Доклад

«Построение оптимального позиционного управления в задаче быстродействия линейной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости»

Ибрагимов Д.Н

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2014

1. Постановка задачи

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + bu(i) \\ |u(i)| &\leqslant 1, \quad i = 0, 1 \ldots . \end{aligned} \tag{1}$$

$x(i) \in \mathbb{R}^n$, $u(i) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
Начальное положение $x(0) = x$ считается заданным.

$$x \in \mathcal{X}(N) \;\Leftrightarrow\; \exists \{u(0), \ldots, u(N-1)\} \in [-1; 1]^N :$$

$$0 = x(N) = A^N x + A^{N-1} bu(0) + \ldots + bu(N-1). \tag{2}$$

2. Стандартные методы решения задачи

$$\begin{aligned} &H(x(k), \psi(k+1), u(k)) = \psi^T(k+1)(Ax(k) + bu(k)), \\ &\psi^T(k+1) = \psi^T(k)A^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\min_{u \in [-1;1]} \psi^T(k+1)(Ax(k) + bu(k)). \tag{4}$$

$$\psi^T(k+1)bu^*(k) = \min_{u \in [-1;1]} \psi(k+1)bu,$$

$$u^*(k) = -\operatorname{sign} \psi^T(k+1)b.$$

[Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optimization Theory and Applications, 1988, Vol. 56, no.1, pp.67-88.]

3. Принцип максимума

$$x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1), \quad u(k) \in [-1;1],$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0. \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathfrak{X}(k) = \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{n-k} \times \underbrace{[-1;1] \times \ldots \times [-1;1]}_{n}.$$

$$x(0) = (\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2})^T \in \mathfrak{X}(n) \subset \mathbb{R}^n$$

$$u^*(k) = -\frac{1}{2}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

$$u_1(k) = u_2(k) = -\frac{1}{2} \neq \pm 1, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

4. Свойства множеств 0-управляемости

1) $\mathcal{X}(N) = \sum\limits_{i=1}^{N} \operatorname{conv}\{A^{-i}b; -A^{-i}b\}, \quad \mathcal{X}(0) = \{0\}.$

2) $\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}(N-1) + \operatorname{conv}\{A^{-N}b; -A^{-N}b\}.$

3) $\exists\{v^1, \ldots, v^M\} \subset \mathbb{R}^n \colon \mathcal{X}(N) = \operatorname{conv}\{v^1, \ldots, v^M\}.$

4) $\mathcal{X}(N) = \bigcap\limits_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k(N),$

$$\mathcal{C}_k(N) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |(x, n_k)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |(A^{-i}b, n_k)|\}.$$

5) $x \in \mathcal{X}(N) \;\Rightarrow\; -x \in \mathcal{X}(N).$

6) $\overline{\mathcal{X}(N)} = \mathcal{X}(N).$

5. Алгебраическая сумма многогранника и отрезка

$$\operatorname{Ext}\mathcal{X}(N) = \mathcal{V} = \{v^1, \dots, v^M\},$$
$$\mathcal{W} = \{v^1 - x^{(N+1)}, \dots, v^M - x^{(N+1)}, v^1 + x^{(N+1)}, \dots, v^M + x^{(N+1)}\}.$$

$$\mu(x, \operatorname{conv}\{w^1, \dots, w^m\}) = \alpha^* = \min\alpha$$
$$x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i w^i, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \alpha, \quad 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha, \quad i = \overline{1, m} \tag{5}$$

Теорема 1

$$\mathcal{X}(N+1) = \operatorname{conv}\mathcal{W} = \operatorname{conv}\mathcal{V} + \operatorname{conv}\{x^{(N+1)}; -x^{(N+1)}\}.$$

Теорема 2

$$\forall x \in \mathcal{W} \quad x \in \operatorname{Ext}\mathcal{X}(N+1) \;\Leftrightarrow\; \mu(x, \operatorname{conv}\{\mathcal{W} \setminus \{x\}\}) > 1.$$

6. Минимальное число шагов для достижения 0

Теорема 3

Минимальное число шагов N_{min}, которое необходимо, чтобы перевести систему из состояния $x \neq 0$ в 0, определяется следующими соотношениями:

$$N_{min} = \arg\min_{N \in \mathbb{N}} \{N : x \in \mathcal{X}(N)\} \iff \begin{cases} \mu(x, \mathcal{X}(N_{min})) \leqslant 1, \\ \mu(x, \mathcal{X}(N_{min} - 1)) > 1. \end{cases}$$

Если $x = 0$, то $N_{min} = 0$.

$$\mu(x, \mathcal{X}(N)) = \min_{\beta, \alpha} \alpha$$

$$x = \sum_{i=1}^{M} \beta_i v^i, \qquad \sum_{i=1}^{M} \beta_i = \alpha,$$

$$0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha, \qquad i = \overline{1, M}.$$

7. Структура оптимального позиционного управления

$$S_k(x) = \arg\min_{|u|\leqslant 1} \mu(x + bu, \mathcal{X}(k)). \tag{6}$$

$$\begin{cases} S_k(x) = \alpha^* = \min \alpha \\ x + bu = \sum_{i=1}^{M} \beta_i v^i \\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha, \ \ i = \overline{1, M} \\ \sum_{i=1}^{M} \beta_i = \alpha, \\ -1 \leqslant u \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

