

*Применение метода инвариантных эллипсоидов  
к линейной задаче слежения*

*Железнов К. О.*

*Московский Физико-Технический Институт  
(Государственный Университет)*

---

*V Традиционная всероссийская молодежная школа  
«Управление, информация, оптимизация»  
г.Солнечногорск, 16-23 июня 2013 г.*

## Введение

Целью настоящей работы является исследование задачи управления регулируемым выходом линейной системы в одной из возможных постановок **задачи слежения**, одна из первых постановок которой восходит к Р. Калману.

В работе рассматривается **задача слежения в линейной системе управления**. Цель управления, которое ищется в виде статической линейной обратной связи, состоит в том, чтобы регулируемый выход системы был как можно «ближе» (в некотором смысле) к сигналу, подаваемому на вход системы.

Предлагаемый подход к решению задачи основан на **методе инвариантных эллипсоидов**, а в качестве технического средства используется техника **линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI)**. Такой подход позволил переформулировать исходную проблему к удобному для решения виду: ищется **минимальный ограничивающий эллипсоид**, содержащий вектор выхода рассматриваемой системы. В качестве критерия минимальности в работе выбран критерий следа, соответствующий минимизации суммы квадратов полуосей эллипсоида.

С технической точки зрения проблема сводится к решению **задачи полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP)** и одномерной выпуклой оптимизации. Для решения получающихся задач существуют эффективные программные средства, в частности, свободно распространяемые пакеты SeDuMi и YALMIP на базе системы Matlab.

## Техника инвариантных эллипсоидов

- Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0, \quad (1)$$

называется **инвариантным** для рассматриваемой системы, если

$$x(0) \in \mathcal{E}_x \implies x(t) \in \mathcal{E}_x \quad \forall t \geq 0$$

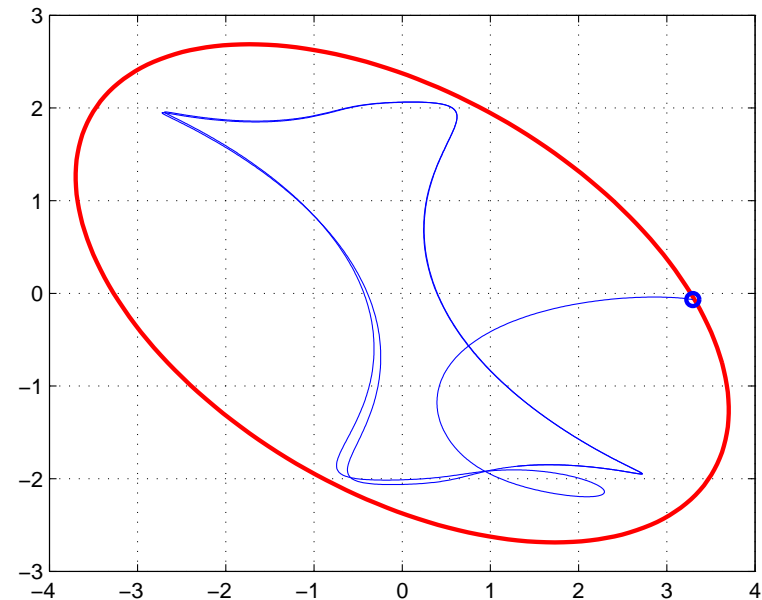
т.е. начинаясь в любой точке  $\mathcal{E}_x$ , траектория системы гарантированно останется внутри  $\mathcal{E}_x$  для всех допустимых возмущений.

- Эллипсоид

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1}z \leq 1\} \quad (2)$$

называется **ограничивающим эллипсоидом** по выходу  $z = Cx$ , соответствующим инвариантному эллипсоиду  $\mathcal{E}_x$ .

- Задача нахождения минимального ограничивающего эллипсоида для системы указанной выше была решена в [Boyd et al., 1994].



---

Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM. Philadelphia. 1994.

## Задача анализа

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Df(t) \\ z &= f(t) - Cx,\end{aligned}\tag{3}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  - известные матрицы

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор фазового состояния системы

$z(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы

Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{f} = A_0 f + D_0 w,\tag{4}$$

где  $A_0 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $D_0 \in \mathbb{R}^{l \times m}$

Матрицы  $A$  и  $A_0$  будем считать устойчивыми (гурвицевыми).

