

Достижение консенсуса в мультиагентной сети для нескольких классов заданий

Юрий Иванский

27 июня 2014

- Каждой дуге $(j, i) \in E$ поставлен в соответствие вес $a^{ij} > 0$.
 $A = [a^{ij}]$ — матрица смежности графа $\mathcal{G}_A = (N, E)$.
- **Полустепень захода** узла i — сумма i -й строки матрицы A :
 $d^i = \sum_{j=1}^n a^{ij}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа \mathcal{G}_A ;
- $D(A) = \text{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ — **Лапласиан** графа \mathcal{G}_A .
- **Направленный путь** из i_1 в i_s — это последовательность узлов i_1, \dots, i_s , $s \geq 2$ такая, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.
- Орграф называется **сильно связным**, если из любого узла графа существует направленный путь в любой другой его узел.
- **Направленное дерево** — это орграф, в котором каждый узел i , кроме корня, имеет ровно один родительский узел j такой, что $(j, i) \in E$. Говорят, что орграф G содержит **остовное дерево**, если направленное дерево является подграфом G .

Постановка задачи (1)

- Пусть распределенная система образована n агентами (процессорами, машинами, и т.п.), на которые поступают задания m различных классов, которые должны быть выполнены системой.
- Агенты выполняют задания параллельно. Задания могут быть перераспределены среди агентов. Задания поступили в систему в различные дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots, T$ на разных агентов.
- Агенты общаются друг с другом согласно орграфу (N, E) , где E — множество дуг.
- Структура динамической сети (сетевой топологии) задается последовательностью направленных графов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется со временем.

Постановка задачи (2)

В каждый момент времени t состояние каждого агента $i \in N$ характеризуется следующими параметрами:

- длиной очереди заданий k -го класса $q_t^{i,k}$, $k = 1 \dots m$ на агенте i в момент времени t ;
- производительностью p^i агента i .

Будем считать, что динамическая модель поведения системы задается следующими уравнениями:

$$\mathbf{q}_{t+1}^i = \mathbf{q}_t^i - \mathbf{p}_t^i + \mathbf{z}_t^i + \mathbf{u}_t^i, \quad i \in N, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (1)$$

Приоритеты на классах заданий

Каждый агент выбирает класс заданий для исполнения следующим образом:

$$p_t^{i,k} = \begin{cases} \frac{P_k}{\sum_{q_t^{i,l} > 0} P_l} p^i, & \text{if } q_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь P_k — это шансы выбора задания класса k на исполнение.

$$\tilde{p}_t^{i,k} = \begin{cases} \frac{P_k}{\sum_{q_t^{i,l} > 0} P_l}, & \text{if } q_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Если мы примем

$$x_t^{i,k} = \begin{cases} q_t^{i,k} / p_t^{i,k}, & \text{if } p_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

за состояние агента i динамической сети в момент времени $t = 0, 1, \dots, T$, то цель достижения консенсуса в сети будет соответствовать оптимальному перераспределению заданий между агентами.

Предположим, что при формировании управляющей стратегии u_t^i каждый агент $i \in N$ обладает данными о своем собственном состоянии и, если множество N_t^i не пусто, зашумленными данными о состоянии своих соседей, которые, возможно, поступают с задержками:

$$\mathbf{y}_t^{i,j} = \mathbf{x}_{t-s_t^{i,j}}^j + \mathbf{w}_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i, \quad (3)$$

где $\mathbf{w}_t^{i,j}$ — помехи, $0 \leq s_t^{i,j} \leq \bar{s}$ — целочисленные задержки и \bar{s} — максимально возможная задержка.

Протокол перераспределения заданий (1)

Рассмотрим протокол локального голосования:

$$u_t^{i,k} = \gamma \tilde{p}_t^{i,k} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j,k} - x_t^{i,k}), \quad (4)$$

где $\gamma > 0$ — это величина шага протокола управления, $\forall j \in \bar{N}_t^i$
 $\bar{N}_t^i \subset N_t^i$, $b^{i,j} > 0$. Положим $b_t^{i,j} = 0$ для других пар (i, j) . Матрица протокола управления обозначается как $B_t = [b_t^{i,j}]$.

