Геометрически минимальные реализации булевых управляемых систем.

к.т.н. О.О.Васильев

ИПУ РАН

Москва, 2012

Проблема реализации: морфизм реакции.

Морфизмы реакции

Пусть заданы входное пространство U и выходное пространство Y. Под пространством здесь понимается векторное пространство, модуль, полумодуль или иной объект в зависимости от типа системы. Пусть $\Omega \cong \bigoplus_{i=-\infty}^{0} U$- множество бесконечных слева последовательностей элементов из лишь конечное число которых отлично от нуля. $\Gamma \cong \prod_{i=0}^{+\infty} Y$- множество бесконечных справа последовательностей элементов из Y. Рассмотрим отображения:

$$
\begin{array}{ll}
z\colon \Omega \to \Omega & (\ldots, i_3, i_2, i_1, i_0) \mapsto (\ldots, i_2, i_1, i_0, 0) \\
\bar{z}\colon \Gamma \to \Gamma & (y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots) \mapsto (y_1, y_2, y_3, \ldots)
\end{array}
$$

Морфизм пространств $\varphi\colon \Omega \to \Gamma$ называется реакцией, если

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "z"] \arrow[d, "\varphi"] & \Omega \arrow[d, "\varphi"] \\
\Gamma \arrow[r, "\bar{z}"] & \Gamma
\end{tikzcd}
$$

Реализация реакции. Морфизмы систем.

Реализация

Линейная система $S = (A, B, C, X, U, Y)$, $B\colon U \to X$, $A\colon X \to X$, $C\colon X \to Y$, где X- R-полумодуль, а A, B, C- морфизмы полумодулей является реализацией реакции φ, если φ представляется ганкелевой матрицей $\mathcal{H}(S)$ системы S :

$$\begin{pmatrix} CB & CAB & CA^2B & CA^3B & \dots \\ CAB & CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & CA^5B & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Морфизмы систем

Если $S_0 = (A_0, B_0, C_0, X_0, U, Y)$, $S_1 = (A_1, B_1, C_1, X_1, U, Y)$- некоторые системы, то морфизмом систем называется такая тройка из систем S_0 и S_1 и морфизма объектов состояний $\eta\colon X_0 \to X_1$, что следующие диаграммы коммутируют:

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "B_0"] \arrow[dr, "B_1"'] & X_0 \arrow[d, "\eta"] \\
& X_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "A_0"] \arrow[d, "\eta"] & X_0 \arrow[d, "\eta"] \\
X_1 \arrow[r, "A_1"] & X_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "C_0"] \arrow[d, "\eta"] & Y \\
X_1 \arrow[ur, "C_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Морфизм систем сохраняет реакцию.

Реализация. Формулировка проблем.

1. Описание класса функций допускающих конечномерную реализацию - проблема существования.
2. Оценка минимальной размерности конечномерной реализации - проблема минимальности
3. Алгоритмическое построение канонической(достижимой и наблюдаемой) реализации, реализации минимальной размерности.
4. Описание всевозможных реализаций различного типа(напр.минимальной размерности) - проблема генерации.
5. Различные проблемы теории частичной реализации - случай, когда известен лишь определенный “конечный” фрагмент импульсного ответа.

История вопроса.

1. Первое рассмотрение задачи реализации (E.Gilbert, 1963)
2. Вещественный, комплексный случай(R.Kalman, H.Rosebrock, R.Silverman, B.Ho и др. 1960-е)
3. Общая(категорная) теория реализации для систем и автоматов (B.D.O. Anderson, M.A. Arbib, E.Manes, S.Eilenberg 1970-е, позднее J.Adamek, V.Trnkova, A.M. Миронов и др.)
4. Системы над кольцами, в частности, перенос теории над $\mathbb{R}$ на целые числа, вещественно аналитические функции, многочлены от 1 переменной. (E. Sontag, R. Kalman, Y.Roushaleau и др. 1970-е-начало 1980-х)
5. Многомерные линейные системы(УЧП или разностные уравнения многих переменных, связь с D-модулями). (Oberst, 1990 и далее).
6. Системы над полукольцами: положительные системы, тропические системы(max plus), булевы системы.(с начала 1990-х Cohen G., Mollier P., Quadrat J.-P., Viot M., S.Gaubert, B. de Schutter, J. van den Hof, B.D.O. Anderson и др.).

Проблема генерации. Известные результаты.