$w(t) \in \mathbb{R}^m$  - **внешнее возмущение** удовлетворяющее условию

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0\tag{5}$$

## Подход к решению

Введем в рассмотрение составной вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l} \quad (6)$$

и рассмотрим расширенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Df, \\ \dot{f} &= A_0 f + D_0 w, \\ z &= f - Cx, \end{aligned} \quad (7)$$

которая представима относительно вектора состояния  $g$  в матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} w, \\ z &= \underbrace{(-C \ I)}_{\tilde{C}} g. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем искать минимальный (в некотором смысле) ограничивающий эллипсоид, содержащий вектор выхода  $z$  расширенной системы.

## Теорема 1

Решение  $\hat{P}$  задачи

$$\text{tr} (\tilde{C}P\tilde{C}^T) \rightarrow \min \quad (9)$$

при ограничениях

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \tilde{D}\tilde{D}^T \leq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} -C & I \end{pmatrix},$$

а минимизация проводится по матричной переменной

$$P = P^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

и скалярному параметру  $\alpha > 0$ , определяет матрицу  $\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T$  **минимального ограничивающего**

**эллипсоида** для выхода  $z$  системы (7).

## Задача синтеза

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Df(t), \\ z &= f(t) - Cx,\end{aligned}\tag{10}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $f(t) \in \mathbb{R}^l$ ,

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  - фазовое состояние системы,

$u \in \mathbb{R}^p$  - управление,

$z(t) \in \mathbb{R}^l$  - выход системы.

Пусть функция  $f(t)$  по-прежнему удовлетворяет условиям (4), (5). Целью является нахождение регулятора  $K$  в форме обратной связи

$$u = Kg = K_1x + K_2f,\tag{11}$$

где  $K \in \mathbb{R}^{p \times (n+l)}$ ,  $K_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{p \times l}$ , который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида по выходу) подавляет воздействие внешних возмущений  $w(t)$ .

## Предлагаемый подход

Рассмотрим расширенную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ \dot{f} &= A_0f + D_0w, \\ z &= f(t) - Cx,\end{aligned}\tag{12}$$

или, в замкнутом виде (замкнутым регулятором (11))

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK_1)x + (BK_2 + D)f, \\ \dot{f} &= A_0f + D_0w, \\ z &= f - Cx\end{aligned}\tag{13}$$

Эта система представима относительно вектора состояния  $g$  в матричной форме:

$$\begin{aligned}\dot{g} &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK_1 & D + BK_2 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} w = \tilde{A}_c g + \tilde{D}w, \\ z &= \underbrace{(-C \ I)}_{\tilde{C}} g.\end{aligned}\tag{14}$$



## Теорема 2

Решение  $\hat{P}, \hat{Y}$  задачи минимизации

$$\text{tr} (\tilde{C}P\tilde{C}^T) \rightarrow \min \quad (15)$$

при ограничениях

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \alpha P + \tilde{B}Y + Y^T\tilde{B}^T + \frac{1}{\alpha}\tilde{D}\tilde{D}^T \leq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix},$$

минимизация проводится по матричным переменным

$$P = P^T \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}, Y \in \mathbb{R}^{p \times (n+l)}$$

и скалярному параметру  $\alpha > 0$  определяет матрицу  $\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T$  ограничивающего эллипсоида

для выхода системы (12) и регулятор

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

подавляющий влияние внешних возмущений.

## Пример: Двухмассовая система

Продemonстрируем эффективность метода на примере двухмассовой системы [Reinelt W., 2000]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ z &= f - Cx, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

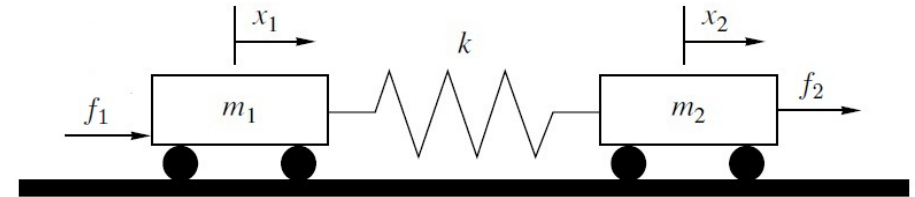


Рис. 1: Двухмассовая система

Выбираем матрицы  $A_0$  и  $D_0$  и потребуем дополнительного ограничения на управление

