# О решении невыпуклых задач оптимального управления

**М.В. Янулевич**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения
Российской академии наук

e-mail: `max@irk.ru`

V Традиционная всероссийская молодежная школа
«Управление, информация и оптимизация»

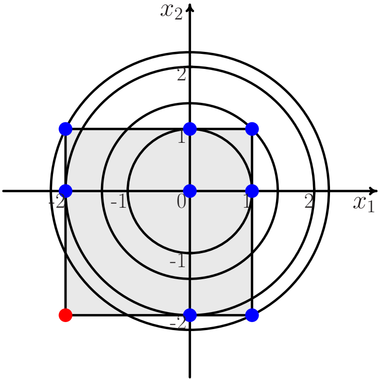
16–23 июня 2013 г.
Московская область, г. Солнечногорск

$$\|x(1)\|^2 \uparrow \max,$$

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad \mathring{\forall} t \in [0,1], \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$-2 \leqslant u_i(t) \leqslant 1 \quad \mathring{\forall} t \in [0,1].$$

$$X(t_1) = \Pi \triangleq \left\{ x \in I\!R^n \mid -2 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$




- Количество процессов, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина — $3^n$;
- локальных максимумов — $2^n$.
- При этом в задаче **единственный** глобальный максимум!

$$(\mathcal{P}):\quad J(u) \triangleq F_1(x(t_1)) + \int_T \big[F(x(t),t) + f_0(u(t),t)\big] \downarrow \min_u, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(u(t),t) \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T \triangleq [t_0,t_1], \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$u \in \mathscr{U} = \{\, u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T \,\}. \tag{3}$$

$$F_1(x) = g_1(x) - h_1(x) \quad \forall x \in I\!R^n, \tag{4}$$

$$F(x,t) = g(x,t) - h(x,t) \quad \forall x \in I\!R^n, \quad t \in T. \tag{5}$$

**Предположения:**

- $g_1(\cdot)$, $h_1(\cdot)$, $x \mapsto g(x,t)\colon I\!R^n \to I\!R$ и $x \mapsto h(x,t)\colon I\!R^n \to I\!R$, $t \in T$ являются выпуклыми и дифференцируемыми функциями на $I\!R^n$;
- $t \mapsto g(x,t)$ и $t \mapsto h(x,t)$ являются непрерывными функциями;
- функции $f_0\colon I\!R^r \times I\!R \to I\!R$ и
- $b\colon I\!R^r \times I\!R \to I\!R^n$ непрерывны по совокупности переменных;
- $A(\cdot)$ — матричная функция с непрерывными элементами;
- $U \subset I\!R^r$ — компактное множество.

## Определение

Пусть $X \subset I\!R^n$ — выпуклое множество. Тогда $f\colon X \to I\!R$ называется функцией А.Д. Александрова (d.c. функцией) на $X$, если $\exists\, g, h \in \mathrm{Conv}\,(X)$: $f(x) = g(x) - h(x)\ \forall\, x \in X$, где $\mathrm{Conv}\,(X)$ — конус выпуклых функций на $X$.


- Александров А.Д. Поверхности, представимые разностями выпуклых функций // Доклады АН СССР. 1950. Т. 72, № 4. С. 613–616.
- Александров А.Д. Существование почти всюду второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей. Ученые записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. Математика. 1939. Т. 37, № 6, С. 3–35.


## Некоторые свойства пространства $DC(X)$

1) $DC(X)$ — линейное пространство d.c. функций на $X$;
2) $C^2(\Omega) \subset DC(\Omega)$, где $\Omega$ — открытое выпуклое множество;
3) $\mathrm{cl}\,(DC(X)) = C(X)$, если $X$ — выпуклый компакт;
4) $DC(X)$ является замкнутым относительно операций:

$$\sum_1^m \lambda_i f_i(x); \quad \max_i f_i(x); \quad \min_i f_i(x); \quad \prod_1^n f_i(x).$$

P. Hartman, J.-B. Hiriart-Urruty, Pham Dinh Tao, Thi Hoai An Le, P.T. Thach, H. Tuy, J.-P. Penot, A.S. Strekalovsky, R. Ellaia, I. Ginchev, J.E. Martinez-Legaz etc.

