

В.Ю.Протасов (МГУ)

## Совместный спектральный радиус: приложения и методы вычисления

$A_1, K, A_m$  - линейные операторы в  $\mathbf{R}^d$

(1960) Joint spectral radius, Rota, Strang

(1960) Lyapunov exponent, Furstenberg, Kesten, (1968) Oseledec

(1995) p-radius, Lau, Wang

(1995) Lower spectral radius, Gurvits

### The Joint spectral radius (JSR)

J.C.Rota, G.Strang (1960) -- Normed algebras

$$\hat{\rho}(A_1, K, A_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{d_1, \dots, d_k \in \{1, \dots, m\}} \left\| A_{d_1} L A_{d_k} \right\|^{1/k}$$

Molchanov, Pyatnicky, Opoytsev,  
Barabanov, V.Kozyakin, ... (1988)

Linear switching systems

Micchelli, Prautzsch, Dahmen,  
Levin, Dyn, ..... (1989)

Subdivision algorithms

I.Daubechies, J.Lagarias (1991)

Wavelets

## Совместный спектральный радиус (JSR)

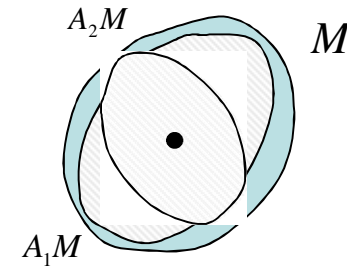
$A_1, \dots, A_m$  -- линейные операторы в  $\mathbf{R}^d$

$$\hat{\rho}(A_1, \dots, A_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{d_1, \dots, d_k \in \{1, \dots, m\}} \left\| A_{d_1} \dots A_{d_k} \right\|^{1/k}$$

Геометрический смысл:

$\hat{\rho} < 1 \Leftrightarrow$  существует норма  $\|\bullet\|$  в  $\mathbf{R}^{d, g, f}$

для которой  $\|A_i\| < 1$  при всех  $i = 1, \dots, m$



Возьмём единичный шар в этой норме:

$\hat{\rho} < 1 \Leftrightarrow$  существует центрально-симметричное выпуклое тело  $M \subset \mathbf{R}^{d, g, f}$

для которого  $A_i M \subset \text{int} M$ ,  $i = 1, \dots, m$

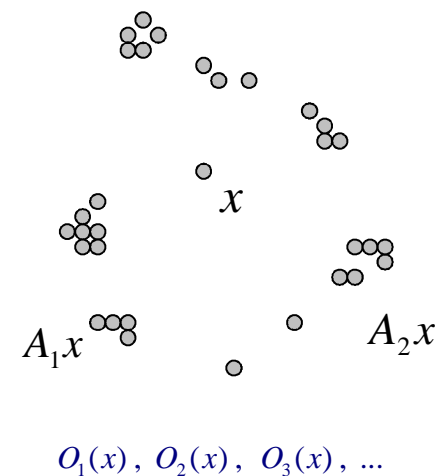
$$\hat{\rho} = \inf \{ \lambda > 0 \mid \lambda^{-1} A_1, \dots, \lambda^{-1} A_m \text{ — сжатия в некоторой норме} \}$$

## Геометрический смысл JSR

Пусть  $m = 2$ . Предположим, что семейство  $\{A_1, A_2\}$  неприводимо.

$x \in \mathbf{R}^d$  – произвольная точка,  $x \neq 0$ ,

$O_k(x) = \{A_{d_1} \dots A_{d_k} x, d_j = 1, 2, j = 1, \dots, k\}$  - орбита точки  $x$ .



$$\Rightarrow \max \left\{ |u| \mid u \in O_k \right\} ; \hat{\rho}^k$$

$JSR$  - показатель роста норм  $\max_{d_1, \dots, d_k} \left\| A_{d_1} \dots A_{d_k} \right\| \approx \hat{\rho}^k$

## Приложения:

- 1960 Rota, Strang (теория нормированных алгебр)
- 1988-90 Барабанов, Козьякин (динамические системы с переключениями)
- 1991 Daubechies, Lagarias, Cohen, Heil, .... (теория всплесков)
- 1989-92 Micchelli, Prautzsch, Dyn, Dahmen, ... (уточняющие схемы – теория приближений и дизайн кривых и поверхностей)

Распределение случайных рядов (теория вероятностей),  
Асимптотика бинарной функции разбиения Эйлера (комбинаторика, теория чисел),  
Емкость кодов, оценка числа неперекрывающихся слов, теория графов, ....

