ОБОБЩЕННОЕ H_∞-УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО ДИСКРЕТНЫМ ПО ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯМ

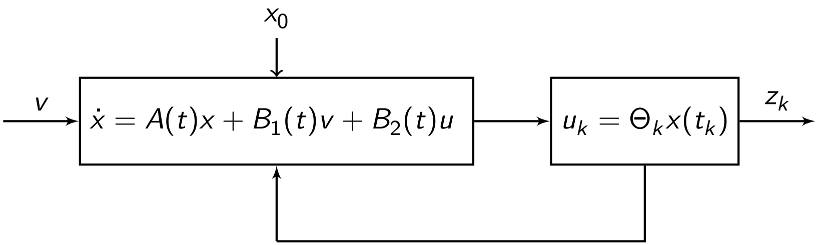
Руслан Бирюков

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

VI Традиционная Молодежная Школа
«Управление, информация и оптимизация»,
Григорчиково, 22-29 июня 2014

В работе рассматривается минимаксный подход к синтезу управления линейным нестационарным непрерывным объектом с целевым выходом, измеряемым в дискретные моменты времени, в случае, когда ни начальное состояние, ни внешнее возмущение точно не известны. Цель управления состоит в минимизации уровня гашения возмущений — показателя совместного влияния начального и внешнего возмущений на целевой выход и терминальное состояние в наихудшем случае. Закон управления, соответствующий поставленной цели, называется обобщенным H_∞-оптимальным законом управления.

Постановка задачи



1. Внешнее возмущение:

$$v \in PC\left([0, T], \mathbb{R}^{n_v}\right), \quad \|v\|_{L_2} < \infty$$

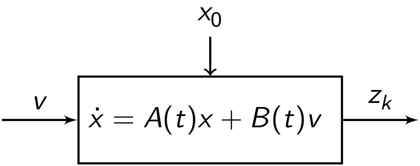
2. Фиксированные моменты времени:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$$

3. Целевой выход:

$$z_k = C_k x(t_k) + D_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Непрерывно-дискретный объект



1. Внешнее возмущение:

$$v \in PC\left([0, T], \mathbb{R}^{n_v}\right), \quad \|v\|_{L_2} < \infty$$

2. Фиксированные моменты времени:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$$

3. Целевой выход:

$$z_k = C_k x(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Обобщенный уровень гашения возмущений γ_c

Положим

$$\|v\|_{L_2}^2 = \int\limits_0^T |v|^2 dt, \qquad \|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2,$$

тогда

$$\gamma_c = \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^\top R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^\top S x_N}{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^\top R x_0}, \tag{1}$$

где $S^\top = S \succ 0$ и $R^\top = R \succ 0$ — весовые матрицы.

Обобщенный уровень гашения возмущений и дифференциальное уравнение Риккати

Теорема. Уровень гашения возмущений γ_c в объекте будет меньше заданного числа $\gamma > 0$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная справа симметрическая неотрицательно определенная матричная функция $X : [t_0, t_N] \to \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, удовлетворяющая условиям:

$$X(t_N) = S, \tag{2a}$$

$$\dot{X}(t) + A^\top(t)X(t) + X(t)A(t) + \gamma^{-1}X(t)B(t)B^\top(t)X(t) = 0, \tag{2b}$$

$$X(t_k - 0) = X(t_k) + C_k^\top C_k, \quad k = 1, \ldots, N-1, \tag{2c}$$

$$X(t_0) + C_0^\top C_0 \preccurlyeq \gamma R. \tag{2d}$$

Наихудшие внешнее и начальное возмущения

Теорема. Уровень гашения возмущений

$$\gamma_c = \lambda_{\max}(R^{-1}(X(t_0) + C_0^\top C_0)) \tag{3}$$

достигается при наихудших внешнем и начальном возмущениях

$$v^*(t) = \gamma_c^{-1} B^\top(t) X(t) x(t), \qquad x_0^* = \alpha e, \tag{4}$$

где

$$\alpha^{-2} = e^\top \left[R + \gamma_c^{-2} \int_{t_0}^{t_N} \Phi^\top(\tau, t_0) X(\tau) B(\tau) B^\top(\tau) X(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \right] e,$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ и e — максимальное собственное число и соответствующий нормированный собственный вектор, $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений замкнутой системы

$$\dot{x} = \left\{ A(t) + \gamma_c^{-1} B(t) B^\top(t) X(t) \right\} x, \quad x(0) = x_0^*.$$

Дискретизация непрерывного объекта

Пусть $\Phi(t,s)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

тогда:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} B_{k+1}(s) v_{k+1}(s) ds, \\ z_k &= C_k x_k, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$A_k = \Phi(t_{k+1}, t_k), \quad B_{k+1}(t) = \Phi(t_{k+1}, t)B(t), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Обобщенный уровень гашения возмущений γ_d

Положим

$$\|v\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |v_{k+1}|^2 dt, \qquad \|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2,$$

тогда

$$\gamma_d = \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^\top R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{l_2}^2 + x_N^\top S x_N}{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^\top R x_0}, \tag{6}$$

где $S^\top = S \succ 0$ и $R^\top = R \succ 0$ — весовые матрицы.

