



Шестая Традиционная Молодежная Школа



Кратность собственных чисел матрицы состояния автономной непрерывной линейной системы как причинный фактор появления выбросов траекторий по норме вектора состояния свободного движения

Акунов Т. А., Дударенко Н. А., Полинова Н. А., Ушаков А. В.

22 – 29 июня 2014

Случай вещественных собственных чисел

Рассмотрим линейную устойчивую непрерывную динамическую систему

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Fx(t), x(t)|_{t=0} = x(0),$$

Алгебраический спектр собственных чисел матрицы F

$$(2) \quad \sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\},$$

Зададим матрицу F канонической форме $(n \times n)$ -клетке Жордана $J(\alpha)$:

$$(3) \quad J(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}.$$

Матрица $J(\alpha)$ порождает автономную динамическую систему вида (1)

$$(4) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = J(\alpha)\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0),$$

где $x = S\tilde{x}$, $SJ(\alpha) = FS$. S – $(n \times n)$ –матрица неособого преобразования подобия, допускающая представление матрицы F в форме

$$F = SJ(\alpha)S^{-1}.$$

В свою очередь $J(\alpha)$ может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$(5) \quad J(\alpha) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + J(0) = \alpha I + J(0),$$

где $J(0)$ – нильпотентная матрица индекса $\nu = n$.

Теперь поставим задачу исследования свободного движения системы (4)

$$(6) \quad \tilde{x}(t) = \exp\{J(\alpha)t\}\tilde{x}(0).$$

Осуществим скаляризацию векторного процесса (6)

$$(7) \quad \|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\}\tilde{x}(0)\| \leq \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{J(0)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|.$$

$$(8) \quad \exp\{J(0)t\} = \exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} t\right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & (2)^{-1}t^2 & \dots & [(\mu-1)!]^{-1}t^{\mu-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & [(\mu-2)!]^{-1}t^{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(9) \quad \|\exp\{J(0)t\}\|_p = 1 + t + (1/2)t^2 + \dots + (1/(\mu-1)!)t^{\mu-1} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/k!)t^k, \quad (p = 1, 2, \infty).$$

Таким образом, норма матричной экспоненты $\|exp\{J(\alpha)t\}\|$ равна

$$(10) \quad exp\{J(\alpha)t\} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k.$$

$$(11) \quad \|\tilde{x}(t)\| = \|exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k.$$

Поставим задачу оценки знака скорости изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$ в момент $t = 0$

(12)

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{x}(t)\| = \left\langle \frac{d}{dt} \left\{ e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k \right\} \right\rangle_{t=0} = \left\langle \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!))t^k \right\rangle_{t=0} = \alpha + 1$$

Ситуация 1:

$$\alpha < 0, |\alpha| > 1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \Big|_{t=0} < 0, \|\tilde{x}(t)\| \leq e^{(\alpha+1)t} \|\tilde{x}(0)\|.$$

Ситуация 2:

$$\alpha = -1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \Big|_{t=0} = 0, \text{ но при } t > 0 \text{ в силу (12) устанавливается}$$

отрицательная скорость. $\|\tilde{x}(t)\| \leq \rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\|,$

$$(\rho, \gamma) = \arg \left\{ \min_{\rho, \gamma} \left\| \|\tilde{x}(t)\| - \rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\| \right\| \& \left(\frac{d}{dt} \left(\rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\| \right) \right) \Big|_{t=(\mu-1)} = -\frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)} \& \rho \geq 1 \right\}$$

Ситуация 3 (предмет исследований):

$$\alpha < 0, |\alpha| < 1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \Big|_{t=0} > 0.$$

Процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ на начальном отрезке времени расходится, достигая максимума в момент t_M , определяемый соотношениями

(13)

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ (1 + \alpha) \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/k!) t^k + \alpha (1/(\mu - 1)!) t^{(\mu-1)} = 0 \right\},$$

а далее сходится к нулю. Таким образом, процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ на траекториях свободного движения апериодической системы обнаруживает выброс, численно определяемый величиной $\alpha : (\alpha < 0, |\alpha| < 1)$ кратного собственного числа и значением μ его кратности.