## Основные свойства

$$m = 1. \text{ Для одного оператора } \hat{\rho}(A) = \rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \max_{j=1, \dots, d} |\lambda_j|$$

Если операторы  $A_1, \dots, A_m$  коммутируют, либо их матрицы симметричны, либо их матрицы -- верхне (нижне) треугольные, то

$$\hat{\rho}(A_1, \dots, A_m) = \max \{ \rho(A_1), \dots, \rho(A_m) \}$$

В общем случае, однако  $\hat{\rho}(A_1, \dots, A_m) > \max \{ \rho(A_1), \dots, \rho(A_m) \}$

## Всплески с компактным носителем (compactly-supported wavelets)

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$  полная ортонормированная система (ПОНС) в  $L_2(\mathbf{R})$ ,

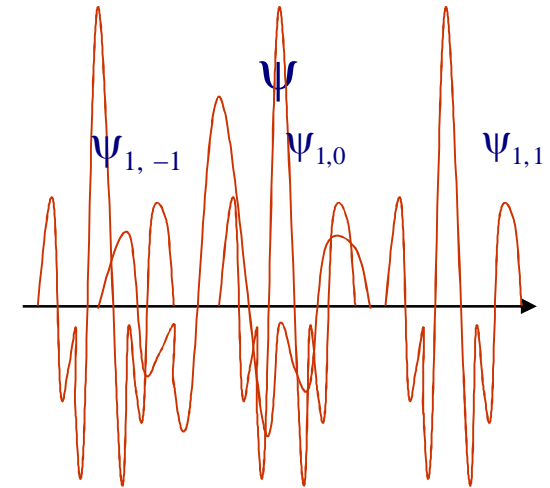
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

**Пример 1.** Система Хаара (Haar, 1909),  $\psi(x) = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$

А.Хаар (1909), В.А. Котельников (1933), К.Э.Шеннон (1949),

1980-90: С.Малла, И.Мейер, И.Добеши, Ч.Чуи, А.Коэн, В.Дамен, и др.

I.Daubechies (1988) — всплески с компактным носителем.



### Преимущества всплесков:

Локализация (компактные носители),  
Быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов,  
Характеризация функциональных пространств

■ **Обработка сигналов**

■ **Теория функций, теория приближений**

■ **Диф. Уравнения (Вейвлет-Галёркин метод, и др.)**

$$f(x) = \sum_{k,j \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

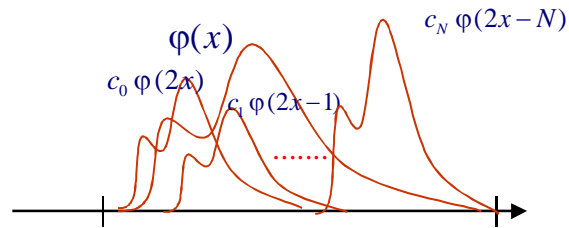
$$c_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

## Построение всплесков. Масштабирующие уравнения.

Для построения системы всплесков с компактным носителем нужно решить масштабирующее уравнение (**refinement equation**) – разностное функциональное уравнение со сжатием аргумента.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x - k),$$

$c_0, \dots, c_N$  – последовательность комплексных коэффициентов.



Это – обычное разностное уравнение, но с двоичным сжатием аргумента.

Когда масштабирующая функция  $\varphi$  найдена, всплеск-функция  $\psi$  явно выписывается:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \bar{c}_{k+1} \varphi(2x + k),$$

где  $c_0, \dots, c_N$  – коэффициенты масштабирующего уравнения.

## Примеры систем всплесков

### 1. Всплески Хаара (1909)

Масштабирующее уравнение:  $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$



### 2. Всплески Шеннона-Котельникова (1933, 1949)

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad \psi(x) = \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x} \quad \text{Носитель некомпактен!}$$

### 3. Всплески Мейера (1986), Всплески Баттла-Лемарье (1987) Носитель некомпактен!

### 4. Всплески Добеши (1988)

Второй всплеск Добеши. Масштабирующее уравнение:

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \varphi(2x) + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \varphi(2x-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4} \varphi(2x-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \varphi(2x-3)$$



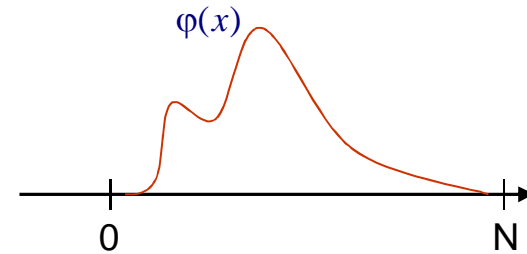
## Что известно о масштабирующих уравнениях ?

