Максимизация невогнутой потенциальной функции в игровой модели Курно с нелинейными издержками

Минарченко Илья Михайлович

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

V Традиционная Школа
«Управление, информация и оптимизация»
16–23 июня 2013

Введение. Потенциальные игры

Игра в нормальной форме:

$$\langle I, \{X^i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle,$$

I — множество участников,
X^i — множество стратегий i-го участника,
$F_i\colon X \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша i-го участника, $X = \prod\limits_{k\in I} X^k$.

Игра в нормальной форме:

$$\langle I, \{X^i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle,$$

I — множество участников,
X^i — множество стратегий i-го участника,
$F_i\colon X \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша i-го участника, $X = \prod\limits_{k\in I} X^k$.

Определение (Monderer, Shapley, 1996)

Игра называется ***потенциальной***, если существует функция $P\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $x_i, \hat{x}_i \in X^i$, $x_{-i} \in X^{-i}$ и $i \in I$ выполняется

$$F_i(\hat{x}_i, x_{-i}) - F_i(x_i, x_{-i}) = P(\hat{x}_i, x_{-i}) - P(x_i, x_{-i}).$$

Обозначения: $x_{-i} = (x_k), k \in I\backslash\{i\}, \quad X^{-i} = \prod\limits_{k\in I\backslash\{i\}} X^k.$

Введение. Потенциальные игры

Игра в нормальной форме может быть записана как система задач оптимизации

$$F_i(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x \in X, \quad i \in I. \tag{PO}$$

Введение. Потенциальные игры

Игра в нормальной форме может быть записана как система задач оптимизации

$$F_i(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x \in X, \quad i \in I. \qquad \text{(PO)}$$

Пусть x^* — равновесие по Нэшу в (PO), т. е. $\forall x_i \in X^i$

$$F_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant F_i(x_i, x_{-i}^*), \quad i \in I.$$

Если (PO) — потенциальная, то $\forall x_i \in X^i$

$$P(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant P(x_i, x_{-i}^*), \quad i \in I, \qquad \text{(EP)}$$

т. е. x^* — равновесие по Нэшу для системы задач

$$P(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x \in X, \quad i \in I. \qquad \text{(PP)}$$

Введение. Потенциальные игры

Игра в нормальной форме может быть записана как система задач оптимизации

$$F_i(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x \in X, \quad i \in I. \tag{PO}$$

Пусть x^* — равновесие по Нэшу в (PO), т. е. $\forall x_i \in X^i$

$$F_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant F_i(x_i, x_{-i}^*), \quad i \in I.$$

Если (PO) — потенциальная, то $\forall x_i \in X^i$

$$P(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant P(x_i, x_{-i}^*), \quad i \in I, \tag{EP}$$

т. е. x^* — равновесие по Нэшу для системы задач

$$P(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x \in X, \quad i \in I. \tag{PP}$$

Удобно перейти к задаче

$$P(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{P}$$

Множество решений (P) содержится во множестве решений (PO).

Лемма (Monderer, Shapley, 1996)

Пусть множества стратегий X^i — интервалы из $\mathbb{R}$ и функции выигрыша F_i непрерывно дифференцируемы. Тогда $P\colon X \to \mathbb{R}$ является *потенциалом* в игре тогда и только тогда, когда P непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad i \in I.$$

Лемма (Monderer, Shapley, 1996)

Пусть множества стратегий X^i — интервалы из $\mathbb{R}$ и функции выигрыша F_i непрерывно дифференцируемы. Тогда $P\colon X \to \mathbb{R}$ является *потенциалом* в игре тогда и только тогда, когда P непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad i \in I.$$

Необходимые условия оптимальности для (PO) при условиях леммы:

$$\frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) \leqslant 0, \quad x_i \in X^i, \quad i \in I.$$

Из леммы следует

$$\frac{\partial P(x^*)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) \leqslant 0, \quad x_i \in X^i, \quad i \in I,$$

что является необходимым условием оптимальности для (P).