Вернемся теперь к исходной системе (1) с матрицей состояния F , заданной в произвольном базисе, тогда решение системы можно записать в виде

$$(14) \quad x(t) = x(t, x(0)) = \exp\{Ft\}x(0) = S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0).$$

Осуществим скаляризацию векторного процесса (14)

$$(15) \quad \begin{aligned} \|x(t)\| &= \|S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0)\| \leq \|S\| \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \|S^{-1}\| \|x(0)\| = \\ &= c\{S\} e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k \|x(0)\|, \end{aligned}$$

где $c\{S\} = \|S\| \|S^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы S , $1 \leq c\{S\} < \infty$. Значения $\|x(t)\|$ будут в $c\{S\}$ раз превышать значения $\|\tilde{x}(t)\|$, сохраняя ту же зависимость от модуля $|\alpha|$ собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности μ .

Компьютерное исследование

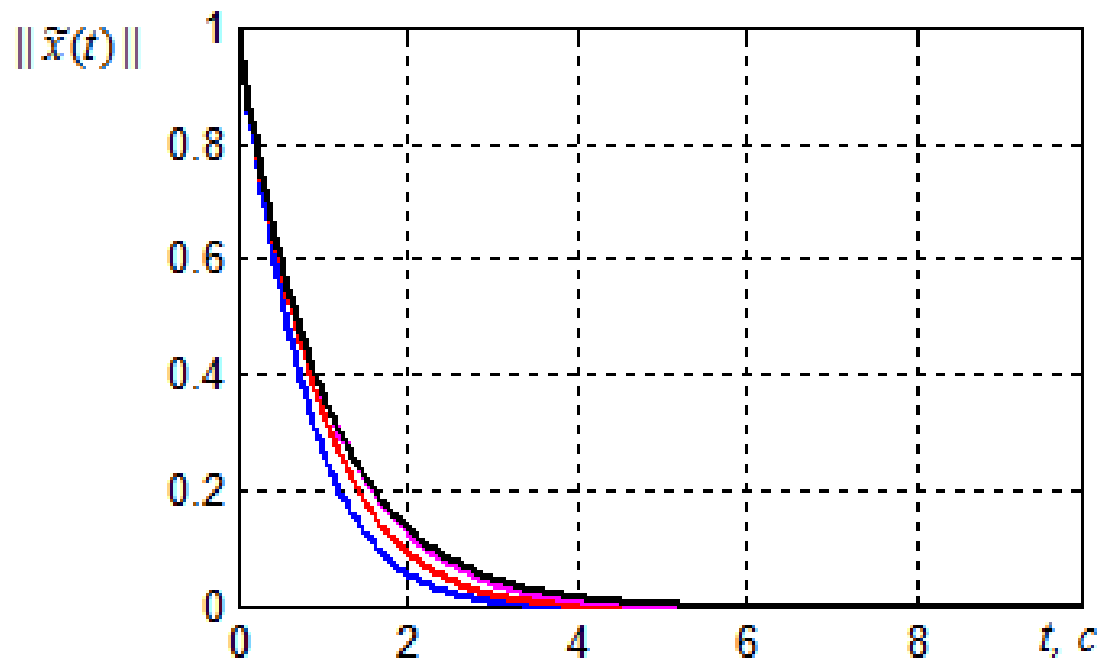


Рис. 1. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -2$; и $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 .