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}. \\ \|u(t)\| &\leq \mu. \end{aligned} \tag{16}$$

---

*Reinelt W. Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints // Proc. American Control Conference. Chicago, USA, June 28-30, 2000. P. 1817–1821.*

## Пример: Двухмассовая система

В результате, для рассматриваемой системы при  $\mu = 5$  имеем:

$$\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T = \begin{pmatrix} 0.3044 & -0.1383 \\ -0.1383 & 0.6609 \end{pmatrix},$$

$$\hat{K}^T = \begin{pmatrix} -31.3569 & -17.3058 & 9.4955 & -17.2320 & 26.2767 & 9.5308 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\text{tr}(\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T) = 0.9653$$

Если мы теперь не будем использовать информацию о величине сигнала  $f(t)$ ,

полагая  $K_2 = 0$ , то получим регулятор:

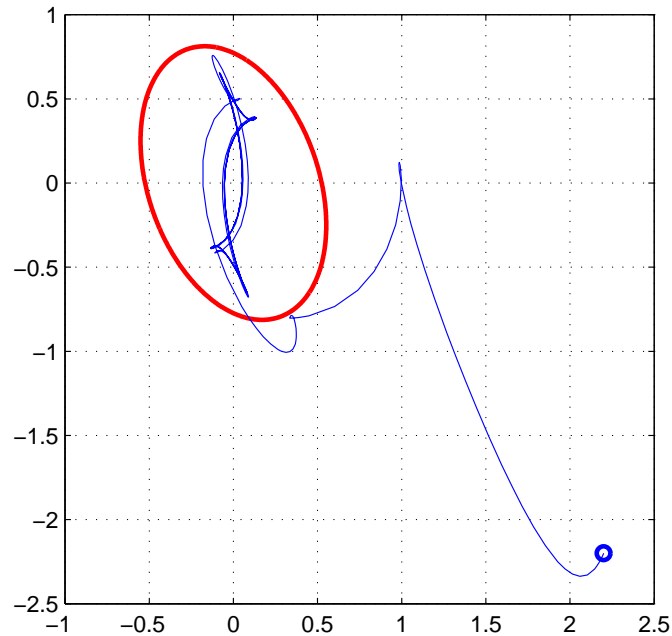
$$\tilde{K}^T = \begin{pmatrix} -31.3569 & -17.3058 & 9.4955 & -17.2320 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

который стабилизирует систему (12).

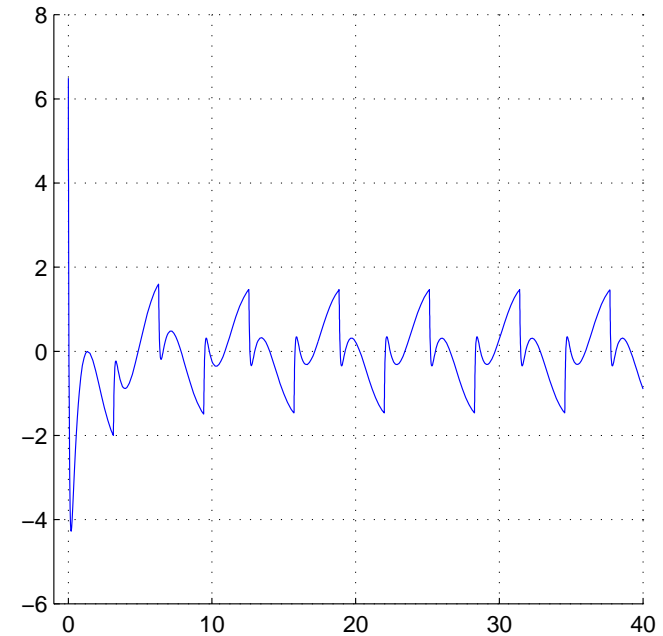
Однако при этом след минимального ограничивающего эллипсоида окажется равным 5.4777, что примерно в **6 раз хуже, чем исходный результат.**