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x-k),$$

Если есть решение с компактным носителем, и  $\int \varphi(x) dx \neq 0$  то  $\sum_{k=0}^N c_k = 2$

Обратно, если  $\sum_{k=0}^N c_k = 2$ , то есть решение с компактным носителем. Оно единственно с точностью о домножения на константу и сосредоточено на отрезке  $[0, N]$ .

**Но** только в обобщённых функциях из  $S'(\mathbb{R})$



$$\hat{\varphi}(\xi) = m(\xi/2) \hat{\varphi}(\xi/2), \quad m(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N c_k e^{-2\pi i k \xi}$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j} \xi)$$

**Масштабирующая функция не бывает бесконечно-гладкой**

$$\varphi \notin C^{\infty}(\mathbb{R})$$

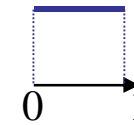


## Примеры масштабирующих уравнений

Примеры 1.  $c_0 = c_1 = 1$

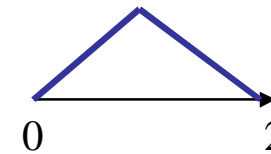
$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$$

Тривиально:  $\varphi =$



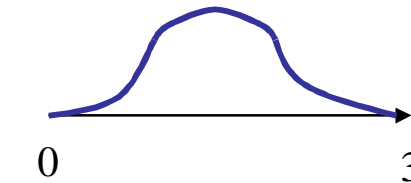
Пример 2.  $c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$

$\varphi =$



Пример 3.  $c_0 = \frac{1}{4}, c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = \frac{3}{4}, c_3 = \frac{1}{4}$

$\varphi =$



Решение неустойчиво !

Малые изменения коэффициентов могут приводить к резким изменениям решения:

Пример 4.  $c_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$      $c_1 = 1 - \varepsilon$      $c_2 = \frac{1}{2}$

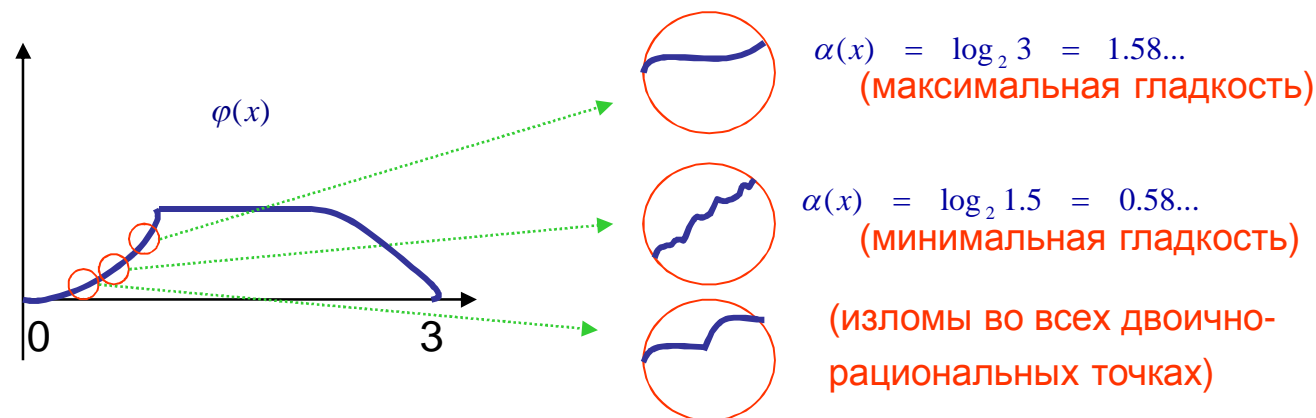
$\varphi$  чисто сингулярно.

То же с примером  $c_0 = \frac{1}{4} + \varepsilon$      $c_1 = \frac{3}{4} - \varepsilon$      $c_2 = \frac{3}{4}$      $c_3 = \frac{1}{4}$

$\varphi$  чисто сингулярно.

## “ Типичная ” масштабирующая функция и всплеск-функция

Пример 5 
$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\varphi(2x) + \frac{2}{3}\varphi(2x-1) + \frac{1}{3}\varphi(2x-2) + \frac{2}{3}\varphi(2x-3)$$



$\alpha = \sup \{ \beta \geq 0 \mid |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq C h^\beta \text{ for all } x, h \}$  показатель гладкости (показатель Гельдера)

$\alpha = \log_2 1.5 = 0.58... \Rightarrow \varphi$  Непрерывна, но не дифференцируема

Тем не менее, она дифференцируема почти всюду

$\alpha(x) = \sup \{ \beta \geq 0 \mid |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq C h^\beta \}$  Локальная гладкость в точке  $x$

Почти во всех точках  $\alpha(x) = \log_2 2.25 = 1.17... \Rightarrow$  Следовательно,  $\varphi'(x) = 0$  п.в.