Протокол перераспределения заданий (2)

Динамика системы с обратной связью, функционирующей согласно протоколу (4) имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}_{t+1}^i = \mathbf{x}_t^i - \tilde{\mathbf{r}}_t^i + \tilde{\mathbf{z}}_t^i + \gamma \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (\mathbf{y}_t^{i,j} - \mathbf{x}_t^i) =$$

$$\mathbf{x}_t^i - \tilde{\mathbf{r}}_t^i + \tilde{\mathbf{z}}_t^i + \gamma \left(\sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} \mathbf{x}_t^j \right) - \gamma d^i(B_t) \mathbf{x}_t^i + \gamma \tilde{\mathbf{w}}_t^i, \quad i \in N, \quad (5)$$

где векторы $\tilde{\mathbf{r}}_t^i = [\tilde{r}_t^{i,k}]$ and $\tilde{\mathbf{z}}_t^i = [\tilde{z}_t^{i,k}]$ состоят из элементов

$$\tilde{r}_t^{i,k} = \begin{cases} p_t^{i,k} / \tilde{p}_t^{i,k}, & \text{if } \tilde{p}_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \tilde{z}_t^{i,k} = \begin{cases} z_t^{i,k} / \tilde{p}_t^{i,k}, & \text{if } \tilde{p}_t^{i,k} > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\text{и } \tilde{\mathbf{w}}_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} \mathbf{w}_t^{i,j}.$$

Протокол перераспределения заданий (3)

Перепишем. (5) в более компактной форме. Образует nk -мерные векторы \mathbf{X}_t , \mathbf{R}_t , \mathbf{Z}_t , \mathbf{Y}_t и \mathbf{W}_t конкатенацией соответствующих векторов $\tilde{\mathbf{x}}_t^i$, $\tilde{\mathbf{r}}_t^i$, $\tilde{\mathbf{z}}_t^i$, and $\tilde{\mathbf{w}}_t^i$. Динамика системы, действующей по протоколу (4) переписывается в виде

$$\bar{\mathbf{X}}_{t+1} = \bar{\mathbf{X}}_t - \gamma \mathcal{L}(\bar{\mathbf{B}}_t \otimes I_k) \bar{\mathbf{X}}_t + \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_t + \mathbf{Z}_t + \gamma \mathbf{W}_t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Предположения о стохастических свойствах (1)

- A1: а)** Для всех $i \in N$, $j \in N_t^i \cup \{i\}$, помехи наблюдений w_t^{ij} — центрированные независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие ограниченную дисперсию: $E(w_t^{ij})^2 \leq \sigma_w^2$.
- б)** Для всех $i \in N$, $j \in N_{max}^i$ появление случайного ребра (j, i) в графе \mathcal{L}_{A_t} является независимым случайным событием. (то есть матрицы A_t независимые одинаково распределенные случайные матрицы). Для всех $i \in N$, $j \in \bar{N}_t^i$ веса b_t^{ij} в протоколе управления — независимые случайные величины с матожиданиями: $E b_t^{ij} = b^{ij}$, и ограниченными дисперсиями: $E(b_t^{ij} - b^{ij})^2 \leq \sigma_b^2$.
- в)** Для всех $i \in N$, $j \in N^i$ существует конечная величина $\bar{s} \in \mathbb{N}$: $s_t^{ij} \leq \bar{s}$ с вероятностью 1, и целочисленные задержки d_t^{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $k = 0, \dots, \bar{s}$ с вероятностями p_k^{ij} .
- г)** Для всех $i \in N$, $t = 0, 1, \dots$ переменные являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с матожиданиями: $E z_t^i = \bar{z}$, и дисперсиями: $E(z_t^i - \bar{z})^2 = \sigma_z^2$.

Кроме того, все эти случайные величины независимы друг от друга.

Предположения о стохастических свойствах (2)

- Матрица A_{max} размера $\bar{n} \times \bar{n}$ образована следующим образом:

$$a_{max}^{i,j} = p_{j \div \bar{d}}^{i,j \bmod \bar{d}} b^{i,j \bmod \bar{d}}, \quad i \in N, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n}, \quad (7)$$

$$a_{max}^{i,j} = 0, \quad i = n + 1, n + 2, \dots, \bar{n}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n}.$$

Заметим, что в случае $\bar{d} = 0$ топология сети (определяемая матрицей A_{max} размера $n \times n$) имеет вид $a_{max}^{i,j} = b^{i,j}$, $i, j \in N$.

Пусть также следующее предположение выполнено для усредненной матрицы сетевой топологии:

A2: У графа $\mathcal{L}_{A_{max}}$ есть остовное дерево и для любого ребра $(j, i) \in E_{max}$ существует по крайней мере один ненулевой элемент среди элементов $a_{max}^{i,j}, a_{max}^{i,j+n}, \dots, a_{max}^{i,j+\bar{d}n}$ матрицы A_{max} .