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad X^i = [0, \bar{x}_i].$$

Кубичные издержки:

$$c_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i,$$

$$\alpha_i > 0,\ \beta_i < 0,\ \gamma_i > 0,\ \delta_i \geqslant 0,\ \beta_i^2 \leqslant 3\alpha_i\gamma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Линейная обратная функция спроса:

$$p(x) = d - a\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad a > 0, d > 0.$$

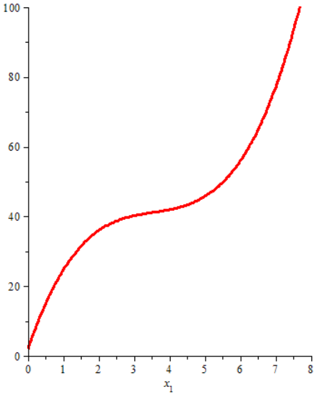
Имеем систему задач:

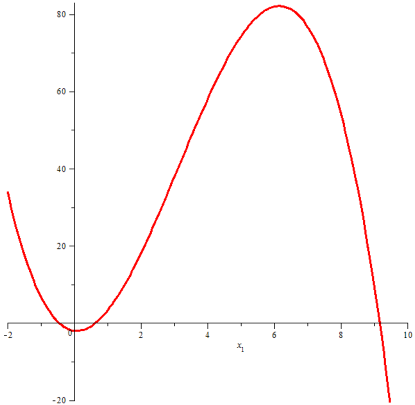
$$F_i(x) = p(x)x_i - c_i(x_i) \to \max_{x_i},$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Цель: поиск точек равновесия (по Нэшу).

Графики кубичных издержек и функции прибыли:





(Slade, 1994)

Модель Курно потенциальна тогда и только тогда, когда функция спроса линейна.

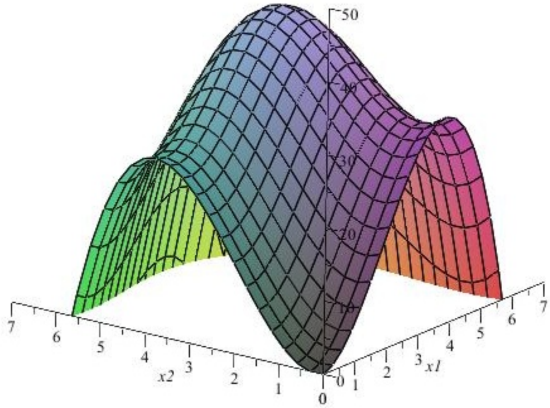
$$P(x) = \int\limits_0^1 \sum_{i \in I} \frac{\partial F_i(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i \; dt.$$

Переходим к задаче максимизации невогнутой функции — полинома 3-ей степени:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \right) x_i \right] \to \max,$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$P(x_1, x_2) = -x_1^3 + 5,5x_1^2 + (1 - 0,5x_2)x_1 - x_2^3 + 6x_2^3 + (-2 - 0,5x_1)x_2.$$



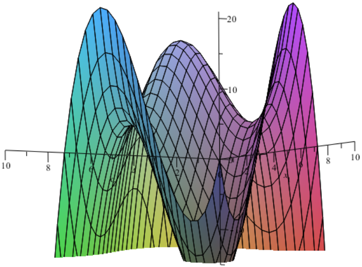
Утверждение 1

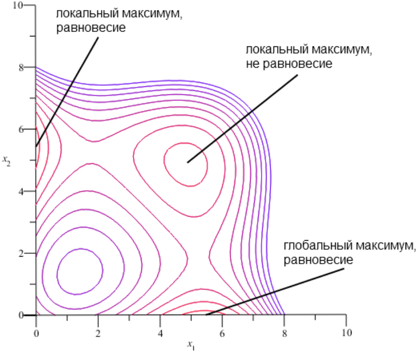
Равновесие в рассматриваемой модели Курно существует.

Утверждение 2

$P(x)$ имеет не более одной точки локального максимума внутри допустимого множества X.