## Пример: Двухмассовая система

На Рис. 2 изображен ограничивающий эллипс выхода, а также траектории системы и управление для начального состояния вне эллипсоида и возмущения  $w(t) = \text{sign}(\sin(t))$ .



a)



b)

Рис. 2: Ограничивающий эллипс выхода и управление для возмущения  $w(t) = \text{sign}(\sin(t))$

## Задача слежения для состояния системы

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ z &= x - f,\end{aligned}\tag{17}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  - фазовое состояние системы,  $u \in \mathbb{R}^p$  - управление,  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  - выход системы.

Система (17) представима относительно нового вектора состояния  $z$  в матричной форме:

$$\dot{z} = Az + Bu + \underbrace{(A + D, -I)}_{D_1} g\tag{18}$$

Будем искать регулятор в виде

$$u = K_1 z + K_2 g,\tag{19}$$

где  $K_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n)}$ .

Система (18) замкнутая регулятором (19) имеет вид,

$$\dot{z} = \underbrace{(BK_1 + A)}_{A_c} z + \underbrace{(D_1 + BK_2)}_{D_c} g,$$

с выходом  $z$ .

### Теорема 3

Решение  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{K}_2$  задачи минимизации

$$\text{tr } P \rightarrow \min \quad (20)$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + BY + Y^T B^T + \alpha P & D_1 + BK_2 \\ (D_1 + BK_2)^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным

$$P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Y \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

и числовому параметру  $\alpha > 0$ , определяет матрицу  $\hat{P}$  ограничивающего эллипсоида для выхода системы (12) и статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \hat{P}^{-1} & \hat{K}_2 \end{pmatrix},$$

подавляющий внешние возмущения.

## Лемма 1

Выполнение ограничения

$$\|u(t)\| \leq \mu \quad \forall t \geq 0 \quad (21)$$

для системы (10) и регулятора (19) гарантируется выполнением условий

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu_1^2 I \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} (\mu - \mu_1)I & K_2^T \\ K_2 & I \end{pmatrix} \geq 0,$$

## Дооптимизация

Поскольку регулятор ищется в виде (19), важен вопрос выбора  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Зафиксируем некоторое  $\mu_0$  (общее ограничение на управление). Меняя  $\mu_1$  от нуля до  $\mu_0$  определим согласно теореме 3 ограничивающий эллипс выхода и оптимальный регулятор и построим график зависимости следа результирующего эллипсоида от  $\mu_1$ .

После этого исследуем зависимость следа ограничивающего эллипсоида при «усеченном» регуляторе (без учета задающей функции, полагая  $K_2 = 0$ ) от  $\mu_1$ . Для этого определим функцию  $\phi_1(\mu_1)$  равную отношению следа ограничивающего эллипса при полном и при усеченном регуляторе. При этом общее ограничение на управление будет различным, однако ограничения по компоненте  $K_1$  одинаковы.

Наконец, исследуем зависимость следа ограничивающего эллипсоида при «усеченном» регуляторе и «полном» регуляторе при одинаковым совокупном ограничении на управление (то есть, ограничение по компоненте  $K_1$  будет равно  $\mu_0$ ). Для этого определим функцию  $\phi_2(\mu_1)$  равную отношению следа ограничивающего эллипса при "полном" и при "усеченном" регуляторе.

Данная процедура будет называться дооптимизацией.



### Пример: двухмассовая система

Продemonстрируем эффективность метода на примере двухмассовой системы (двухмассовая система рассмотрена выше)

Для рассматриваемой системы имеем при  $\mu_1 = \mu_2 = 10$  имеем

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 12.2578 & -5.6654 & 4.5108 & -8.9643 \\ -5.6654 & 24.4653 & 5.8668 & -1.5913 \\ 4.5108 & 5.8668 & 9.4536 & -4.7022 \\ -8.9643 & -1.5913 & -4.7022 & 8.1717 \end{pmatrix},$$