1. В вещественном, комплексном случае - реализации минимальной размерности эквивалентны и канонические (R.Kalman, 1960-е), пространства канонических систем фиксированной размерности(1970е-1980-е гг. R.Kalman, R.Byrnes, U.Helmke и др.). Классы - конструктивные алгебраические множества.
2. Связь между реализацией над кольцом и полем частных(E.Sontag, 1977)
3. Границы обобщений теории над полями(Y.Roushaleau, E.Sontag, 1979, J. Brewer, J. Bunce, J. van Vleck, 1986).
4. Простейшие результаты о генерации для положительных систем(H. Maeda, S.Kodama, 1981, J.M. van den Hof, 1997.)
5. Пространства канонических систем всех размерностей(L. Le Bruyn, M. Reineke 2003)
6. $(max, +)$-реализации данной размерности описываются полуполиэдральными множествами(Blondel V., Gaubert S., Portier N.,2011). Алгоритм вычисления множеств реализаций трижды экспоненциален

Основная проблема

Основная проблема

Каноническая реализация задается разложением отображения вход-выход на эпиморфизм и мономорфизм. Над полями объектом состояний в этом случае будет векторное пространство. Над кольцами и полукольцами будет некоторый (полу)модуль, но возможно несвободный и с кручением(то есть отображение не будет задаваться матрицами). Поэтому общей теории реализации недостаточно.

Так, например, каноническими реализациями положительных систем могут быть многогранники не являющиеся координатными конусами.

Предлагаемый подход

Предлагаемый подход

1. Изучать не реализации минимальной размерности, а структуру реализаций различного типа и отображения между ними. Рассматривать различные типы редукций к реализациям меньшей размерности.
2. Изучать “замену” полуколец. Переход от реализации отображения над одним полукольцом к реализации “того же” отображения над другим полукольцом связанным гомоморфизмом с данным.

Полукольца

Определение

Полукольцом называется множество S с двумя бинарными операциям $\{+,\cdot\}$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

1. (Ассоциативность) $a+(b+c)=(a+b)+c$, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,
2. (Коммутативность сложения) $a+b=b+a$,
3. (Наличие единиц) существуют такие $0_S, 1_S \in S$, что $0_S+a=a$, $1_S\cdot b=b\cdot 1_S=b$,
4. (Дистрибутивность) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,

где a,b,c - элементы S. Полукольцо в котором умножение коммутативно называется коммутативным полукольцом.

Примеры полуколец.

1. Поля: вещественные, комплексные, рациональные числа, конечные поля.
2. Кольца: целые числа, кольца многочленов, кольца функций, кольца степенных рядов.
3. Полукольцо натуральных чисел, полукольцо положительных вещественных чисел.
4. Булево полукольцо$(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$, тропическое полукольцо$(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, min, +)$.

Важны два последних класса примеров. Все эти полукольца не имеют нулевых сумм.

Полумодули

Если S - коммутативное полукольцо, то S-полумодулем M называется множество на котором заданы операции сложения $+$и умножения на элемент S - $\cdot$ удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. (Ассоциативность сложения) $(a+b)+c=a+(b+c)$,
2. (Коммутативность сложения) $a+b=b+a$
3. (Наличие единицы относительно сложения) существует 0_M $a+0_M=a$
4. (Ассоциативность умножения на элемент S) если $\alpha, \beta \in S$, то $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$
5. (Дистрибутивность умножения на элемент S) $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
6. (Унитальность) $\alpha \cdot 0_M = 0_M$

Примеры полумодулей.

1. Векторные пространства - полумодули над полями;
2. Абелевы группы - полумодули над целыми числами;
3. Частично упорядоченные множества с максимальным и минимальным элементом - полумодули над булевым полукольцом;
4. Абелевы полугруппы- полумодули над натуральными числами;
5. Конусы - полумодули над положительными числами.

Замена полуколец. Сравнивающий морфизм.

Определение.

Пусть задано некоторое отображение вход-выход над полукольцом R $\varphi\colon \bigoplus_{i=-\infty}^{0} R^k \to \prod_{i=0}^{+\infty} R^l$ и задан гомоморфизм полуколец $\eta\colon R \to S$, превращающий S в R-полуалгебру.
Тогда существует "замененное" отображение
$\varphi \otimes S\colon \bigoplus_{i=-\infty}^{0} S^k \to \prod_{i=0}^{+\infty} S^l$.
Можно показать, что если H- каноническая реализация φ, а Q-каноническая реализация $\varphi \otimes S$, то существует сравнивающий сюръективный морфизм $\sigma\colon H \otimes S \to Q$.