Фрактальная природа всплесков. Переменная локальная гладкость.

# Как определить, будет ли масштабирующая функция непрерывной ?

I.Daubechies, D.Lagarias, 1991

A.Cavaretta, W.Dahmen, C.Micchelli, 1991

C.Heil, D.Strang, 1994

$$\varphi \in C(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$$

$$\text{Более того, } \alpha = -\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$$

$$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{d_1, K, d_k} \left\| A_{d_1} L A_{d_k} \right\|^{1/k}$$

Пример.  $N = 4, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$

$T_0, T_1$  -  $N \times N$  - матрицы (2-блочные тёплицевы матрицы),

$$(T_i)_{jk} = c_{2j-k-1+i}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_4 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_4 & c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

## Как вычислить или оценить JSR ?

**Перебором** ( $\approx$  по определению) Daubechies, Lagarias, Heil, Strang, Экспоненциальная сложность. Heil, Strang (1994) для вычисления JSR специальных  $2 \times 2$ -матриц с относительной погрешностью  $\varepsilon = 0.05$  перебрали все произведения до длины  $k = 19$ .

G.Gripenberg (1996) - "branch and bound" алгоритм.

Разумный перебор. Часто очень эффективен. Но теоретически плох.

Сходимость к величине JSR при растущем  $k$  очень медленная.

Причина медленной сходимости:

$$\max_{d_1, \dots, d_k \in \{1, \dots, m\}} \left\| A_{d_1} L A_{d_k} \right\|^{1/k} \rightarrow \hat{\rho}, \quad k \rightarrow \infty$$

Выбранная норма в  $\mathbb{R}^{dd}$  может быть слишком далека от той, в которой все операторы - сжимающие.

Скорость сходимости  $\frac{C}{k}$ , где константа  $C$  - отношение двух норм.

Она может быть велика.

## Инвариантные нормы

### Теорема 1 (Н. Барабанов, 1988)

а) Для неприводимого семейства операторов  $A_1, \dots, A_m$  существует  $\lambda > 0$  и норма  $\|\bullet\|$ , для которой при любом  $x \in \mathbf{R}^d$

$$\max \{ \|A_1 x\|, \dots, \|A_m x\| \} = \lambda \|x\|$$

б) Для любой такой нормы имеем  $\lambda = \hat{\rho}(A_1, \dots, A_m)$ .

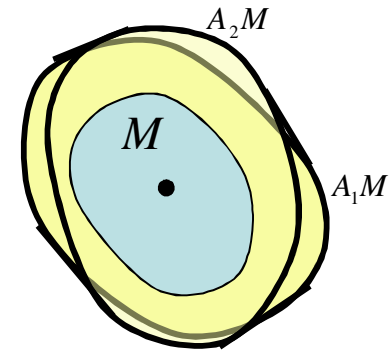
Независимо был установлен “двойственный” факт:

### Теорема 2 (А.Дранишников, С.Конягин, В.Протасов, 1996)

а) Для неприводимого семейства операторов  $A_1, \dots, A_m$  существует  $\lambda > 0$  и симметричное выпуклое тело  $M$  (инвариантное тело) такое, что

$$\bar{A}M \stackrel{def}{=} Conv(A_1 M, \dots, A_m M) = \lambda M$$

б) Для любого такого тела  $\lambda = \hat{\rho}(A_1, \dots, A_m)$ .



$$\bar{A}M \stackrel{def}{=} Conv(A_1 M, \dots, A_m M)$$

**Двойственность:**  $M = B^*$  (полюра к  $B$ ), где  $B$  - единичный шар в Барабановской норме для сопряженных операторов  $A_1^*, \dots, A_m^*$  (F.Wirth, E.Plishke, 2005)

**Все существующие методы вычисления JSR основаны на  
приближении инвариантного тела  
(многогранниками, эллипсоидами, и т.д.)**

- Branch-and-bound method («разумный перебор») Daubechies, Lagarias (1991), Grippenberg (1996), Hechler, Mossner, Reif (2009)
- Ellipsoidal norms, Ando, Shih (1998), Blondel, Nesterov, Theys (2004)
- Kronecker lifting method (приближение инвариантной нормы тензорными произведениями), Protasov (1997), Zhou (1998), Blondel, Nesterov (2005)
- Sum-of-squares method (приближение инвариантной нормы суммами квадратов полиномов), Parrilo, Jadbabai (2008)
- Conic programming approach, Protasov, Jungers, Blondel (2010)

**Все методы – для невысоких размерностей (до 5, реже – до 10)**

**Точность невысока. Относительная погрешность – от 2 до 20 %**

## Отрицательные результаты о сложности задачи вычисления JSR:

Blondel, Tsitsiclis (1997-2000).