Пусть $G(u) \triangleq g_1(x(t_1,u)) + \int\limits_T g(x(t,u),t)\,dt$ и $L(u) \triangleq \int\limits_T f_0(u(t),t)\,dt$.

$\beta_-(y) \triangleq G(y) + \inf\limits_u \{L(u) \mid u(\cdot) \in \mathscr{U}\}$ и $\beta_+ \triangleq \sup\limits_u \{G(x(\cdot,u)) + L(u) \mid u(\cdot) \in \mathscr{U}\}$.

**Теорема 1. (А.С. Стрекаловский, [1])**

Пусть выполняется условие

$$(\mathcal{H}): \qquad \exists\, \tilde{u}(\cdot) \in \mathscr{U}: \quad J(\tilde{u}) > J(w). \tag{6}$$

Управление $w(\cdot) \in \mathscr{U}$ является глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(\mathcal{E}): \quad \begin{aligned} &\forall\, (y(\cdot),\beta):\, y(\cdot) \in AC^n(T), \quad \beta \in I\!R, \quad \beta_-(y) \leqslant \beta \leqslant \beta_+, && (7)\\ &H(y) \triangleq h_1(y(t_1)) + \int\limits_T h(y(t),t)dt = \beta - \zeta, \quad \zeta := J(w), && (8)\\ &\forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U} \quad g(x(t_1,u)) + \int\limits_T [g(x(t,u),t) + f_0(u(t),t)]\,dt - \beta \geqslant && \\ &\geqslant \langle \nabla h_1(y(t_1)), x(t_1,u) - y(t_1)\rangle + \int\limits_T \langle \nabla h(y(t),t), x(t,u) - y(t)\rangle\,dt. && (9) \end{aligned}$$

[1] Strekalovsky A.S. Global Optimality Conditions for Optimal Control Problems with Functions of A.D.Alexandrov // Journal of Optimization Theory and Applications.2013. DOI: 10.1007/s10957-013-0355-z.

Пусть имеется управление $w(\cdot) \in \mathscr{U}$ в задаче $(\mathcal{P})$. Введем следующий функционал:

$$\varphi(u, y, \beta) \triangleq g_1(x(t_1, u)) - \langle \nabla h_1(y(t_1)), x(t_1, u) - y(t_1) \rangle - \beta + \\ + \int_T [g(x(t, u), t) + f_0(u(t), t) - \langle \nabla h(y(t), t), x(t, u) - y(t) \rangle] \, dt, \quad (10)$$

где $x(\cdot, u)$ — решение системы (2)–(3), соответствующее управлению $u(\cdot) \in \mathscr{U}$.

$$\Phi(w) \triangleq \inf_{u, y, \beta} \{\varphi(u, y, \beta) \mid y(\cdot) \in AC^n(T), \quad \beta_-(y) \leqslant \beta \leqslant \beta_+, \\ h_1(y(t_1)) + \int_T h(y(t), t) \, dt = \beta - J(w)\}. \quad (11)$$

Условия глобальной оптимальности (7)–(9) можно записать в эквивалентном виде

$$\Phi(w) = 0. \quad (12)$$

**Теорема 2.**

Если последовательность управлений $\{w^k(\cdot)\} \subset \mathscr{U}$ является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P})$, то

$$(\mathcal{E}_1): \qquad \lim_{k\to\infty} \Phi(w^k) = 0. \tag{13}$$

Если, кроме того, справедливо предположение

$$\exists\, \tilde{u}(\cdot) \in \mathscr{U} \quad \exists\, \chi > 0: \quad J(\tilde{u}) \geqslant J(w^k) + \chi \quad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots, \tag{14}$$

то условие (13) становится достаточным для того, чтобы последовательность $\{w^k(\cdot)\}$ была минимизирующей в задаче $(\mathcal{P})$.