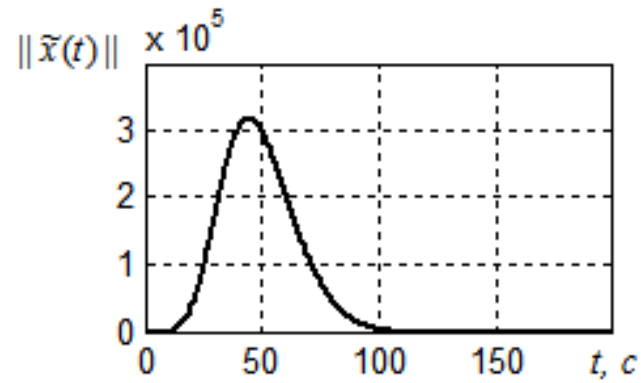
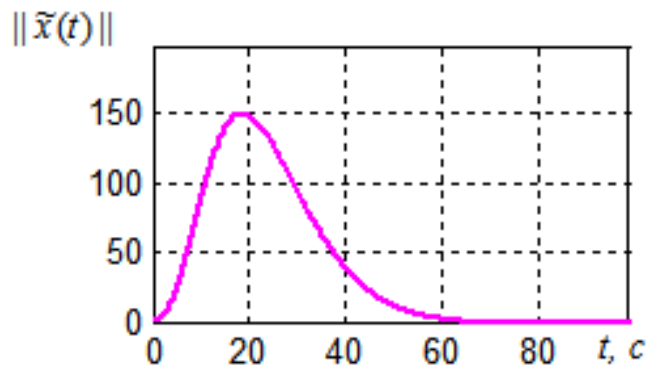
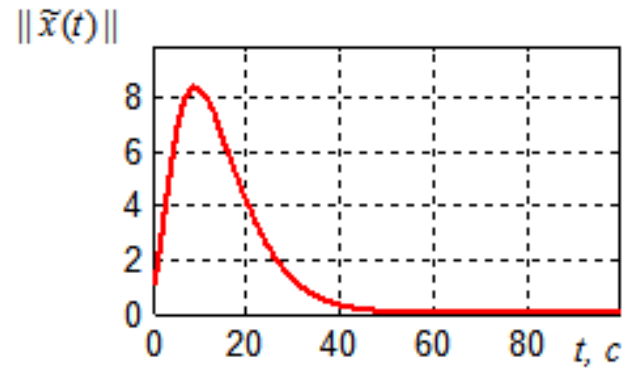
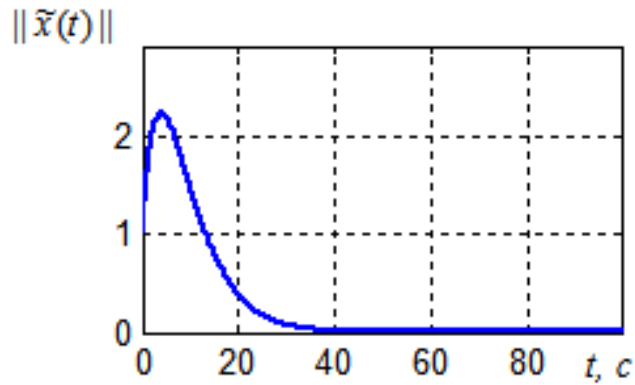


Рис. 2. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0.2$; и $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 .

