}^{\nu}(\delta_j - \delta_i)^{[\nu]}\Big)$$

Доказательство

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(\delta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_i\phi_{ij}(\delta_j-\delta_i)\\
&= 0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_i\phi_{ij}(\delta_j-\delta_i)+0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\phi_{ji}(\delta_i-\delta_j)\\
&= 0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_i\phi_{ij}(\delta_j-\delta_i)-0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\phi_{ij}(\delta_j-\delta_i)\\
&= -0.5\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_j-\delta_i)\phi_{ij}(\delta_j-\delta_i)
\end{aligned}
$$

Учитывая, что $s=\mathrm{sign}(s)|s|$, получим

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(\delta) &= 0.5\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_i-\delta_j)\left(\alpha a_{ij}^{\mu}(\delta_j-\delta_i)^{[\mu]}+\beta a_{ij}^{\nu}(\delta_j-\delta_i)^{[\nu]}\right)\\
&= -0.5\sum_{i,j=1}^{n}\left(\alpha a_{ij}^{\mu}|\delta_j-\delta_i|^{\mu+1}+\beta a_{ij}^{\nu}|\delta_j-\delta_i|^{\nu+1}\right)\leq 0
\end{aligned}
$$

Доказательство

Эквивалентность норм в конечномерных пространствах

$$\|z\|_l \le \|z\|_r \le n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{l}} \|z\|_l$$

для любых $z \in \mathbb{R}^n$ и $l > r > 1$

Очевидно, что $0 < \mu + 1 < 2$, а $\nu + 1 > 2$

$$\dot{V} \le -0.5\alpha \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{2\mu}{\mu+1}} (\delta_j - \delta_i)^2 \right)^{\frac{\mu+1}{2}}$$

$$-0.5\beta n^{\frac{1-\nu}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{2\nu}{\nu+1}} (\delta_j - \delta_i)^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}}$$

Доказательство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{2\mu}{\mu+1}}(\delta_j - \delta_i)^2 = 2\delta^\top \mathscr{L}_1 \delta \geq 4\lambda_2(\mathscr{L}_1)V(\delta),$$

где $\mathscr{L}_1$ — лапласовская матрица графа с весами ребер $a_{ij}^{\frac{2\mu}{\mu+1}}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{2\nu}{\nu+1}}(\delta_j - \delta_i)^2 = 2\delta^\top \mathscr{L}_2 \delta \geq 4\lambda_2(\mathscr{L}_2)V(\delta),$$

где $\mathscr{L}_2$ — лапласовская матрица графа с весами ребер $a_{ij}^{\frac{2\nu}{\nu+1}}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.
Ограничение на $\dot{V}$

$$\dot{V} \leq -2^\mu \alpha \lambda_2^{\frac{\mu+1}{2}}(\mathscr{L}_1)V^{\frac{\mu+1}{2}} - 2^\nu \beta n^{\frac{1-\nu}{2}} \lambda_2^{\frac{\nu+1}{2}}(\mathscr{L}_2)V^{\frac{\nu+1}{2}}$$

Доказательство

Введем обозначения:

$$p = \frac{\mu+1}{2},\, q = \frac{\nu+1}{2}, \quad \bar{\alpha} = 2^{2p-1}\alpha\lambda_2^p(\mathscr{L}_1),\, \bar{\beta} = 2^{2q-1}\beta n^{1-q}\lambda_2^q(\mathscr{L}_2)$$

Ограничение на полную производную функции Ляпунова:

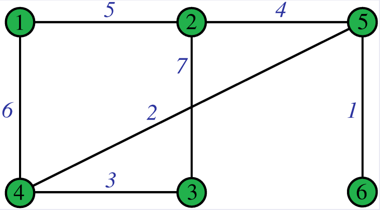
$$\dot{V} \le -\bar{\alpha}V^p - \bar{\beta}V^q, \quad \bar{\alpha},\bar{\beta} > 0, 0 < p < 1, q > 1$$

Следствие

Если соблюдены условия теоремы и константы μ, ν протокола управления имеют вид: $\mu = 1 - \frac{1}{\gamma}$ и $\nu = 1 + \frac{1}{\gamma}$, $\gamma > 1$, то оценка времени установления имеет вид

$$T_{\max 2} := \frac{\pi\gamma n^{\frac{1}{4\gamma}}}{2\sqrt{\alpha\beta}\lambda_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\gamma}}(\mathscr{L}_1)\lambda_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4\gamma}}(\mathscr{L}_2)}$$

Пример. Система из шести агентов



Начальное положение агентов:
$x(0) = [350, 100, 200, 250, 400, 500]^\top$.

$$\dot{x}_i = u_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

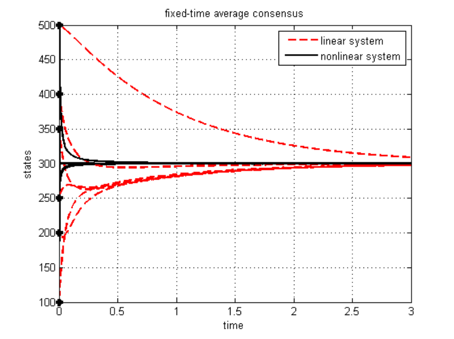
1. $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_i)$
2. $u_i = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\left(x_j - x_i\right)$

Параметры нелинейного протокола:
$\gamma = 1.1 \Rightarrow \mu \approx 0.0909$,
$\nu \approx 1.9091, \quad \alpha = \beta = 1$

$$T_{\max 1} = 3.4379$$

$$T_{\max 2} = 2.5483$$

$$T_r \approx 1.7$$



Заключение

Заключение

Достоинства

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus
2. доказано, что гарантированное время достижения консенсуса может быть выбрано заранее независимо от начальных условий (сверхфинитная устойчивость)

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus
2. доказано, что гарантированное время достижения консенсуса может быть выбрано заранее независимо от начальных условий (сверхфинитная устойчивость)
3. основная теорема дает довольно консервативную оценку на время установления, более точная оценка может быть получена с использованием следствия

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus
2. доказано, что гарантированное время достижения консенсуса может быть выбрано заранее независимо от начальных условий (сверхфинитная устойчивость)
3. основная теорема дает довольно консервативную оценку на время установления, более точная оценка может быть получена с использованием следствия

Недостатки

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus
2. доказано, что гарантированное время достижения консенсуса может быть выбрано заранее независимо от начальных условий (сверхфинитная устойчивость)
3. основная теорема дает довольно консервативную оценку на время установления, более точная оценка может быть получена с использованием следствия

Недостатки

1. поскольку синтезированный протокол содержит $(x_j - x_i)^{[\mu]}$, $0 < \mu < 1$, необходимо точное измерение $(x_j - x_i)$

Заключение

Достоинства

1. синтезирован сверхфинитный протокол достижения average-consensus
2. доказано, что гарантированное время достижения консенсуса может быть выбрано заранее независимо от начальных условий (сверхфинитная устойчивость)
3. основная теорема дает довольно консервативную оценку на время установления, более точная оценка может быть получена с использованием следствия

Недостатки

1. поскольку синтезированный протокол содержит $(x_j - x_i)^{[\mu]}$, $0 < \mu < 1$, необходимо точное измерение $(x_j - x_i)$
2. при удалении начальных условий от положения равновесия необходимо более "мощное" управление

Спасибо за внимание !