**Вспомогательная вариационная задача**

$$(AP(w^k)): \qquad \begin{gathered} \varphi(u, y, \beta) \downarrow \min_{u,y,\beta} \\ y(\cdot) \in PC^n(T), \quad \beta_- \leqslant \beta \leqslant \beta_+, \\ h_1(y(t_1)) + \int\limits_T h(y(t), t)\, dt = \beta - J(w^k). \end{gathered} \tag{15}$$

Пусть известно допустимое управление $w^k(\cdot) \in \mathscr{U}$ в задаче $(\mathcal{P})$. Тогда следующее управление $w^{k+1}(\cdot) \in \mathscr{U}$ строится по правилу:

$$\varphi(w^{k+1}, y^k, \beta_k) \leqslant \theta_k \Phi(w^k) + \Delta_k, \tag{16}$$

где

$$\left.\begin{array}{c} h_1(y^k(t_1)) + \int\limits_T h(y^k(t), t)\, dt = \beta_k - \zeta_k, \quad \zeta_k := J(w^k), \\ 0 < \theta \leqslant \theta_k \leqslant 1, \quad \Delta_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta_k < +\infty. \end{array}\right\} \tag{17}$$

### Теорема 3.

Последовательность управлений $\{w^k(\cdot)\}$, построенная по правилу (16), (17), удовлетворяет условию оптимальности (13).
Кроме того, если дополнительно выполнено условие

$$\exists\, \tilde{u}(\cdot) \in \mathscr{U} \quad \exists\, \chi > 0: \quad J(w^0) \leqslant J(\tilde{u}) - \chi - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k, \tag{18}$$

то последовательность $\{w^k(\cdot)\}$ является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P})$.

**Шаг 1.** ***Локальный поиск***. Найти управление $w(\cdot)$, удовлетворяющее ПМП, $\zeta := J(w)$.

**Шаг 2.** Выбрать параметр $\beta$: $\beta_- \leqslant \beta \leqslant \beta_+$ и построить конечный набор вектор-функций

$$\mathcal{A}(\zeta,\beta) = \{\, y^1(\cdot), y^2(\cdot), \ldots, y^N(\cdot) \mid H(y^i(\cdot)) = \beta - \zeta, \beta_- \leqslant \beta \leqslant \beta_+, \quad i = \overline{1,N} \,\}. \quad (19)$$

**Шаг 3.** Решить частично линеаризованные задачи для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ . Пусть $(x^i(\cdot), u^i(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(PL_i)$, где

$$(\mathcal{P}L_i): \quad I_{y^i}(u) = g_1(x(t_1,u)) - \langle \nabla h_1(y^i(t_1)), x(t_1,u)\rangle + \\ + \int\limits_T [g(x(t,u),t) - \langle \nabla h(y^i(t),t), x(t,u)\rangle]\, dt \downarrow \min, \quad u(\cdot) \in \mathscr{U}. \quad (20)$$

**Шаг 4.** Решить вспомогательные «задачи уровня». Пусть $p^i(\cdot) \in \mathrm{Sol}(U_i)$, где

$$(U_i): \quad \begin{gathered} \langle \nabla h_1(y(t_1)), x^i(t_1) - y(t_1)\rangle + \int\limits_T \langle \nabla h(y(t),t), x^i(t) - y(t)\rangle \uparrow \max_y, \\ y(\cdot) \in PC^n(T), \quad H(y(\cdot)) = \beta - \zeta. \end{gathered} \quad (21)$$

**Шаг 5.** Если $\eta(\beta,\zeta) \triangleq \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \varphi(x^i(\cdot), u^i(\cdot), p^i(\cdot), \beta) < 0$, перейти на следующую итерацию метода. В противном случае осуществляется поиск по параметру $\beta$.

# Специальный метод локального поиска

Пусть $u^s(\cdot) \in \mathscr{U}$.