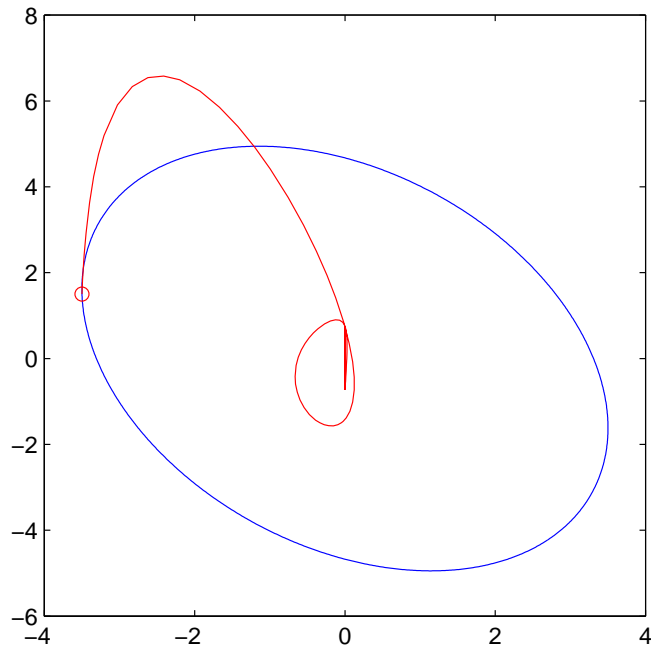
$$\hat{K}_1^T = \begin{pmatrix} -24.9776 \\ -10.1119 \\ 5.0439 \\ -24.4627 \end{pmatrix}, \hat{K}_2^T = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ -1.4758 \\ 1.4444 \\ 0.4979 \\ 2.4760 \\ 1.0002 \\ -0.4979 \\ 2.4446 \end{pmatrix},$$

значение ограничивающего эллипса следа равно 54.3485.

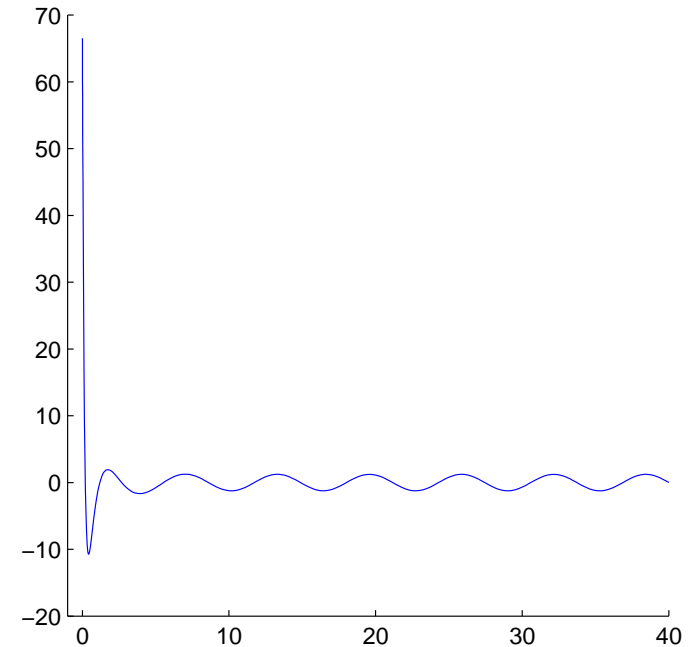
### Пример: двухмассовая система

На рис. 3 изображен ограничивающий эллипс выхода, а также траектория системы и график управления для начального состояния вне инвариантного эллипсоида для

$$f(t)^T = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \sin(t) & 0 & \sin(t) \end{pmatrix}. \quad (22)$$



a)