Равновесность локального максимума





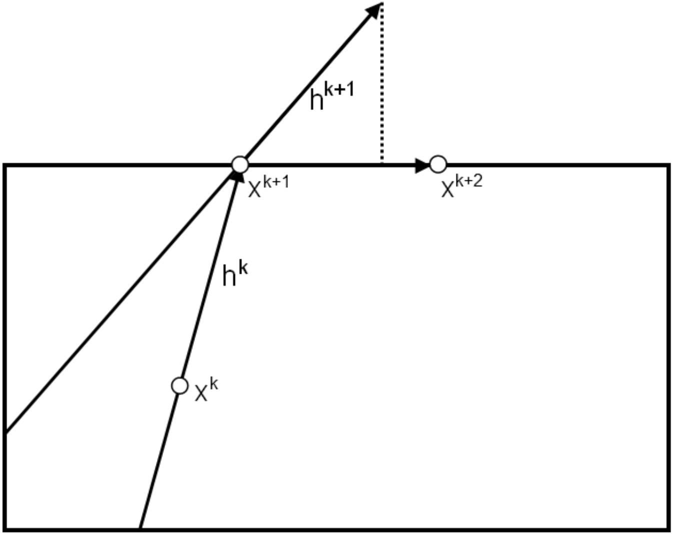
Методы

Для максимизации $P(x)$ опробованы ***классический метод проекции градиента***, а также методы ***проекции градиента*** и ***сопряжённых градиентов*** со следующими ***модификациями***:

- точный одномерный поиск вдоль направления подъёма и обратно в пределах допустимого множества,
- шаг за пределы допустимого множества по правилу Армихо,
- проекция точки на допустимое множество,
- точный одномерный поиск вдоль соответствующей границы,
- «обновление» каждые n шагов и при выходе на границу в методе сопряжённых градиентов.

Теорема

Модифицированный метод проекции градиента сходится к стационарной точке из любого допустимого начального приближения.



h^{k+1}
x^{k+1}
x^{k+2}
h^k
x^k

i — среднее количество итераций,
t — среднее время работы (сек),
G1 — классический метод проекции градиента,
G2 — модифицированный метод проекции градиента;
Intel Core 2 Duo E4400 2GHz, 3.2GB RAM.

Решение на границе X

n	t_{G1}	i_{G1}	t_{G2}	i_{G2}	t_{G2}/t_{G1}	i_{G2}/i_{G1}
2	0,13	14	0,02	3	0,20	0,24
5	0,25	20	0,20	12	0,85	0,63
10	0,45	30	0,99	47	2,04	1,46
20	1,17	42	1,64	47	1,45	1,10
50	6,20	92	9,88	134	1,77	1,48
100	19,91	132	43,15	251	2,33	1,98

Решение внутри X

n	t_{G1}	i_{G1}	t_{G2}	i_{G2}	t_{G2}/t_{G1}	i_{G2}/i_{G1}
2	0,17	17	0,04	9	0,21	0,52
5	0,26	20	0,08	17	0,31	0,82
10	0,45	25	0,19	30	0,40	1,15
20	0,82	26	0,31	28	0,37	1,05
50	3,59	46	1,46	50	0,41	1,06
100	19,15	113	12,45	171	0,67	1,53

i — среднее количество итераций,
t — среднее время работы (сек),
G2 — модифицированный метод проекции градиента,
CG — модифицированный метод сопряжённых градиентов;
Intel Core 2 Duo E4400 2GHz, 3.2GB RAM.

Решение на границе X

n	t_{G2}	i_{G2}	t_{CG}	i_{CG}	t_{CG}/t_{G2}	i_{CG}/i_{G2}
2	0,02	2	0,02	2	0,88	1,00
5	0,25	19	0,22	15	0,85	0,92
10	0,66	32	0,70	32	1,01	1,01
20	2,21	65	2,27	66	1,08	1,06
50	16,51	188	13,38	149	0,94	0,91
100	62,95	352	54,82	266	1,01	0,84

Решение внутри X

n	t_{G2}	i_{G2}	t_{CG}	i_{CG}	t_{CG}/t_{G2}	i_{CG}/i_{G2}
2	0,03	9	0,02	6	0,72	0,71
5	0,09	21	0,06	13	0,74	0,69
10	0,14	21	0,10	15	0,78	0,81
20	0,41	39	0,29	24	0,84	0,76
50	1,62	55	1,12	34	0,75	0,68
100	10,49	140	3,40	40	0,36	0,32

Итоги

- рассмотрена модель Курно с нелинейными невыпуклыми S-образными издержками;
- учтены ограничения на максимальные объёмы выпуска продукции;
- поиск равновесия сведён к одной задаче максимизации невогнутой функции на параллелепипеде;
- опробованы три локальных метода с модификациями, введён точный одномерный поиск вдоль направления.

Спасибо за внимание!