## Линеаризованная задача $(\mathcal{P}L_s)$

$$I_s(u) = g_1(x(t_1,u)) - \langle \nabla h_1(x^s(t_1)), x(t_1,u)\rangle +$$
$$+ \int\limits_T \Big[ g(x(t,u),t) - \langle \nabla h(x^s(t),t), x(t,u)\rangle + f_0(u(t),t) \Big] dt \downarrow \min, \quad u(\cdot) \in \mathscr{U}. \tag{22}$$

## Правило построения последовательности управлений

$$u^{s+1}(\cdot) \in \delta_s\text{-}Sol(\mathcal{P}L_s). \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \dot{\psi}^s(t) = -A(t)^\top \psi^s(t) + \nabla g(x^{s+1}(t),t) - \nabla h(x^s(t),t), \quad t \in T, \\ \psi^s(t_1) = \nabla h_1(x^s(t_1)) - \nabla g_1(x^{s+1}(t_1)), \end{gathered} \tag{24}$$

$$\delta_s > 0, \quad s = 0,1,2\ldots, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < +\infty, \tag{25}$$

$$\langle \psi^s(t), b(u^{s+1}(t),t)\rangle + f_0(u^{s+1}(t),t) + \frac{\delta_s}{t_1 - t_0} \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{v \in U} \big[ \langle \psi^s(t), b(v,t)\rangle + f_0(v,t) \big] \quad \mathring{\forall} t \in T. \tag{26}$$

**Теорема 4.**

Последовательность управляемых процессов $\{x^s(\cdot), u^s(\cdot)\}$, генерируемая по правилу (24)–(26) удовлетворяет условию

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{v\in U}[\langle\psi^s(t), b(v,t) - b(u^s(t),t)\rangle + f_0(v,t) - f_0(u^s(t),t)] = 0 \qquad \overset{\circ}{\forall} t \in T, \tag{27}$$

Кроме того, соответствующая числовые последовательности $\{J(u^s)\}$ и $\{I_s(u^s)\}$ сходятся. При этом выполняется предельное равенство

$$\lim_{s\to\infty} (I_s(u^s) - \mathcal{V}(PL_s)) = 0, \tag{28}$$

**Теорема 5.**

Пусть функции $h_1(\cdot)$ и $h(\cdot,t)$, $t \in T$ являются сильно выпуклыми. Тогда последовательность состояний $\{x^s(\cdot)\}$, генерируемая по правилу (24)–(26), сходится в следующем смысле

$$x^s(t_1) \to x_1^* \text{ в } I\!R^n, \tag{29}$$

$$x^s(\cdot) \to x_*(\cdot) \text{ в } L_2(T). \tag{30}$$

$$(\mathcal{P}): \quad J(u) = \langle d, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Cx(t_1)\rangle + \\ + \int\limits_T \Big[\langle q(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \langle a(t), u(t)\rangle\Big]\, dt \downarrow \min_u, \tag{31}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{32}$$

$$u(\cdot) \in \mathscr{U} = \{\, u \in L^r_\infty(T) \mid u \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T \,\}. \tag{33}$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$;
- матрицы $C$, $Q(t)$, $t \in T$, являются знаконеопределенными;
- вектор-функции $t \mapsto q(t)$, $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto c(t)$ непрерывны;
- элементы матричных функций $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto B(t)$, $t \mapsto Q(t)$ непрерывны;
- $U \subset \mathbb{R}^r$ — компактное множество.

Пусть задача $(\mathcal{P}_i)$ имеет структуру задачи $(\mathcal{P})$, где допустимый процесс $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, такой что $x(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$, $t \in T$.

**Управляемые системы задач-ядер:**

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$
$$-2 \leqslant u_i(t) \leqslant 1, \quad t \in T = [0, 1].$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 2,$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = -1,$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T = [0, 1].$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), \quad x_1(0) = \frac{1}{4},$$
$$\dot{x}_2(t) = u_2(t), \quad x_2(0) = 0,$$
$$|u_j(t)| \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \quad t \in T = [0, 1].$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = -1,$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad x_2(0) = 1,$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T = [0, 1].$$

Пусть $H \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ — невырожденная ортогональная симметричная матрица ($H = H^{-1} = H^\top$, $\det H \neq 0$).