8. Оптимальное позиционное управление

Теорема 4

Пусть зафиксирована некоторая точка $x \in \mathbb{R}^n$ *такая, что* $x \in \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min}-1)$, *траектория* $\{x(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$, *определяется рекуррентным соотношением*

$$x(k) = Ax(k-1) + bS_{N_{min}-k}(Ax(k-1)),\ k = \overline{1, N_{min}}, \quad x(0) = x.$$

Тогда
1) $x(N_{min}) = 0$.
2) Управление $u^*(x(k-1)) = S_{N_{min}-k}(Ax(k-1))$ *является оптимальным позиционным управлением в рассматриваемой задаче быстродействия.*

9. Экспериментальная модель

$$\begin{cases} J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm\frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V^2), \\ \dot{\alpha} = \omega, \\ V = |\omega R|, \end{cases} \qquad (8)$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.24 \end{pmatrix} u(k),$$
$$x(k+1) = \big(\alpha(k+1), \omega(k+1)\big)^T, \quad |u(k)| \leqslant 1, \ k \in \mathbb{N}. \qquad (9)$$

[Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С, Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей//Известия РАН. Теория и системы управления, 2011, No1, сс. 107-119.]

10. Построение оптимальной траектории

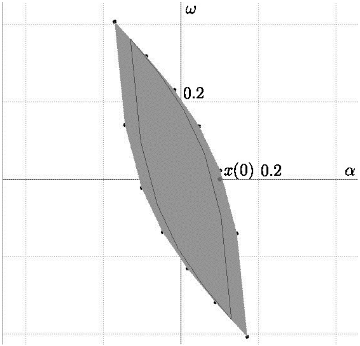

Рис. 1. Множество 0-управляемости для $x(0)$

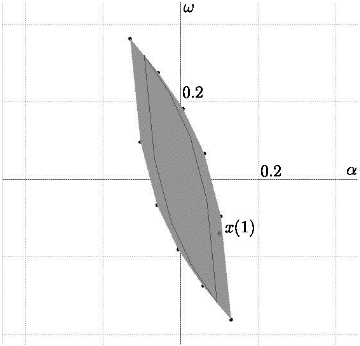

Рис. 2. Множество 0-управляемости для $x(1)$

11. Построение оптимальной траектории

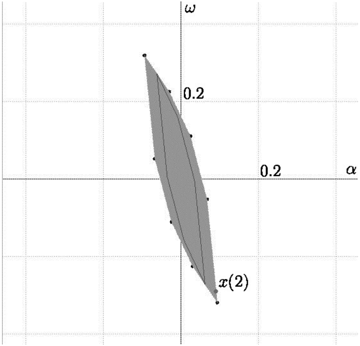

Рис. 3. Множество 0-управляемости для $x(2)$

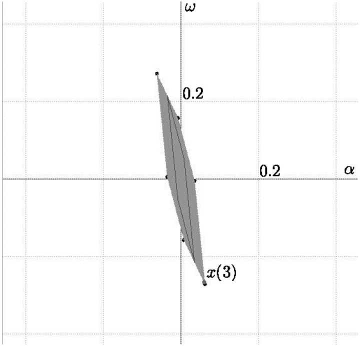

Рис. 4. Множество 0-управляемости для $x(3)$

12. Построение оптимальной траектории

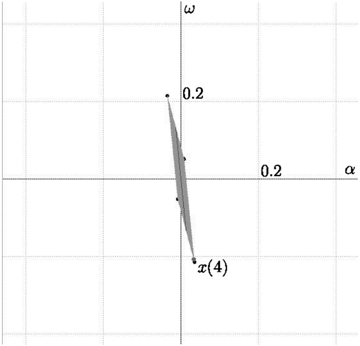

Рис. 5. Множество 0-управляемости для $x(4)$

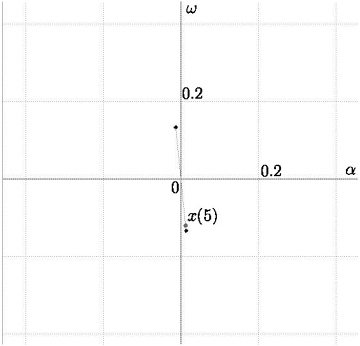

Рис. 6. Множество 0-управляемости для $x(5)$

13. Оптимальная траектория

k	$u^*(k)$	$\alpha(k)$	$\omega(k)$	N_{min}
0	-1.0	0.1	0	
1	-0.53	0.1	0.14	
2	0.81	0.09	-0.29	
3	1.0	0.06	-0.27	
4	0.99	0.03	-0.21	
5	0.9	0.01	-0.12	
6	–	0	0	6

14. Основные результаты

1. Разработаны алгоритмы построения множеств 0-управляемости за произвольное число шагов в виде многогранников
2. На основе описания множеств 0-управляемости разработаны алгоритмы вычисления оптимального позиционного управления в задаче быстродействия