Пример.

Морфизм $\eta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{B}$, действует на последовательностях положительных чисел, переводя ненулевые элементы в 1, нулевые- в нули.

Геометрическая минимальность. I.

геометрическая минимальность

Пусть R- полукольцо, а φ- некоторая R-реакция. Свободная реализация Q называется геометрически минимальной, если не существует сюръективных морфизмов из нее и инъективных морфизмов в нее.
Если Q- некоторая φ-реализация, то φ-реализация P называется ее геометрической редукцией, в том случае, если существует последовательность φ-реализаций $Q_0 = Q, Q_1, \dots, Q_r = P$, такая, что для каждой пары Q_i, Q_{i+1} существует либо инъективный морфизм φ-реализаций $\lambda_i \colon Q_{i+1} \to Q_i$, либо сюръективный морфизм φ-реализаций $\mu_i \colon Q_i \to Q_{i+1}$.

Геометрическая минимальность. II.

Геометрическая минимальность есть минимальность.

Пусть R полукольцо, такое, что все свободные конечнопорожденные полумодули разных размерностей не изоморфны. Пусть φ- некоторая R-реакция. Тогда:

1. У всякой конечномерной φ-реализации существует геометрически минимальная редукция.
2. Если P есть геометрическая редукция Q, то размерность полумодуля состояний Q равна размерности полумодуля состояний P в том и только в том случае, когда $Q \cong P$.

Аппроксимируемость.

Аппроксимируемость

Пусть R- полукольцо, φ- реакция, Q- каноническая реализация φ.
Пусть P- геометрически минимальная свободная реализация φ.
Тогда P является *достижимой аппроксимацией* Q, если существует сюрьективный морфизм φ-реализаций $\lambda \colon P \to Q$.
P является *наблюдаемой аппроксимацией* Q, если существует инъективный морфизм φ-реализаций $\mu \colon Q \to P$.

Аппроксимируемость и геометрическая минимальность.

Пусть R- полукольцо, φ- реакция, Q- каноническая реализация φ.
Пусть P- геометрически минимальная свободная реализация φ, достижимо и наблюдаемо аппроксимирующая Q.
Тогда полумодуль состояний системы Q проективен. В частности, если всякий проективный R-полумодуль свободен, то $Q \cong P$.

Булев случай, как предельный.

1. Из каждого полукольца без нулевых сумм (например тропического полукольца, полукольца положительных чисел) существует единственный гомоморфизм в булево полукольцо.
2. Например, если $\mathbb{R}^n_+$- положительный конус размерности n, а H-его подконус, то переход к булевому случаю будет соответствовать забыванию всей информации, кроме наличия пересечений с граничными клетками $\mathbb{R}^n_+$.
3. Свободные полумодули над булевым полукольцом - наборы нулей и единиц фиксированной длины с взятием покомпонентного максимума в качестве сложения.
4. Произвольные полумодули над булевым полукольцом - частично упорядоченные множества с наименьшим и наибольшим элементами.
5. У каждого полумодуля X имеется единственный базис $\mathcal{B}_X$. Обратимые полулинейные отображения - перестановки элементов базиса. Если X- свободен, то произвольные перестановки $\mathcal{B}_X$ - автоморфизмы X.

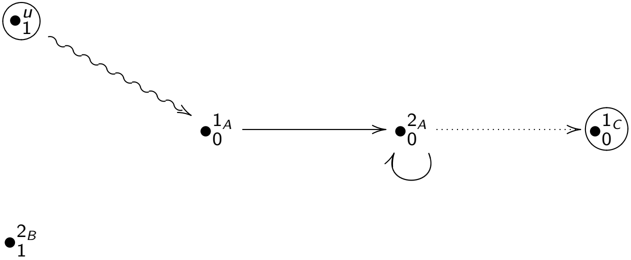
Пусть $S = (A, B, C, X, U, Y)$ - линейная управляемая система, с определяющими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

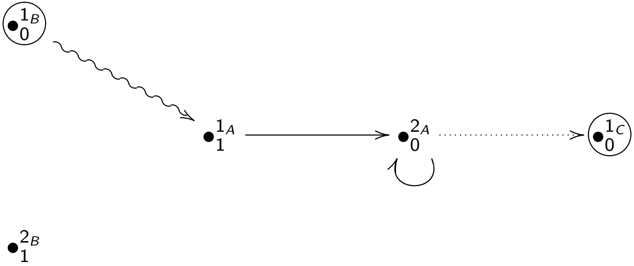
Зададим также начальное состояние и вектора входов в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3$:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u(3) = u(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