$$(\mathcal{P}_H): \quad J_H(u) = \langle d_H, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), C_H x(t_1)\rangle +$$
$$+ \int\limits_T \Big[\langle q_H(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t), Q_H(t)x(t)\rangle + \langle a_H(t), u(t)\rangle\Big]\, dt \downarrow \min_u \qquad (34)$$

$$\dot{x}(t) = A_H(t)x(t) + B_H(t)u(t) + c_H(t), \quad x(t_0) = x_0^H, \qquad (35)$$
$$u(\cdot) \in \mathscr{U} = \{u \in L_\infty^r(T) \mid u \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T\}, \qquad (36)$$

$$\left.\begin{array}{c} d_H = Hd, \quad x_H^0 = Hx_0, \\ q_H(t) = Hq(t), \quad a_H(t) = a(t), \quad c_H(t) = Hc(t), \\ A_H(t) = HA(t)H, \quad B_H(t) = HB(t), \quad t \in T. \end{array}\right\} \qquad (37)$$

**Предложение 1.**

1) Если процесс $(z_i(\cdot), w_i(\cdot))$ является глобально (локально) оптимальным в задаче $(\mathcal{P}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то управляемый процесс $(z(\cdot), w(\cdot))$, где $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t))$ и $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t))$, $t \in T$, является глобально (локально) оптимальным в задаче $(\mathcal{P}_H)$.
2) Если процесс $(\bar{x}_i(\cdot), \bar{u}_i(\cdot))$ удовлетворяет ПМП в задаче $(\mathcal{P}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то управляемый процесс $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, где $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_m(t))$ и $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \ldots, \bar{u}_m(t))$, $t \in T$, удовлетворяет ПМП в задаче $(\mathcal{P}_H)$.

**Следствие 1.**

Пусть в задаче $(\mathcal{P}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, существует $K_i$ и $L_i$ глобально и локально оптимальных процессов соответственно, а также $M_i$ экстремалей. Тогда в задаче $(\mathcal{P}_H)$ существует $\prod_{i=1}^{m} K_i$ и $\prod_{i=1}^{m} L_i$ глобально и локально оптимальных процессов соответственно и $\prod_{i=1}^{m} M_i$ экстремалей.

$$\mathcal{R}_4 = \{y^i(\cdot) \mid y^i(t) = z(t) + \mu_i \cdot p^i(t), \quad t \in T\}$$

где параметр $\mu$ выбирается таким образом, чтобы

$$H(y^i) = \beta - \zeta.$$

Кроме того, $P = \{p^i(\cdot) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ — множество вектор-функций $p^i\colon T \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\langle p^i(t), S(t)p^j(t)\rangle = 0\ \forall i \neq j\ \forall t \in T$, где $S(t) = \xi(t)Q_2(t) + (1 - \xi(t))C_2$, $\xi(t) = 1\ \forall t \in [t_0, t_1[$ и $\xi(t_1) = 0$. Другими словами, вектор функции из множества $P$ являются попарно сопряженными относительно матрицы $S(t)$.

**Алгоритм построения вектор-функции $p^i(\cdot) \in P$:**
Пусть задан допустимый процесс $(z(\cdot), u(\cdot)) \in D$.
**Шаг 0.** *Инициализация.* Если $i = 1$, то $r^i(t) := (S(t) - E)z(t)$, $p^i(t) = -r^i(t)$, $t \in T$. Stop.

**Шаг 1.** Вычислить для всех $t \in T$ $\alpha_i(t) := \dfrac{\langle r^i(t), r^i(t)}{\langle p^i(t), S(t)p^i(t)\rangle}$.

**Шаг 2.** Положить $r^{i+1}(t) := r^i(t) + \alpha_i \cdot S(t)p^i(t)\ \forall t \in T$.

**Шаг 3.** Вычислить для всех $t \in T$ $\beta_{i+1}(t) = \dfrac{\langle r^{i+1}(t), r^{i+1}(t)\rangle}{\langle r^i(t), r^i(t)\rangle}$.