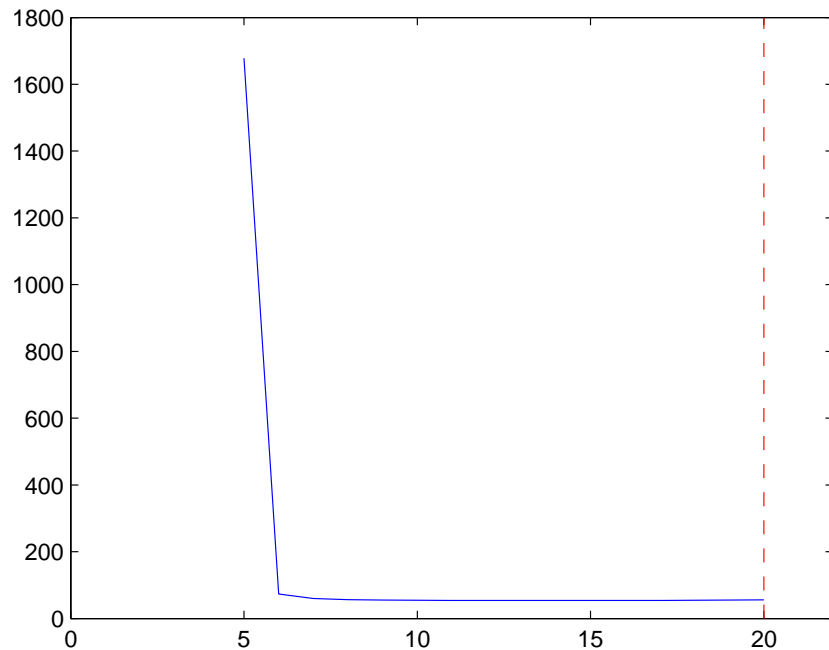


b)

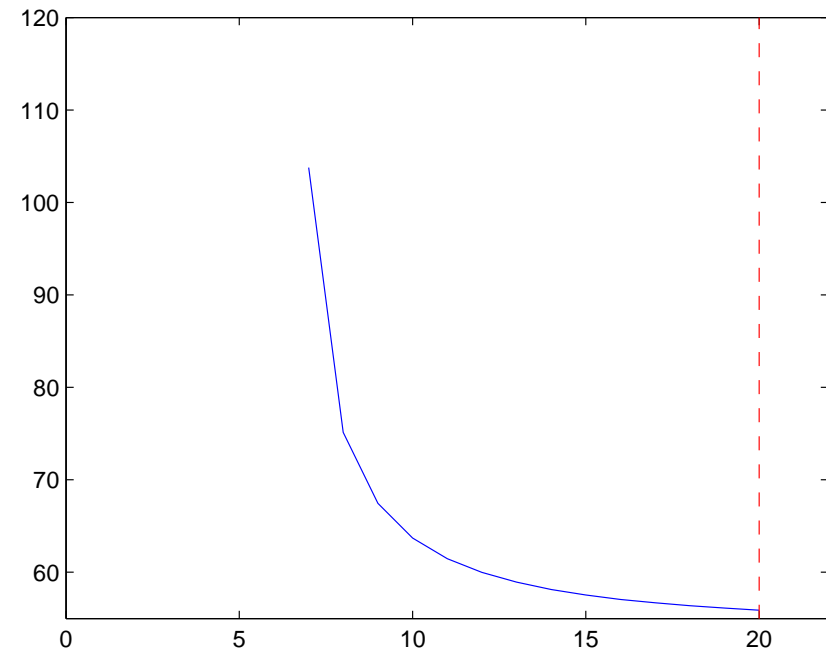
Рис. 3: Ограничивающий эллипс выхода и управление

## Пример: двухмассовая система

Исследуем зависимость оптимального следа от значений  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . На рис. 4 изображена зависимость следа матрицы ограничивающего эллипса при изменении  $\mu_1$  от нуля до  $\mu_0 = 20$  как для «полного», так и для «усеченного» регулятора.



а)