Задача приближённого вычисления JSR для рациональных матриц NP-сложна.

Задача определения: верно ли, что JSR строго меньше 1 (для рациональных неотрицательных матриц) алгоритмически неразрешима, начиная с размерности  $d = 47$ .

Не существует алгоритма, полиномиального по размерности  $d$  и по точности  $\frac{1}{\varepsilon}$  для приближения JSR с относительной погрешностью  $\varepsilon$

Sometimes easier to prove more

*George Polya* «Mathematics and Plausible Reasoning» (1954)

When trying to *prove* something, often a good strategy is to try to *prove more*.

(Если не получается что-то доказать, можно попробовать доказать больше).

Если не получается хорошо приблизить JSR, можно попробовать ...

вычислить его точно.



## Метод точного вычисления совместного спектрального радиуса

(N. Guglielmi, V. Protasov, 2013).

- Применим к любым размерностям (эффективен на практике в размерностях до 20, для неотрицательных матриц – до 100)
- Сводит задачу вычисления JSR к поиску корня некоторого полинома
- Позволил решить ряд открытых проблем теории чисел и комбинаторики

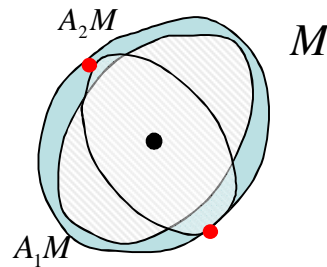
## Понятие экстремальной нормы

**Определение.** Норма  $\| \cdot \|$  является экстремальной, если  $\| A_j \| \leq \hat{\rho}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Для экстремальной нормы сходимость осуществляется в один шаг:

$$\max_{d_1, \dots, d_k \in \{1, \dots, m\}} \| A_{d_1} \mathbf{L} A_{d_k} \|^{1/k} \rightarrow \hat{\rho}, \quad k \rightarrow \infty$$

Если  $M$  - единичный шар экстремальной нормы, то  $A_j M \subset \hat{\rho} M$ ,  $j = 1, \dots, m$ .



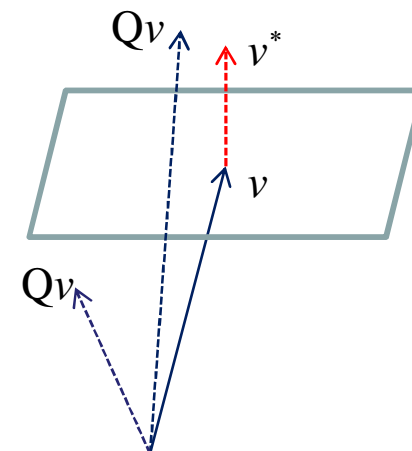
Будем строить единичный шар экстремальной нормы в качестве многогранника  $M$ . Оказывается, что такая норма существует для большинства семейств матриц.

- **Наблюдение 1.** Для приводимого семейства задача вычисления JSR сводится к нескольким аналогичным задачам в меньших размерностях. Таким образом, предполагаем, что семейство неприводимо.
- **Наблюдение 2.** Если произведение  $\Pi$  максимальное, то его максимальный собственный вектор  $v$  должен быть крайней точкой множества  $M$ . Если  $M$  – многогранник, то  $v$  -- его вершина.

Итак, максимальные собственные векторы произведения  $\Pi$  и всех его циклических перестановок -- вершины  $M$ .