**Шаг 4.** Положить $p^{i+1}(t) := -r^i(t) + \beta_{i+1}(t)p^i(t)\ \forall t \in T$.

| № | $n$ | $r$ | $PMP$ | $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ | $J_0$ | $J_*$ | $St$ | $PL$ | Time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B6-6-2 | 6 | 6 | 18 | -35.42 | -9.65 | -35.42 | 6 | 221 | 1:27.87 |
| B6-6-3 | 6 | 6 | 10 | -8.29 | 21.72 | -8.29 | 5 | 180 | 45.57 |
| B6-5-2 | 6 | 5 | 11 | -18.25 | 16.47 | -18.25 | 5 | 178 | 1:40.91 |
| B10-9-3 | 10 | 9 | 108 | -36.15 | 18.94 | -36.15 | 11 | 589 | 3:09.82 |
| B10-8-3 | 10 | 8 | 72 | -17.48 | -3.11 | -17.48 | 13 | 644 | 3:11.11 |
| B10-9-1 | 10 | 9 | 84 | -37.33 | 10.45 | -37.33 | 7 | 420 | 2:38.48 |
| B10-8-1 | 10 | 8 | 32 | -14.83 | 7.28 | -14.83 | 7 | 436 | 1:32.81 |
| B14-12-4 | 14 | 12 | 432 | -37.36 | 5.14 | -37.36 | 16 | 1161 | 3:49.67 |
| B14-13-1 | 14 | 13 | 504 | -38.50 | -11.15 | -38.50 | 13 | 921 | 3:47.80 |
| B14-12-3 | 14 | 12 | 318 | -17.36 | -5.41 | -17.36 | 10 | 926 | 3:04.26 |
| B14-10-2 | 14 | 10 | 192 | -61.53 | 27.39 | -61.53 | 19 | 1347 | 5:18.19 |
| B20-18-2 | 20 | 18 | 4712 | -58.68 | 12.83 | -58.68 | 21 | 2255 | 8:45.55 |
| B20-17-3 | 20 | 17 | 3456 | -23.46 | 19.84 | -23.46 | 27 | 1823 | 6:57.90 |
| B20-18-5 | 20 | 18 | 11456 | -47.18 | -12.43 | -**26.29** | 26 | 1769 | 5:46.30 |
| B20-19-4 | 20 | 16 | 11456 | -58.15 | 18.15 | -58.15 | 33 | 2458 | 8:08.97 |
| B20-20-3 | 20 | 20 | 22496 | -91.31 | -6.28 | -91.31 | 34 | 2574 | 8:38.12 |
| B20-19-4 | 20 | 19 | 22496 | -112.67 | -5.27 | -112.67 | 31 | 2122 | 8:15.71 |

Intel Core 2 Duo 3.2 GHz

# Публикации

- Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.
- Стрекаловский А.С. Максимизация выпуклого по состоянию функционала Лагранжа в оптимальном управлении // Автоматика и телемеханика. 2012. № 6. С. 18–33.
- Strekalovsky A.S. Local search for nonconvex optimal control problems of Bolza // Numerical methods and programming. 2010. V. 11. P. 344–350.
- Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. К решению невыпуклых задач оптимального управления с терминальным целевым функционалом // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 269–280.
- Стрекаловский А.С, Янулевич М.В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 7. С. 1187–1201.
- Стрекаловский А.С. Задачи оптимального управления с терминальными функционалами, представимыми в виде разности двух выпуклых функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1865–1879.
- Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в одной невыпуклой задаче оптимального управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. (принята к печати)

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ
http://nonconvex.isc.irk.ru

Пусть числовые последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\{\tau_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\Delta_k\}$ и $\{\theta_k\}$:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_k, \tau_k, \delta_k, \Delta_k > 0, \quad 0 < \theta \leqslant \theta_k < 1, \\ k = 0, 1, 2 \ldots, \quad \tau_k \to 0, \quad \delta_k \to 0, \quad \Delta_k \to 0 \quad (k \to \infty). \end{array}\right\} \tag{38}$$

### Теорема 4

Пусть выполнены предположения $(\mathcal{H}L)$, $(\mathcal{H}U)$, $(\mathcal{H}R)$, а также (38) и

$$\exists\, (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \mathcal{D} \quad \exists\, \chi > 0: \quad J(\hat{x}, \hat{u}) \geqslant J(x^0, u^0) + \chi. \tag{39}$$

Пусть также выполнено условие согласования числовых последовательностей:

$$\Delta_k \geqslant \theta_k \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Тогда последовательность $\big\{(z^k(\cdot), w^k(\cdot))\big\}$, генерируемая методом глобального поиска, является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P})$.