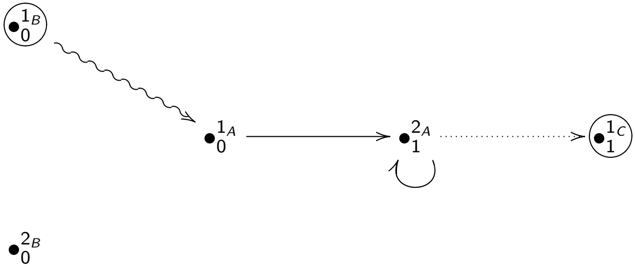
$t = 0:$



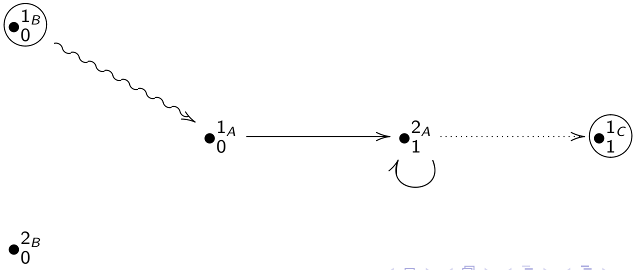
$t = 1:$



$t = 2:$



$t = 3:$



Существование и минимальность для булевых систем.

Существование.

Конечномерная минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда импульсный ответ окончательно периодичен, то есть периодичен всюду кроме конечного числа позиций.(S. Gaubert, 1992- SISO-случай, B. De Schutter, 1996 - MIMO-случай)

Минимальность

Пусть T- окончательно периодическая последовательность булевых $m \times l$ матриц с длиной непериодической части L и периодом c. Тогда при $L \geq 2$ размерность минимальной реализации n удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{3 + \sqrt{8L - 7}}{4} \leq n \leq L + c.$$

Имеют место и более точные верхние оценки(в более тонких терминах). (B. De Schutter, V. Blondel, R. de Vries, B. de Moor, 1997).

Редукции I. Стирание висячих ветвей.

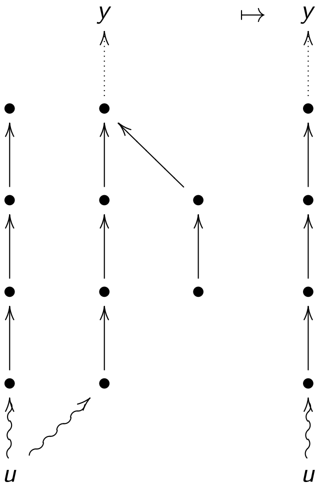
Лемма о стирании.

Пусть $Q_0 = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система. Определим следующее множество элементов канонического базиса X :

$$\mathcal{B}_X^{ess} = \{h | \exists x \in \cup_{I \in \mathcal{I}_B} I \exists y \in \cup_{O \in \mathcal{O}_C} O \exists k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \colon h \leq A^k x, y \leq A^l h\}.$$

Рассмотрим булеву систему Q_1 модуль состояний X_1, которой свободно порожден $\mathcal{B}_X^{ess}$, оператор состояний A_1 задан подграфом G_A, порожденным $\mathcal{B}_X^{ess}$, оператор входов B_1 является проекцией оператора B на X_1, оператор выходов C_1 является ограничением C. Q_1 является геометрическим упрощением Q_0. $\mathcal{B}_{X_1}^{ess} = \mathcal{B}_{X_1}$.

Стирание. Пример.



Редукции II. Отождествление неразличимых вершин по входам.

Достижимое измельчение

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система.
Тогда на множестве $R_Q = \{x \in \mathcal{B}_X | x \leq BU\}, i \in \mathbb{N}$ задано минимальное A-инвариантное достижимое измельчение $\Delta_R(Q)$. Оно определяется следующим образом

1. $\forall W \subseteq \mathcal{B}_U i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, R^i_W = \{x \in R_I | \exists w \in W x \leq A^i Bw\} \in \Delta_R(Q)$;
2. $R, P \in \Delta_R(Q) \Rightarrow R \cup P \in \Delta_R(Q)$;
3. $R, P \in \Delta_R(Q) \Rightarrow R \cap P \in \Delta_R(Q)$;
4. $R \in \Delta_R(Q) \Rightarrow R_I \setminus R \in \Delta_R(Q)$;
5. $R \in \Delta_R(Q) \Rightarrow AR \in \Delta_R(Q)$.