- **Наблюдение 3.** Критерий остановки:

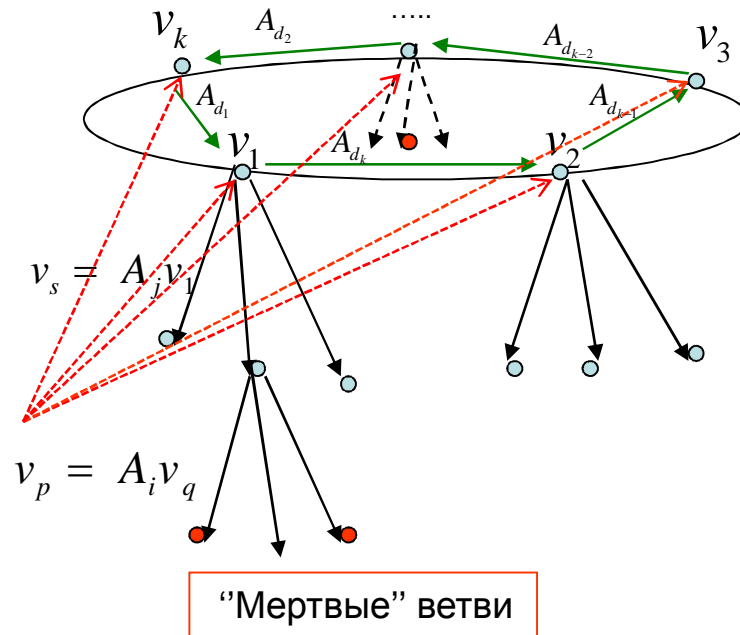
**Лемма.** Пусть  $\rho(\Pi) = 1$  и  $v^*$  - максимальный собственный вектор  $\Pi^*$ . Если существует другое произведение  $Q$ , для которого  $(v^*, Qv) > (v^*, v)$ , то  $\Pi$  - **не** максимальное.



## Алгоритм точного вычисления JSR (N.Guglielmi, V.Protasov, 2011)

Берем максимальный собственный вектор  $v_1$  of  $\Pi = A_{d_1} L A_{d_k}$ .

Полагаем  $v_j = A_{d_{k-j+2}} L A_{d_k} v_1$ ,  $j = 2, K, k$ .



Каждый раз проверяем, будет ли новая точка принадлежать выпуклой оболочке предыдущих точек (ЛП задача).

Алгоритм завершается, когда не появилось ни одной новой вершины.

Инвариантный многогранник  $M$  – выпуклая оболочка всех точек, построенных алгоритмом

**Пример 1.** Задача о плотности единиц в ромбе Паскаля:

(S.Finch, P.Sebah, and Z.-Q.Bai, 2008)

Плотность единиц в ромбе Паскаля порядка  $n$  -- между  $C n^{\log_2 \hat{\rho}(A_1, A_2)}$  и  $C n^{\log_2 \hat{\rho}(A_1, A_2)}$ , где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Известно, что  $\hat{\rho}(A_1, A_2) = 2$ .

Относительно  $\hat{\rho}(A_1, A_2)$ , выдвинута гипотеза, что он равен  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180\dots$

На самом деле,

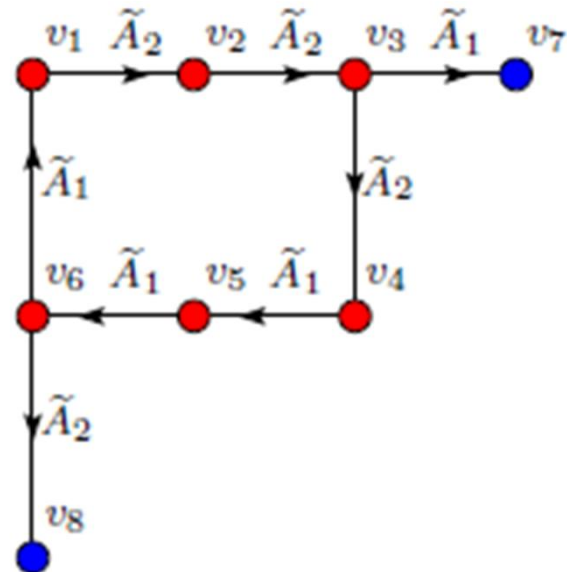
$$\hat{\rho}(A_1, A_2) = \rho(A_1^3 A_2^3)^{1/6} = 1.6376\dots$$

(алгоритм работает несколько секунд)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбираем  $\Pi = A_1^3 A_2^3$

$$v_1 = (0.39925900, 0.95496725, 0.79851800, 0.90909090, 1)$$



Инвариантный многогранник  $M_1$  имеет 8 вершин.

