Аппроксимация множеств достижимости билинейных систем

аспирант Владимир Синяков
научный руководитель — академик А. Б. Куржанский

июнь 2013 г.

Задача достижимости для билинейных систем

Рассматривается класс билинейных управляемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathscr{A}.$$

Множество $\mathscr{A}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Класс допустимых управлений — $L^\infty(t_0, t_1; \mathscr{A})$.
Начальное множество определено как множество уровня непрерывной, симметричной, положительно однородной функции $\sigma(x)$:

$$X^0 = \{x \mid \sigma(x) \leq 1\}. \tag{1}$$

Определение

Функция

$$\mu_A(x) = \inf\left\{r > 0 \,\middle|\, \tfrac{x}{r} \in A\right\}$$

называется функцией Минковского множества A.

Задача достижимости для билинейных систем

Определение

Множество достижимости — это множество состояний, в которые можно привести систему из начального множества X^0 с помощью допустимых управлений:

$$\mathscr{X}[t] = \left\{ x \,\middle|\, \exists x^0 \in \mathscr{X}^0, \quad \exists u(\cdot): \; x(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x \right\}.$$

Вводим функцию цены:

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)} \sigma\big(x(t_0; t, x, u(\cdot))\big).$$

1. Множество достижимости является звездным.
2. Функция цены — положительно однородна по x.

Определение

Множество S называется звездным (star-shaped), если существует непустое множество $S^* \subseteq S$ (центр звезды), такое что для любых $x_1 \in S$, $x_2 \in S^*$ и любого λ выполняется включение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.

Утверждение

Справедлива формула для множества достижимости:

$$\mathscr{X}[t] = \{x \mid V(t,x) \leq 1\}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$V_t + \max_{A \in \mathscr{A}} \langle V_x, Ax \rangle = 0$$

Определение

Функция $w(t,x)$ называется вязкостным суперрешением уравнения ГЯБ, если

$$\forall (t,x) \quad \forall (q,p) \in D^{-}w(t,x) \ \Rightarrow q + \max_{A \in \mathscr{A}} \langle p, Ax \rangle \geq 0.$$

Определение

Функция является вязкостным решением тогда и только тогда, когда функция является одновременно вязкостным субрешением и вязкостным суперрешением.

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Утверждение

Функция цены $V(t,x)$ является обобщенным (вязкостным, минимаксным) решением уравнения

$$V_t + \max_{A\in\mathscr{A}} \langle V_x, Ax\rangle = 0$$

с начальным условием $V(t_0,x) = \sigma(x)$.

Утверждение

***Принцип сравнения**: Любое субрешение меньше любого суперрешения в каждой точке (t,x).*

Построение оценок множества достижимости

Следствие

Множества уровня субрешения w^- являются внешними оценками, а множества уровня суперрешения w^+ — внутренними оценками:

$$\mathscr{X}^-[t] = \left\{x \,\middle|\, w^+(t,x) \le 1\right\} \subseteq \mathscr{X}[t],$$
$$\mathscr{X}[t] \subseteq \left\{x \,\middle|\, w^-(t,x) \le 1\right\} = \mathscr{X}^+[t].$$

Основная цель — получить представление:

$$\bigcup_{\nu} \mathscr{X}_\nu^-[t] = \mathscr{X}[t] = \bigcap_{\mu} \mathscr{X}_\mu^+[t].$$

Метод построения суперрешений

Введем матрицу

$$R(t) = \left[\bar{x}^1(t) \quad \dots \quad \bar{x}^n(t)\right].$$

Тогда

$$\dot{R}e_k = \bar{A}^k(t)Re_k.$$

Обозначим $S = R^{-1}$. Определим функцию:

$$w(t,x) = \varphi(Sx) + \gamma\psi(Sx).$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\varphi(e_k) = 1, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\psi(x) \geq d(x,K) \geq 0, \quad K = \{x \mid x = \alpha Re_k,\ \alpha \in \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Тогда существует $\gamma(t)$, такое что $w(t,x)$ — суперрешение соответствующего уравнения и оценка сверху для функции цены. Кроме того, $w(t,\bar{x}^k(t)) = 1$. В частности, можно взять $\varphi(x) = \|x\|_1$, $\psi(x) = \|x\|_1 - \|x\|_\infty$.