Редукции II. Отождествление неразличимых вершин по входам.

Лемма об отождествлении по входам

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система.
Тогда $Q^r = (A|_{\Delta_R(Q))}, B, C|_{\Delta_R(Q)}, \Delta_R(Q), U, Y)$- булева система, а тавтологическое вложение- морфизм булевых систем.
Кроме того, выполнено равенство $\Delta_R(Q^r) = \Delta_R(Q)$.

Наблюдаемое измельчение

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система.
Тогда на на множестве $O_I = \{x \in \mathcal{B}_X | Cx \neq 0\}$ задано минимальное A-инвариантное наблюдаемое измельчение $\Delta_O(Q)$.
Оно определяется следующим образом

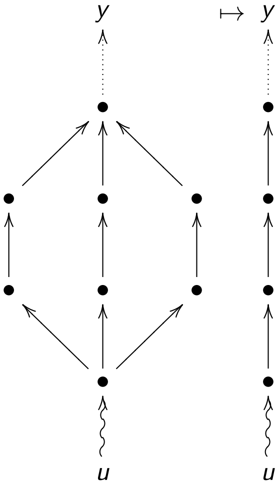
1. $\forall W \subseteq \mathcal{B}_U i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, O^i_W = \{x \in O_I | \exists w \in W w \leq CA^i x\} \in \Delta_O(Q)$;
2. $R, P \in \Delta_O(Q) \Rightarrow R \cup P \in \Delta_O(Q)$;
3. $R, P \in \Delta_O(Q) \Rightarrow R \cap P \in \Delta_O(Q)$;
4. $R \in \Delta_O(Q) \Rightarrow R_I \setminus R \in \Delta_O(Q)$;
5. $R \in \Delta_O(Q) \Rightarrow A^T R \in \Delta_O(Q)$.

Редукции II.1 Отождествление неразличимых вершин по выходам.

Лемма об отождествлении по выходам

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система.
Тогда $Q^o = (\widehat{A}, B \circ \tau, C, \Delta_R(Q), U, Y)$- булева система, причем сюръективное отображение $\tau \colon X \to \Delta_R(Q)$ сопоставляет $x \in \mathcal{B}_X$ такое $\delta \in \mathcal{B}_{\Delta_O(Q)}$, что $x \leq \delta$.

Отождествление. Пример.



Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система. Обозначим
$\overline{R_u^i} = R_u^i \setminus \cup_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, v \in \mathcal{B}_U, (R_v^j \neq R_u^i)} R_v^j$.
Определим $\Theta_R(Q) = \{R_u^i | i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, u \in \mathcal{B}_U \overline{R_u^i} \neq \varnothing\}$;
Пусть $\Xi_R(Q) = \{\xi \leq R_u^i \in \Theta_R(Q)\}$- некоторое множество элементов X мажорируемых элементами $\Theta_R(Q)$ удовлетворяющее следующим условиям инвариантности:

1. для каждого $\xi \in \Xi_R(Q)$ такого, что $\xi \leq R_u^i \in \Theta_R(Q)$ пересечение $\xi \cap \overline{R_u^i}$ непусто.

   Существует $x \in \mathcal{B}_X$ $x \leq \xi \cap \overline{R_u^i}$, такой, что для любого $\eta \in \Xi_R(Q)$, $\eta \neq \xi$ x не меньше η.
2. Пусть $s \not\leq \sum_{v \in \Theta_R(Q)} v$. Тогда если $\xi \in \Xi_R(Q)$ и $As \cap \xi \neq \varnothing$, то $\xi \leq As$.
3. Для любого $\xi \in \Xi_R(Q)$ если $\eta \in \Xi_R(Q)$ $\xi \cap A\eta \neq \varnothing$, то $\xi \leq A\eta$.