**Пример 2.** Асимптотика бинарной функции разбиения Эйлера.

**Бинарная функция разбиения Эйлера**  $b_d(k)$  -- это количество разложений

$$k = d_0 + 2^1 d_1 + 2^2 d_2 + \dots + 2^{m-1} d_{m-1}, \quad \text{где } d_j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$$

Как мы знаем,  $b_2(k) \equiv 1$ . Для  $d \geq 3$  нужно оценить рост  $b_d(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

$$b_2(k) \equiv 1 \quad (\text{L.Euler, 1728})$$

$$b_3(k) = s(k+1) \quad (\text{Stern, 1858})$$

$$b_4(k) = \lfloor k/2 \rfloor + 1 \quad (\text{Klosinsky, Alexanderson, Hillman, 1984})$$

**Какова асимптотика величины  $b_d(k)$  при  $k \rightarrow \infty$  ?**

L.Euler (1728), A.Tanturri (1918), K.Mahler (1940), N.de Bruijn (1948)  
L.Carlitz (1965), D.Knuth (1966), R.Churchhouse (1969), B.Reznick (1990)

Ответ:  $b_{2^r}(k) \approx C k^\alpha$ , где  $\alpha = \log_2 r$  (B.Reznick, 1990)

$$C k^{\alpha_1} \leq b_{2^{r+1}}(k) \leq C k^{\alpha_2}, \text{ где}$$
$$\alpha_1 = \log_2 \rho(A_1, A_2), \quad \alpha_2 = \log_2 \hat{\rho}(A_1, A_2) \quad (\text{V.Protasov, 2000})$$

$A_1, A_2$  это  $(d-1) \times (d-1)$ -матрицы из нулей и единиц:

Пример. При  $d = 5$ :

$$(A_i)_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } 2 \leq 2k - j + i \leq d+1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Алгоритм вычисляет точные значения для  $d \leq 100$ .

Оказывается, что для всех  $d$  имеем

$$\text{либо } \hat{\rho} = \sqrt{\rho(A_1 A_2)}, \quad \rho = \rho(A_1), \text{ либо: } \rho = \sqrt{\rho(A_1 A_2)}, \quad \hat{\rho} = \rho(A_1)$$

Для размерности 50 программа работает 5 минут,  
для размерности 100 -- около 20 минут



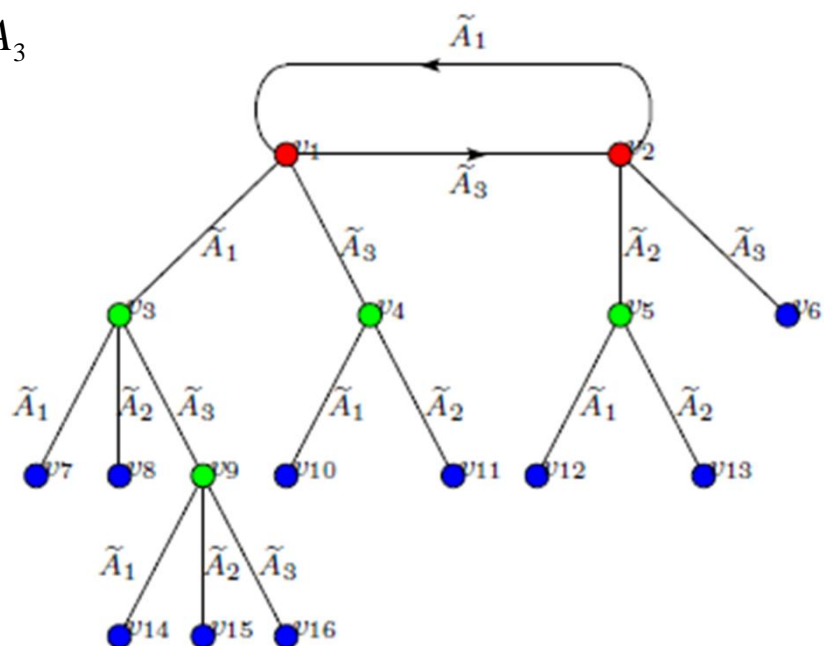
$r$	JSR				LSR			
	# its	# vertices	$\hat{\rho}$	s.m.p.	# its	# vertices	$\bar{\rho}$	s.l.p.
7	5	8	3.511547	$A_1$	6	14	3.491891	$A_1 A_2$
9	6	18	4.503099	$A_1 A_2$	5	17	4.494492	$A_1$
11	5	14	5.505892	$A_1$	7	24	5.497042	$A_1 A_2$
13	5	16	6.502167	$A_1$	7	28	6.498946	$A_1 A_2$
15	7	40	7.500106	$A_1 A_2$	6	23	7.499841	$A_1$
17	7	40	8.500057	$A_1 A_2$	6	30	8.499904	$A_1$
19	7	24	9.500423	$A_1$	8	46	9.499789	$A_1 A_2$
21	6	28	10.500373	$A_1$	8	50	10.499813	$A_1 A_2$
23	8	52	11.500053	$A_1 A_2$	6	31	11.499894	$A_1$
25	9	34	12.500059	$A_1$	8	58	12.499971	$A_1 A_2$
27	8	60	13.500030	$A_1 A_2$	7	37	13.499938	$A_1$
29	9	66	14.500009	$A_1 A_2$	8	43	14.499982	$A_1$
31	9	30	15.500001	$A_1$	10	34	15.499999	$A_1 A_2$
33	11	36	16.500001	$A_1 A_2$	10	55	16.499999	$A_1$
35	8	52	17.500007	$A_1$	18	102	17.499997	$A_1 A_2$
37	8	54	18.500012	$A_1$	10	113	18.499994	$A_1 A_2$
39	10	112	19.500003	$A_1 A_2$	8	59	19.499994	$A_1$
41	9	78	20.500005	$A_1$	11	120	20.499997	$A_1 A_2$