Двумерный пример 1

Пусть

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{bmatrix} x, \quad u \in [-1, 1]$$

Пусть

$$\alpha_k = \frac{2\cos^2 t - 1}{\cos^2 t - \sin^2 t}, \;\; \beta_k = \frac{2\cos^2 t - 1}{\cos t + (-1)^{k+1} \sin t} - \cos t.$$

Функция

$$w(t, x) = \alpha_1 |x_1 \cos t - x_2 \sin t| + \alpha_2 |x_1 \sin t - x_2 \cos t| - \\ -\beta_1 |x_1 + x_2| - \beta_2 |x_1 - x_2|$$

является суперрешением уравнения ГЯБ и удовлетворяет начальному условию

$$w(0, x) = |x_1| + |x_2|.$$

Двумерный пример 1

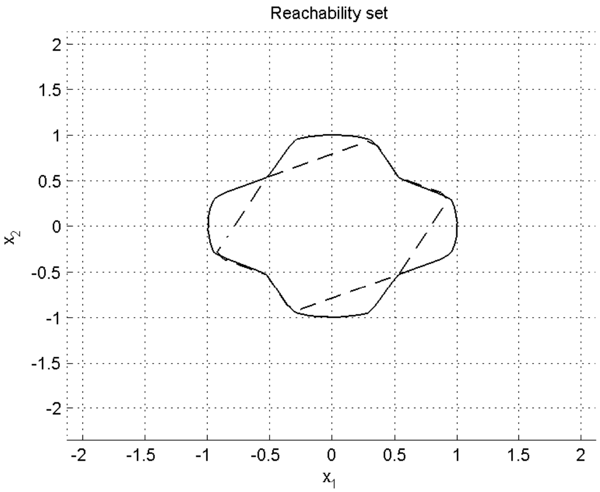

Рис.: Внутренние оценки множества достижимости при $t = \pi/9$ в двумерном примере 1.

Двумерный пример 1

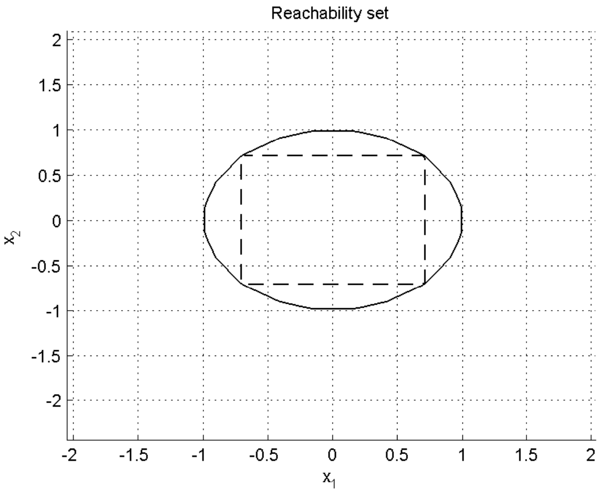

Рис.: Внутренние оценки множества достижимости при $t = \pi/4$ в двумерном примере 1.

Двумерный пример 2

Пусть

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix} x, \quad u \in [-1, 1].$$

Функция

$$w(t,x) = \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{2t})|x_1| + \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{2t})|x_2| - \\ - \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1)|x_1 - x_2| - \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} - 1)|x_1 + x_2|$$

является суперрешением уравнения ГЯБ и удовлетворяет начальному условию

$$w(0,x) = |x_1| + |x_2|.$$

Двумерный пример 2

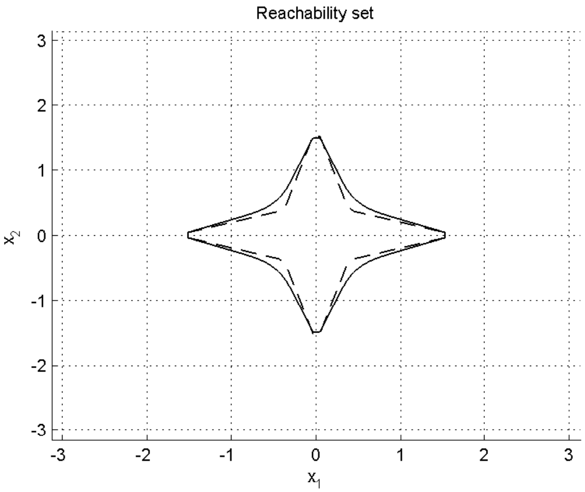

Рис.: Внутренняя оценка множества достижимости при $t = 1/2$ в двумерном примере 2.

Двумерный пример 2

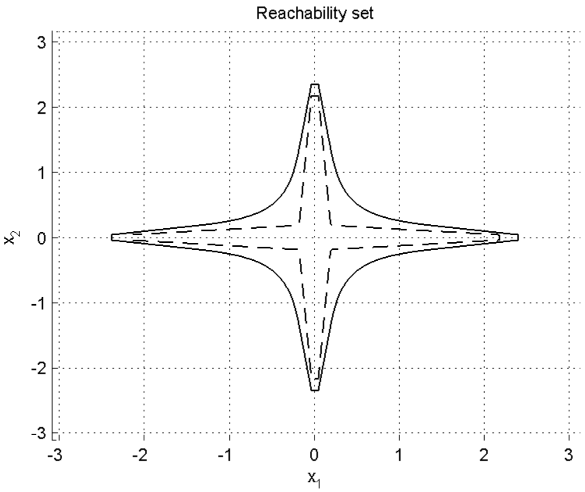

Рис.: Внутренняя оценка множества достижимости при $t = 1$ в двумерном примере 2.