A3: Для шага протокола управления $\gamma > 0$ выполнены следующие условия:

$$\gamma \leq \frac{1}{d_{\max}(A_{\max})} \quad (8)$$

и

$$\lambda_{\max}(Q)\gamma \leq \operatorname{Re}(\lambda_2(A_{\max})), \quad (9)$$

где $\operatorname{Re}(\lambda_2(A_{\max}))$ — это действительная часть второго по величине собственного числа матрицы A_{\max} , а $\lambda_{\max}(Q)$ — это наибольшее собственное число матрицы

$$Q = E(\mathcal{L}(A_{\max}) - \mathcal{L}(\bar{B}_t))(\mathcal{L}(A_{\max}) - \mathcal{L}(\bar{B}_t))^T$$

Определение

n агентов достигают асимптотического среднеквадратичного консенсуса, если $E\|x_0^i\|^2 < \infty$, $i \in N$, и существует последовательность $\{x_t^*\}$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|x_t^i - x_t^*\|^2 \leq \epsilon$ для всех $i \in N$.

Обозначим через x_0^* среднее значение по начальным данным.

$$x_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_0^i$$

а через $\{x_t^*\}$ — траекторию усредненной системы

$$x_{t+1}^* = x_t^* + \bar{z}, \quad (10)$$

где \bar{z} — среднее значение из предположения **A1 d**.

Теорема

Если выполнены условия **A1–A3** , то:

$$\mathbb{E} \|\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_t^*\|^2 \leq \frac{\Delta}{\gamma\delta} + (1 - \gamma\delta)^t \left(\|\bar{\mathbf{X}}_0 - \bar{\mathbf{X}}_0^*\|^2 - \frac{\Delta}{\gamma\delta} \right),$$

где

$$\Delta = 2m\sigma_w^2\gamma^2(n^2\sigma_b^2 + \|B_{av}\|^2) + n \sum_{k=1}^m (\sigma_{z,k}^2 + (1 - P_k)^2),$$

Для моделирования использовалась топология типа кольцо со случайно пропадающими связями между соседями и случайно появляющимися "диагональными" связями в кольце.

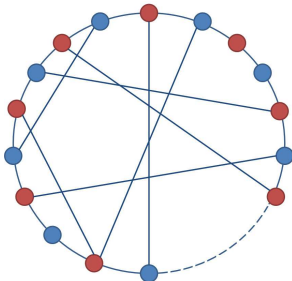


Рис.: Пример сетевой топологии

Результаты моделирования

- Рассмотрим сеть из 5 агентов. Число классов заданий равно 3.
- Предполагается, что среднее время между событиями во входном потоке имеет экспоненциальное распределение.
- Агент, к которому поступит задание, выбирается случайно, с использованием равномерного распределения.

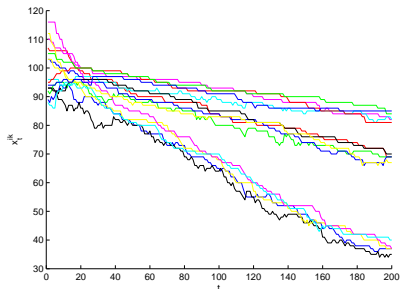


Рис.: длины очередей заданий трех классов на пяти агентах

Спасибо за внимание!

Результаты моделирования (2)

Рассмотрим случай, когда задания поступают в систему в различные моменты времени в интервале от 1 до 2000.

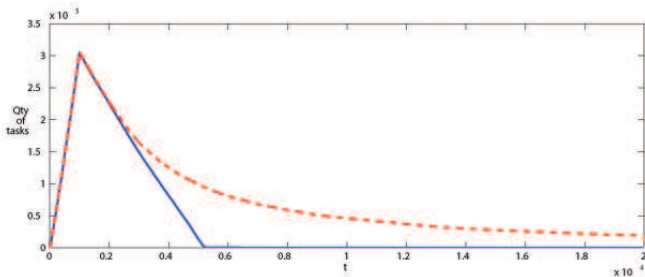


Рис. 2. Количество заданий в очереди

Результаты моделирования (3)

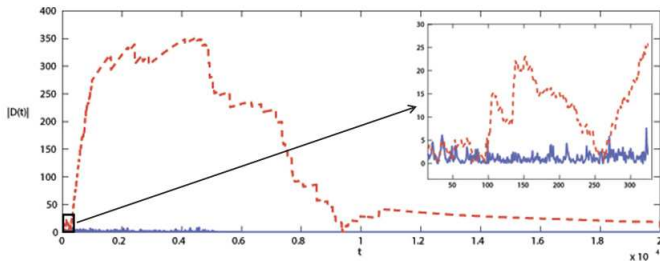


Рис. 3. Среднее отклонение от усредненной загрузки агентов в сети

Схема доказательства (1)