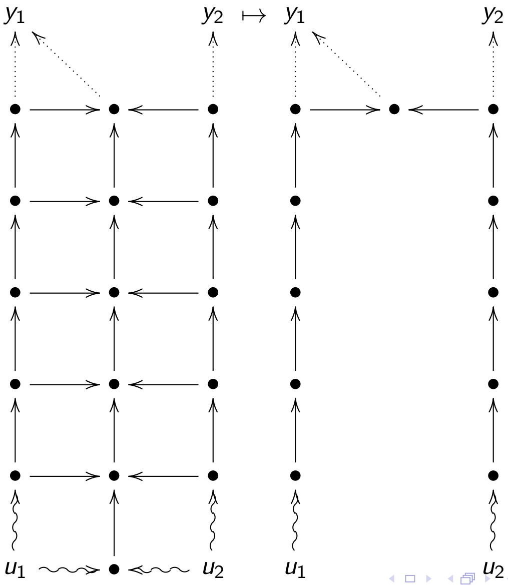
Пусть $G = \langle \Xi_R(Q) \rangle$, $H = \langle \mathcal{B}_X \setminus \{x \in \mathcal{B}_X | \exists \xi \in \Xi_R(Q) x \leq \xi\} \rangle$.
Тогда $Q_R^\xi = (A|_{G \oplus H}, B, C|_{G \oplus H}, X^\xi = G \oplus H, U, Y)$- булева система, а тавтологическое вложение- морфизм булевых систем.

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система. Обозначим
$\overline{O^i_u} = O^i_u \setminus \cup_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}, v\in\mathcal{B}_U, (O^j_v \neq O^i_u)} O^j_v$.
Определим $\Theta_O(Q) = \{O^i_u | i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \mathcal{B}_U \overline{O^i_u} \neq \varnothing\}$;
Пусть $\Xi_O(Q) = \{\xi \leq O^i_u \in \Theta_O(Q)\}$- некоторое множество элементов X мажорируемых элементами $\Theta_O(Q)$ удовлетворяющее следующим условиям инвариантности:

1. для каждого $\xi \in \Xi_O(Q)$ такого, что $\xi \leq O^i_u \in \Theta_O(Q)$ пересечение $\xi \cap \overline{O^i_u}$ непусто.
   Существует $x \in \mathcal{B}_X$ $x \leq \xi \cap \overline{O^i_u}$, такой, что для любого $\eta \in \Xi_O(Q)$, $\eta \neq \xi$ x не меньше η.
2. Пусть $s \nleq \sum_{v\in\Theta_O(Q)} v$. Тогда если $\xi \in \Xi_O(Q)$ и $A^T s \cap \xi \neq \varnothing$, то $\xi \leq A^T s$.
3. Пусть $O^i_u \in \Theta_O(Q)$. Тогда для любого $\xi \in \Xi_O(Q)$ если $\eta \in \Xi_O(Q)$ $\xi \cap A^T \eta \neq \varnothing$, то $\xi \leq A^T \eta$.

Пусть $G = \langle \Xi_O(Q) \rangle$, $H = \langle \mathcal{B}_X \setminus \{x \in \mathcal{B}_X | \exists \xi \in \Xi_O(Q) x \leq \xi\} \rangle$.
Рассмотрим проекцию $\varphi_O : X \to G \oplus H$, $x \leq \xi \in \Xi_O(Q), x \mapsto \xi$,
$x \in H, x \mapsto x$ Тогда $Q^\xi_O = (A|_{G\oplus H} \circ \varphi_O, B \circ \varphi_O, C, X^\xi = G \oplus H, U, Y)$-

Наследственная уникальность. Пример.



Теорема о 6 редукциях

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система. Она геометрически минимальна тогда и только тогда, когда к ней невозможно нетривиально применить ни одну из редукций описанных в вышеописанных леммах.

Геометрическая минимальность и минимальность. Общие результаты

Теорема об асимметрии.

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- геометрически минимальная свободная реализация некоторой последовательности, тогда ее стабилизатор в пространстве всех систем данной размерности относительно замены координат в пространстве состояний тривиален.

Канонические свободные реализации.

Булевы последовательности каноническая реализация которых лежит в категории систем над конечнопорожденными свободными полумодулями есть в точности последовательности U_n^k, периода длины $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, где 1 стоит на k-й позиции периода, а все остальные элементы периода - нули.

Реализации минимальной размерности для последовательностей $L_n = (0, \ldots, 0, 1, \ldots)$,

Реализации минимальной размерности

Рассмотрим семейство последовательностей $L_n = (0, \ldots, 0, 1, \ldots)$, где 0 повторяется первые $n-1$ раз, а затем, последовательность состоит только из единиц.

Свободные реализации минимальной размерности последовательности L_n, есть в точности системы задаваемые n-вершинными ориентированными графами состояний G удовлетворяющими следующим требованиям.