Обобщенный уровень гашения возмущений и разностные матричные уравнения Риккати

Теорема. Для того, чтобы уровень гашения возмущений γ_d был меньше заданного числа $\gamma > 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали матрицы $X_k = X_k^\top \succcurlyeq 0$, $k = 0, \ldots, N$, удовлетворяющие условиям:

$$X_N = S,$$

$$\widetilde{B}_k^\top X_k \widetilde{B}_k - \gamma I \prec 0,$$

$$X_{k-1} = C_{k-1}^\top C_{k-1} + A_{k-1}^\top \left(I - X_k \widetilde{B}_k (\widetilde{B}_k^\top X_k \widetilde{B}_k - \gamma I)^{-1} \widetilde{B}_k^\top \right) X_k A_{k-1},$$

$$X_0 \preccurlyeq \gamma R,$$

где

$$\Psi_k = \widetilde{B}_k \widetilde{B}_k^\top = \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_k(s) B_k^\top(s) ds, \quad k = N, \ldots, 1.$$

Наихудшие внешнее и начальное возмущения

Теорема. Уровень гашения возмущений

$$\gamma_d = \lambda_{\max}(R^{-1}X_0) \tag{7}$$

достигается при наихудших внешних возмущениях

$$v_k^*(t) = B_k^\top(t)(\gamma_d I - X_k\Psi_k)^{-1}X_k A_{k-1}x_{k-1}, \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \tag{8}$$

и наихудшем начальном состоянии

$$x_0^* = e_{\max}(R^{-1}X_0), \tag{9}$$

где через $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $e_{\max}(\cdot)$ обозначены максимальное собственное число и соответствующий ему собственный вектор.

Обобщенный уровень гашения возмущений и линейные матричные неравенства

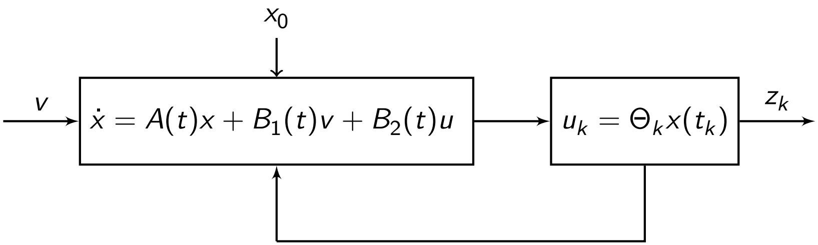
Теорема. Уровень гашения возмущений удовлетворяет неравенству $\gamma_d \leqslant \gamma$ тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} A_{k-1}^{\top} X_k A_{k-1} - X_{k-1} & A_{k-1}^{\top} X_k \widetilde{B}_k & C_{k-1}^{\top} \\ \widetilde{B}_k^{\top} X_k A_{k-1} & \widetilde{B}_k^{\top} X_k \widetilde{B}_k - \gamma I & 0 \\ C_{k-1} & 0 & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{10a}$$

$$X_N = S, \qquad X_0 \preccurlyeq \gamma R, \tag{10b}$$

разрешимы относительно матриц $X_k^{\top} = X_k \succcurlyeq 0$, $k = 0, \ldots, N-1$. При этом величина γ_d находится как минимальное значение γ, для которого неравенства (10) разрешимы.

Обобщенное H_∞-управление



1. Внешнее возмущение:

$$v \in PC\left([0, T], \mathbb{R}^{n_v}\right), \quad \|v\|_{L_2} < \infty$$

2. Фиксированные моменты времени:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$$

3. Целевой выход:

$$z_k = C_k x(t_k) + D_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Задача обобщенного H_∞-управления

Определить матрицы нестационарной обратной связи Θ_k так, чтобы уровень гашения возмущений γ_c замкнутой системы будет меньше заданного γ.