Рассмотрим векторы $\bar{\mathbf{x}}_t^* \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $t = 0, 1, \dots$, которые состоят из $\mathbf{x}_t^* \mathbf{1}_n, \mathbf{x}_{t-1}^* \mathbf{1}_n, \dots, \mathbf{x}_{t-\bar{d}}^* \mathbf{1}_n$ и удовлетворяют уравнению:

$$\bar{\mathbf{x}}_{t+1}^* = U \bar{\mathbf{x}}_t^* + \begin{pmatrix} \bar{f} \mathbf{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Согласно определению матриц $\bar{\mathcal{L}}_t$ для разностей траекторий систем (6) и (11), имеем

$$\begin{aligned} D_{t+1} &= \bar{\mathbf{x}}_{t+1} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}^* = U \bar{\mathbf{x}}_t - \gamma \mathcal{L}(\bar{B}_t) \bar{\mathbf{x}}_t + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &- U \bar{\mathbf{x}}_t^* - \begin{pmatrix} \bar{f} \mathbf{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} = D_t - \bar{\mathcal{L}}_t D_t + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t - \bar{f} \mathbf{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, добавляя и вычитая $\tilde{\mathcal{L}} D_t$, получаем

$$D_{t+1} = (I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}}) D_t + (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) D_t + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t - \bar{f} \mathbf{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Схема доказательства (2)

Пусть \mathcal{F}_t обозначает σ -алгебру всех вероятностных событий, порождаемых случайными элементами $A_0, \dots, A_t, x_0^i, w_0^{i,j}, w_1^{i,j}, \dots, w_{t-1}^{i,j}, f_0^i, f_1^i, \dots, f_{t-1}^i, b_0^{i,j}, b_1^{i,j}, \dots, b_t^{i,j}, d_0^{i,j}, d_1^{i,j}, \dots, d_t^{i,j}, i, j \in N$, Рассмотрим условное математическое ожидание квадрата нормы D_{t+1} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|D_{t+1}\|^2 &= \|(I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})D_t\|^2 + 2D_t^T (I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) D_t + \\ &+ 2D_t^T (I_{\bar{n}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T \begin{pmatrix} \gamma \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \mathbf{w}_t + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} (\mathbf{f}_t - \bar{f} \mathbf{1}_n) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ 2\gamma \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \mathbf{w}_t^T (\mathbf{f}_t - \bar{f} \mathbf{1}_n) + D_t^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) + \\ &+ \gamma^2 \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\mathbf{w}_t\|^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\mathbf{f}_t - \bar{f} \mathbf{1}_n\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Схема доказательства (3)

Используя свойства условного математического ожидания и обозначая за $\bar{\mathbf{b}}_t$ вектор, состоящий из компонентов

$\sum_{j \in N_t^1} (b_t^{1,j})^2, \dots, \sum_{j \in N_t^n} (b_t^{n,j})^2$ из (12) выводим

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|D_{t+1}\|^2 &= \|(I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})D_t\|^2 + 2D_t^T (I_{\bar{n}} - \tilde{\mathcal{L}})^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t)D_t + \\ &+ D_t^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t)^T (\tilde{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}_t) + 2\sigma_w^2 \gamma^2 \bar{\mathbf{b}}_t + n\sigma_f^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим за $\tilde{\mathcal{L}}_t$ σ -алгебру случайных событий, порожденную случайными элементами

$A_0, \dots, A_{t-1}, x_0^i, w_0^{i,j}, w_1^{i,j}, \dots, w_{t-1}^{i,j}, f_0^i, f_1^i, \dots, f_{t-1}^i, b_0^{i,j}, b_1^{i,j}, \dots, b_{t-1}^{i,j}, d_0^{i,j}, d_1^{i,j}, \dots, d_{t-1}^{i,j}, 1, j \in N$, которые были разыграны до момента времени t .

Рассмотрим условные матожидания обеих частей уравнения (13). Из стохастических свойств неопределенностей **A2b,c** и независимости \bar{B}_t и $\bar{\mathbf{b}}_t$ от σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_t$ получаем

$$E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|D_{t+1}\|^2 = (1 - \rho) \|D_t\|^2 + \Delta.$$

Схема доказательства (4)

Возьмем безусловное матожидание и получим:

$$E\|D_{t+1}\|^2 \leq (1 - \rho)E\|D_t\|^2 + \Delta,$$

Из леммы 1 во второй части [Амелина, Фрадков 2012] следует, что неравенство (11), которое является первой частью теоремы 1, выполняется.

Второй вывод об асимптотическом среднеквадратическом ϵ -консенсусе следует из неравенства (11) если $t \rightarrow \infty$. При выполнении предположения **A4** получаем что $|1 - \rho| < 1$, и, таким образом, вторая часть выражения (11) экспоненциально сходится к нулю.