**Table 1** Computation of the JSR and of the LSR for the Euler partition function matrices.

Функция разбиения Эйлера для троичного разложения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбираем  $\Pi = A_1 A_3$



Экстремальный многогранник  $M_3$  имеет 16 вершин.



Вычисление JSR для случайных пар матриц

JSR				JSR			
$d$	# its	# vertices	s.m.p.	$d$	# its	# vertices	s.m.p.
5	3	14	$A_1A_2$	6	4	26	$A_1$
5	7	23	$A_1A_2^2$	6	9	51	$A_1A_2$
5	12	37	$A_1$	6	5	38	$A_1^2A_2$
7	17	100	$A_1$	8	19	117	$A_1^3A_2A_1^4A_2$
7	12	140	$A_1^3A_2A_1A_2$	8	8	49	$A_1$
7	24	223	$A_1^3A_2^2$	8	12	75	$A_1A_2^3$
9	18	177	$A_1^8A_2$	10	16	239	$A_1A_2^4$
9	13	172	$A_1^3A_2A_1A_2$	10	9	109	$A_1$
9	10	129	$A_2$	10	24	408	$(A_1^3A_2)^2A_2$
11	20	707	$A_1^3A_2^2$	12	31	1539	$A_1A_2A_1^2A_2^2$
11	14	340	$A_1^2A_2A_1A_2$	12	9	211	$A_1A_2$
11	12	183	$A_1^3A_2$	12	13	215	$A_1A_2^3$
15	18	715	$A_1^2A_2A_1A_2^4$	20	21	1539	$A_1A_2$
15	14	570	$A_1^4A_2$	20	16	1219	$A_1A_2^2$
15	14	390	$A_2$	20	16	1247	$A_1^2A_2^2$


Вычисление JSR и LSR для случайных пар булевских матриц размерности  $d = 100$ .

density	JSR			LSR		
	# its	# vertices	s.m.p.	# its	# vertices	s.l.p.
0.2	6	24	$A_1^2 A_2$	6	31	$A_1 A_2^2$
0.2	6	23	$A_1 A_2$	6	28	$A_1^2 A_2^2$
0.2	7	27	$A_1 A_2^3$	6	20	$A_1 A_2$
0.2	5	21	$A_1 A_2^2$	7	24	$A_1^2 A_2$
0.5	5	10	$A_1 A_2$	5	15	$A_1 A_2^2$
0.5	6	17	$A_1^2 A_2$	4	8	$A_1 A_2$
0.5	6	18	$A_1^2 A_2^2$	5	16	$A_1^2 A_2$
0.5	6	22	$A_1 A_2^3$	4 (6)	9 (14)	$A_1$ and $A_2$
0.8	4	7	$A_1 A_2$	4	7	$A_1 A_2$
0.8	7	18	$A_1^2 A_2$	6	14	$A_1^2 A_2^2$
0.8	5	14	$A_1 A_2^2$	9 (7)	14 (16)	$A_1$ and $A_2$
0.8	5	12	$A_1^3 A_2$	5	12	$A_1 A_2^2$



## Условия конечной сходимости алгоритма

**Определение.** Произведение  $\Pi = A_{d_k} L A_{d_1}$  называется доминирующим, если  $\rho(\Pi)=1$ , и существует  $q < 1$  такое, что  $\rho(\Delta) < q$  для всех остальных произведений  $\Delta = A_{d_n} L A_{d_1}$ , не являющихся степенями  $\Pi$ , или степенями его циклических перестановок.

доминирующее  максимальное

**Теорема 1.** Алгоритм сходится за конечное время тогда и только тогда когда произведение  $\Pi$  доминирующее.

**Спасибо!**