Пример решения через билинеаризацию

Существует определенный класс нелинейных систем, для которых существуют динамически эквивалентные билинейные системы.

Определение

Нелинейная система

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad x(0) \in X^0$$

называется динамически эквивалентной билинейной системе

$$\dot{y} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i \right) y,$$

если существуют функция $y^0(x^0)$ *и матрица* C*, такие что* $x(t; x^0) = Cy(t; y^0(x^0))$ *для всех* $t \geq 0$ *и всех* $x^0 \in X^0$*.*

Пример решения через билинеаризацию

Динамический уницикл — пример билинеаризуемой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \cos x_5, \\ \dot{x}_4 &= \sin x_5, \\ \dot{x}_5 &= u. \end{aligned}$$

Вычислим функцию $x(t; t_0, x^0)$ — траекторию уницикла, которая соответствует нулевому управлению и в момент t_0 проходит через точку x^0:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + x_3^0 t + \frac{1}{2} t^2 \cos x_5^0, \\ x_2 = x_2^0 + x_4^0 t + \frac{1}{2} t^2 \sin x_5^0, \\ x_3 = x_3^0 + t \cos x_5^0, \\ x_4 = x_4^0 + t \sin x_5^0, \\ x_5 = x_5^0. \end{cases}$$

Пример решения через билинеаризацию

Сделав замену переменных $x \longrightarrow x^0$, получаем систему ("преобразованный уницsmåцикл"):

$$\begin{cases} \dot{x}_1^0 = -\frac{1}{2}t^2 u \cos x_5^0, \\ \dot{x}_2^0 = \frac{1}{2}t^2 u \sin x_5^0, \\ \dot{x}_3^0 = tu \cos x_5^0, \\ \dot{x}_4^0 = -tu \sin x_5^0, \\ \dot{x}_5^0 = u. \end{cases}$$

Эквивалентная билинейная система:

$$\begin{cases} \dot y_1 = -\frac{1}{2}t^2 u y_7, \\ \dot y_2 = \frac{1}{2}t^2 u y_6, \\ \dot y_3 = t u y_7, \\ \dot y_4 = -t u y_6, \\ \dot y_5 = u y_8, \\ \dot y_6 = -u y_7, \\ \dot y_7 = u y_6, \\ \dot y_8 = 0. \end{cases}$$

Справедливо включение

$$\{x^0 \mid w(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, \cos x_5^0, \sin x_5^0, 1) \leq 1\} \subseteq \tilde X[t],$$

где $\tilde X[t]$ — множество достижимости для преобразованного уницикла.

Пример решения через билинеаризацию

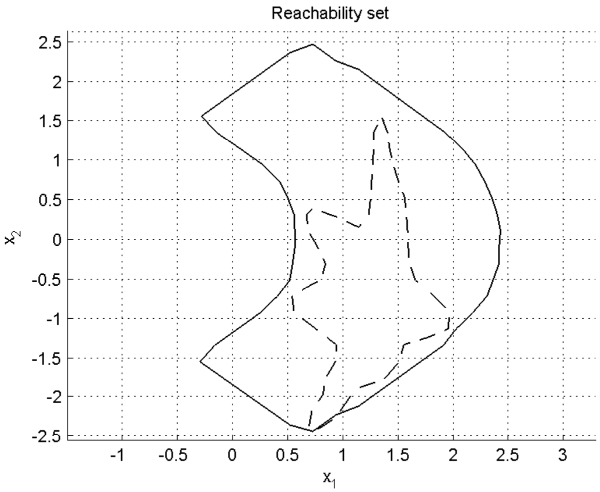

Рис.: Внутренняя оценка множества достижимости динамического уницикла в проекции на $x_1 x_2$.

Результаты и вопросы

1. Получен метод внутренней аппроксимации множеств достижимости билинейных систем.
2. Приведен пример внутренней аппроксимации множества достижимости нелинейной системы через билинеаризацию.
3. Обобщение на другие классы нелинейных систем?
4. Можно ли построить внешние оценки?

Список литературы

- W.H. Fleming, H.M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. N. Y.: Springer, 2006.
- H. Ishii, Uniqueness of Unbounded Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Indiana U. Math. J.*, 26, pp. 721-748, 1984.
- A.B. Kurzhanski. Comparison Principle for Equations of the Hamilton-Jacobi Type in Control Theory.In *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, Suppl. 1, S185–S195, 2006.
- A.B. Kurzhanski, P. Varaiya. Dynamic Optimization for Reachability Problems. *Journal of Optim. Theory and Appl.*, 108(2):227–251, 2001.
- *P. M. Pardalos, V. Yatsenko* Optimization and Control of Bilinear Systems. Springer, 2008.
- A. I. Subbotin. *Generalized Solutions of First-Order PDE's. The Dynamic Optimization Perspective*. Birkhäuser, Boston, 1995.