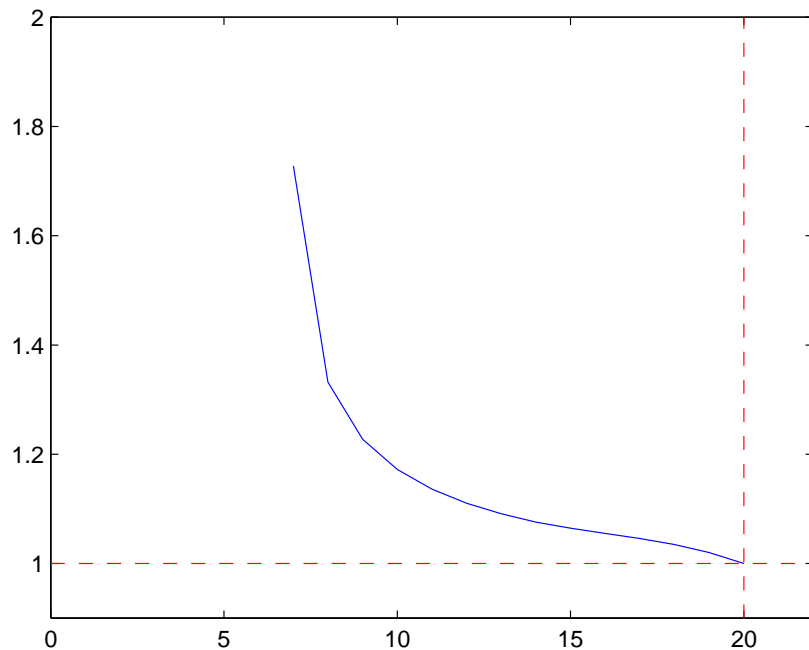


б)

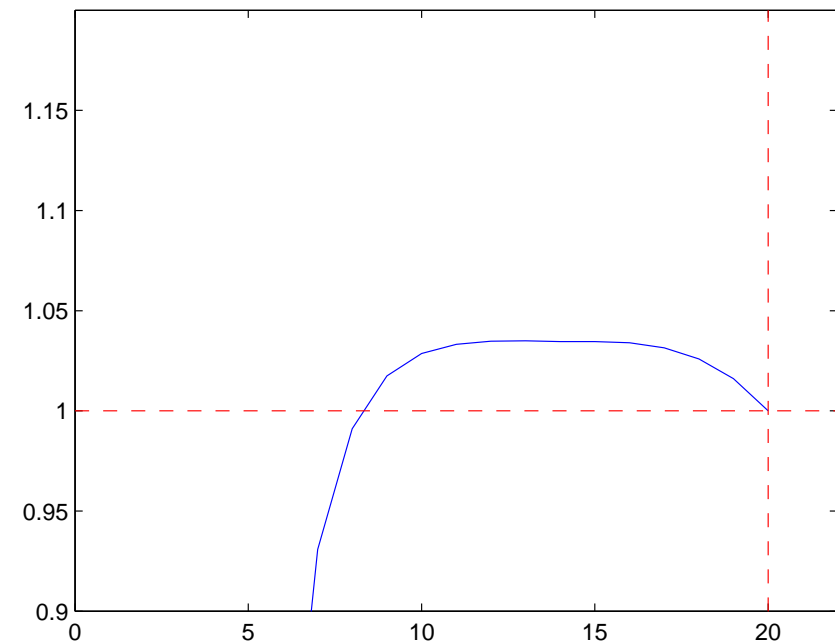
Рис. 4: Зависимость следа матрицы ограничивающего эллипса

### Пример: двухмассовая система

На рис. 5а изображен график функции  $\phi_1(\mu_1)$  - отношение следов матрицы ограничивающего эллипса, полученных без учета компоненты  $K_2$  регулятора, и с учетом  $K_2$  (при равенстве ограничений на компоненту  $K_1$ ). На рис. 5б изображен график функции  $\phi_2(\mu_1)$  - отношение следов матрицы ограничивающего эллипса, полученных без учета компоненты  $K_2$  регулятора, и с учетом  $K_2$  (при равенстве совокупных ограничений на управление).



(a)



(b)

Рис. 5: Графики функций  $\phi_1$  и  $\phi_2$

## Заключение

- В работе предложен простой и универсальный подход к решению задачи слежения. Этот подход основан на методе инвариантных эллипсоидов.
- Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволяет переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести поиск оптимального ограничивающего эллипсоида к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации, легко решаемых численно.
- Эффективность метода продемонстрирована на примере двухмассовой системы.
- В дальнейшем авторы предполагают получить различные обобщения изложенных результатов, в частности - на системы в дискретном времени; на разнообразные робастные постановки задач (когда в матрицах системы содержится неопределенность), а также на иные постановки задачи слежения. Предложенный подход представляется весьма перспективным и многообещающим.

*Спасибо за внимание!*