1. У графа имеется ровно одна вершина i, являющаяся концом стрелки из входов и ровно одна вершина o, являющаяся началом стрелки в выход.
2. Из i в o существует хотя бы один ориентированный путь.
3. Любой ориентированный путь из i в o проходит через все вершины графа G.
4. Существует вершина G в которой есть петля.

Каноническая реализация последовательности L_n

Конструкция реализации

Канонической реализацией последовательности L_n является система (A, B, C, X, U, Y) состоящая из компонент следующего вида

1. Пространство состояний $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, с естественным линейным порядком;
2. $U = Y = \mathbb{B}$;
3. $B \colon U \to X$, $B(i) = i$;
4. $A \colon X \to X$, $A(i) = i + 1$, при $0 < i < n$, $A(0) = 0$, $A(n) = n$;
5. $C \colon X \to Y$, $C(i) = 0$, при $i < n$, $C(n) = 1$.

Наблюдаемо аппроксимируемые реализации L_n

Строение реализаций.

Наблюдаемо аппроксимируемые свободные реализации минимальной размерности последовательности L_n, есть в точности системы задаваемые n-вершинными ориентированными графами состояний G удовлетворяющими следующим требованиям.

1. У графа имеется ровно одна вершина i, являющаяся концом стрелки из входа и ровно одна вершина o, являющаяся началом стрелки в выход.
2. Из i в o существует хотя бы один ориентированный путь.
3. Любой ориентированный путь из i в o проходит через все вершины графа G.
4. В вершине i есть петля.

Достижимо аппроксимируемые реализации L_n

Строение реализаций.

Достижимо аппроксимируемые свободные реализации минимальной размерности последовательности L_n, есть в точности системы задаваемые n-вершинными ориентированными графами состояний G удовлетворяющими следующим требованиям.

1. У графа имеется ровно одна вершина i, являющаяся концом стрелки из входов и ровно одна вершина o, являющаяся началом стрелки в выход.
2. Из i в o существует хотя бы один ориентированный путь.
3. Любой ориентированный путь из i в o проходит через все вершины графа G.
4. В вершине o есть петля.

Реализации последовательностей с конечным числом единиц.

Строение реализаций

Пусть $K = \{k_1, \ldots\}$- некоторая бесконечная последовательность элементов $\mathbb{B}$ в которой имеется ровно r единиц, причем последняя единица стоит на n-й позиции. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$, $S = \{s \in N | k_s = 1\}$.
Тогда минимальная размерность свободной реализации равна n. n-мерные свободные реализации представляются системами обладающими следующими свойствами:

1. Граф состояний G имеет n вершин;
2. G- не имеет ориентированных циклов(в том числе петель);
3. В G имеется ориентированная цепь L проходящая через все вершины графа.
4. Первая вершина цепи L лежит в множестве вершин I в которые имеются стрелки из входа, последняя в множестве вершин O из которых имеются стрелки в выход;

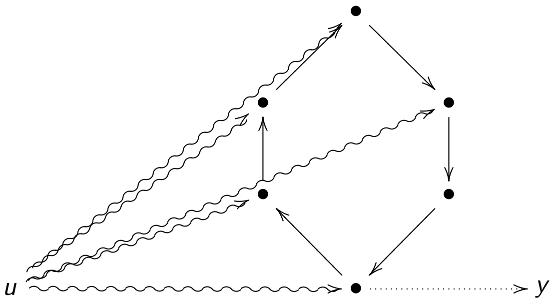
Реализации циклических последовательностей.

Семейство неэквивалентных реализаций.

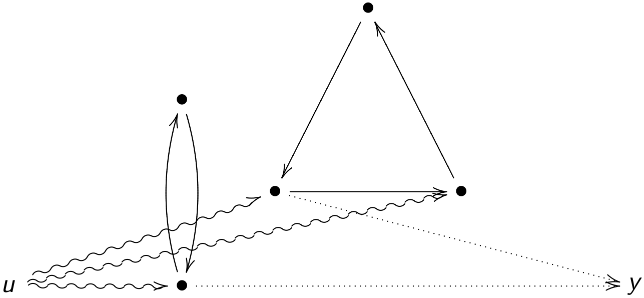
Пусть L- циклическая последовательность элементов из $\mathbb{B}$ длины цикла n.
Предположим также, что n раскладывается на простые множители как $p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$.
Пусть L содержит l единиц в цикле.
Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$- разбиение $\{1, \dots k\}$ на подмножества.
Реализация L с размерностью пространства состояний $\sum_{\kappa \in \lambda} \prod_{i \in \kappa} p_i^{r_i}$, граф состояний которой является дизъюнктным объединением циклов длин $\prod_{i \in \kappa} p_i^{r_i}$ для каждого $\kappa \in \lambda$ существует тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:
Пусть в L на h-м месте стоит единица. Тогда для любого $\lambda_i \in \lambda$ единица стоит и на всех позициях вида $h + r\lambda_i, r \in \mathbb{Z}$ В частности, это означает, что существуют такие $0 < k_i < \lambda_i, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $l = \prod_{i=1}^{l} \lambda_i - \prod_{i=1}^{l} (\lambda_i - k_i)$.