Уравнение замкнутой системы

Пусть $\Phi(t,s)$ — фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = A(t)x$, тогда:

$$x_{k+1} = (A_k + \widetilde{B}_{2,k}\Theta_k)x_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},t)B_1(s)v_{k+1}(s)ds,$$

$$z_k = (C_k + D_k\Theta_k)x_k,$$

где

$$A_k = \Phi(t_{k+1},t_k), \qquad \widetilde{B}_{2,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},s)B_2(s)ds,$$

Определим матрицу $\widetilde{B}_{1,k}$ следующим образом:

$$\widetilde{B}_{1,k+1}\widetilde{B}_{1,k+1}^{\top} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},s)B_1(s)B_1^{\top}(s)\Phi^{\top}(t_{k+1},s)ds.$$

Синтез обобщенного H_∞-управления

Теорема. Обобщенное H_∞-управление по состоянию на конечном интервале времени для непрерывно-дискретного объекта существует тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -Y_{k+1} & A_k Y_k + \widetilde{B}_{2,k+1} Z_{k+1} & \widetilde{B}_{1,k+1} & 0 \\ \star & -Y_k & 0 & Y_k C_{k+1}^\top + Z_{k+1}^\top D_{k+1}^\top \\ \star & \star & -\gamma I & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Y_0 & I \\ \star & \gamma R \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где $Y_N = S^{-1}$, разрешимы относительно матриц $Y_k^\top = Y_k \succ 0$, Z_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, при этом $\Theta_{k+1} = Z_{k+1} Y_k^{-1}$.

Пример

$$\dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5.0$$
$$z_k = Cx(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 30.66 & 0.00 & 0.00 & 20.27 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ -1.63 & 0.00 & 0.00 & -7.56 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -1.16 \\ 0.00 \\ 0.43 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -24.10 \\ 0.00 \\ 8.99 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 37.57 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 10.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -4.50 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $t_{k+1} - t_k = 0.1$.

Пример

1. Случай кусочно-постоянного возмущения:

$$\gamma_w = \inf_{\Theta_k} \sup_{\|v\|^2_{l_2} + x_0^\top R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2_{l_2} + x_N^\top S x_N}{\|v\|^2_{l_2} + x_0^\top R x_0} \approx 3730.1173$$

Оптимальное решение достигается при $(\widehat{x}_0, \widehat{v}_k, \widehat{\Theta}_k)$

2. Случай кусочно-непрерывного возмущения:

$$\gamma_c = \inf_{\Theta_k} \sup_{\|v\|^2_{L_2} + x_0^\top R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2_{l_2} + x_N^\top S x_N}{\|v\|^2_{L_2} + x_0^\top R x_0} \approx 4016.8386$$

Оптимальное решение достигается при $(x_0^*, v_k^*, \Theta_k^*)$

3.

$$\gamma_c(\widehat{\Theta}_k) = \sup_{\|v\|^2_{L_2} + x_0^\top R x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2_{l_2} + x_N^\top S x_N}{\|v\|^2_{L_2} + x_0^\top R x_0} \approx 4263.3825$$

Оптимальное решение достигается при (x_0^{**}, v_k^{**})

Пример

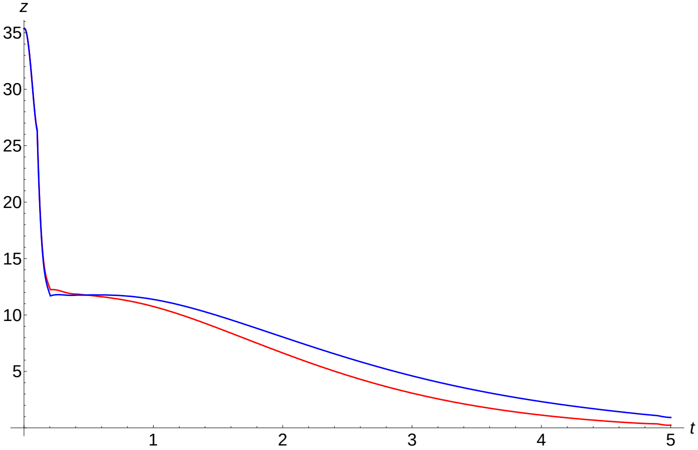


График $\|z(t)\|$: красный цвет — при (v_k^*, Θ_k^*); синий цвет — при $(v_k^{**}, \widehat{\Theta}_k)$

Литература

1. P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal, and K. R. Poolla, "H_∞ control with transients", SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 29, no. 6, pp. 1373–1393, 1991.
2. W. Sun, K. M. Nagpal, and P. P. Khargonekar,"H_∞ Control and Filtering of Sampled-Data Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, pp. 1162-1175, 1993.
3. H. T. Toivonen, M. F. Sågfors, "The Sampled-Data H_∞ Problem: A Unified Framework for Discretization Based Methods and Riccati Equation Solution", Int. J. Cont., 66, pp. 289–309, 1997.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 20–38.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.

Спасибо за внимание!