Реализации циклической последовательности. Пример.

Пусть L- цикл вида (101111). Тогда предыдущее утверждение описывает следующую пару реализаций.



Реализации циклической последовательности. Пример.



За пределами геометрической минимальности: лемма об ортогональных разбиениях. Условия применимости.

Условия применимости

Пусть $Q = (A, B, C, X, U, Y)$- булева система. Пусть $S, \Delta \subseteq \mathcal{B}_X$.
Пусть $O_1, \ldots, O_r$- разбиения S такие, что

$$\forall \lambda_{i,i=1\ldots l}, \mu_{i,i=1\ldots k} \in \cup_{i=1}^{r} O_i \cup_{i=1}^{l} \lambda_i = \cup_{i=1}^{k} \mu_i \Rightarrow \cup_{i=1}^{l} \lambda_i = \cup_{i=1}^{k} \mu_i = S. \quad (3)$$

Предположим также, что

1. $\forall \lambda \in O_{i, i\in\{1\ldots r\}} A\lambda \cap (S \cup \Delta) = \widehat{\lambda} \cup \Delta, \widehat{\lambda} \in O_i$;
2. $\forall v \in \mathcal{B}_X \setminus S(\{w \in S | w \leq Av\} = \cup_{i=1}^{r} \cup_{\lambda \in K_v^i \subseteq O_i} \lambda) \vee (\exists i \in \{1 \ldots r\} K_v^i \neq \varnothing \Rightarrow \Delta \leq Av)$;
3. $\forall u \in \mathcal{B}_U(\{w \in S | w \leq Bu\} = \cup_{i=1}^{r} \cup_{\mu \in W_u^i \subseteq O_i} \mu) \vee (\exists i \in \{1 \ldots r\} W_u^i \neq \varnothing \Rightarrow \Delta \leq Bu)$;
4. $A\Delta = \Delta$.

Лемма об ортогональных разбиениях. Конструкция редукции. Подсистема.

Конструкция

Определим $G =< \{\lambda + \Delta | \lambda \in \cup_{i:\ (\exists v \in \mathcal{B}_X \setminus SK_v^i \neq \varnothing) \vee (\exists u \in \mathcal{B}_U W_u^i \neq \varnothing)} O_i\} >$,
$H =< \mathcal{B}_X \setminus (S \cup \Delta) >$.
Тогда система $\widetilde{Q} = (A|_{G \oplus H}, B, C|_{G \oplus H}, G \oplus H, U, Y)$- система в категории произвольных конечнопорожденных $\mathbb{B}$-полумодулей, а тавтологическое вложений - морфизм булевых систем.

Лемма об ортогональных разбиениях. Конструкция редукции. Факторсистема.

Конструкция

Рассмотрим полумодуль $\oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H$. Определим эндоморфизм $\widehat{A}\colon \oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H \to \oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H$ следующим образом: Если $\lambda \in O_i$, то $\widehat{A}\lambda = (A\lambda)\setminus\Delta$. Если $h \in \mathcal{B}_H$, то $\widehat{A}h = Ah \cup \mathcal{B}_H + \sum_{\lambda\in\sqcup_{i=1}^{r}K_h^i}\lambda$.
Определим морфизм $\widehat{B}\colon U \to \oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H$, как
$\widehat{B}u = Bu \cup H + \sum_{\lambda\in\sqcup_{i=1}^{r}W_u^i}\lambda$. Наконец,
$\widehat{C}x = \sum_{\lambda\in\oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle,\lambda\leq x} C\lambda + \sum_{h\in H,h\leq x} Ch$.
Тогда $\widehat{Q} = (\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H, U, Y)$- булева система, отображение $\tau\colon \oplus_{i=1}^{r}\langle O_i\rangle \oplus H \to G\oplus H$, $\tau\colon \lambda\mapsto\lambda+\Delta$, $\quad h\mapsto h$- сюръективный морфизм булевых систем.