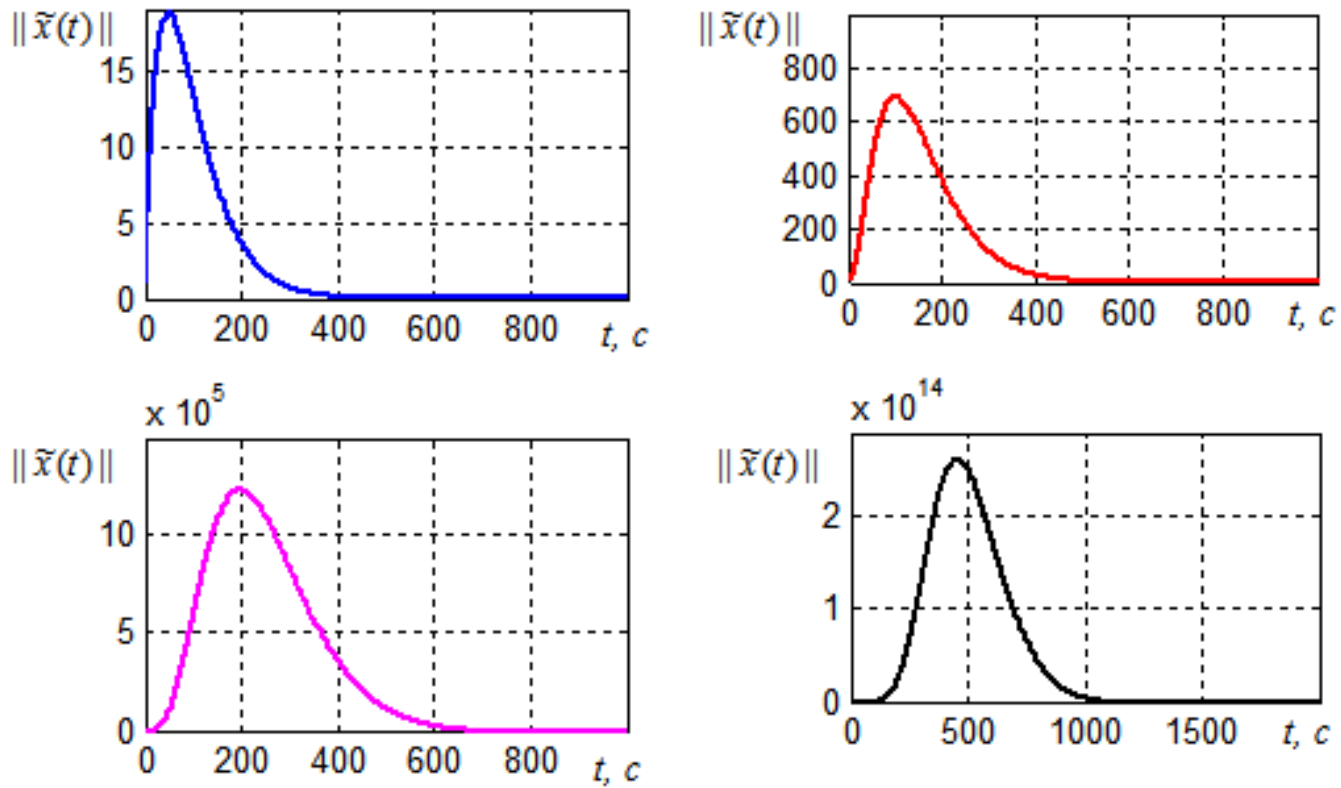


Рис. 3. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0.02$; и $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 .

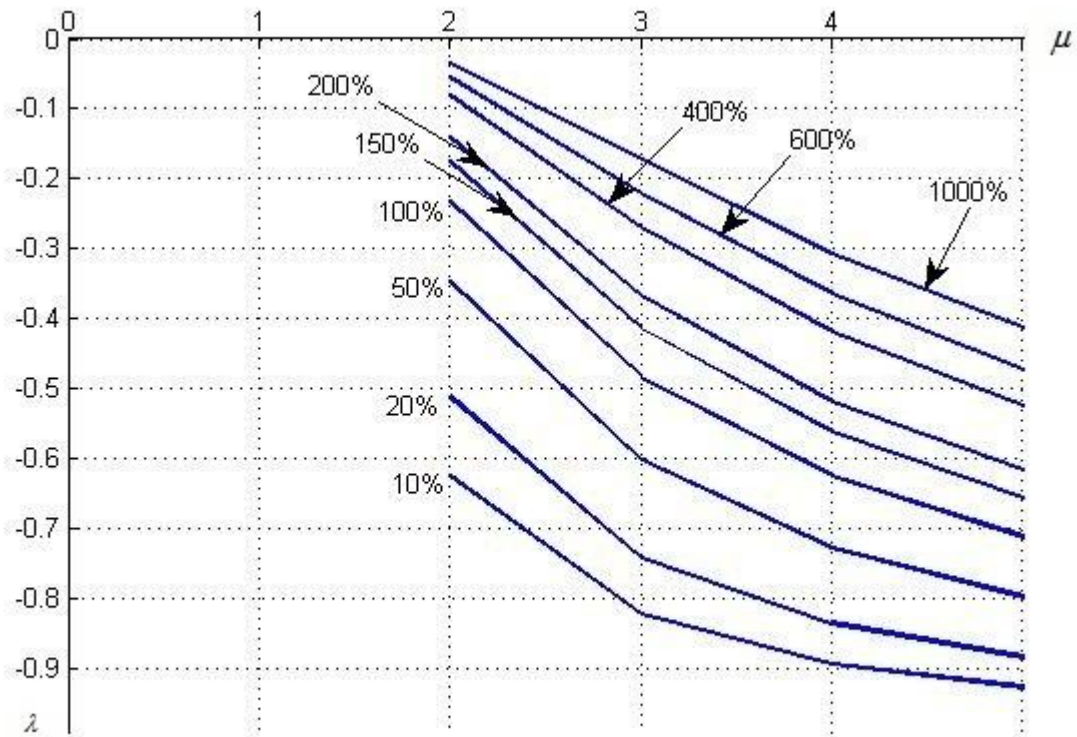


Рис. 4. Кривые постоянных значений $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\| = \text{const}.$

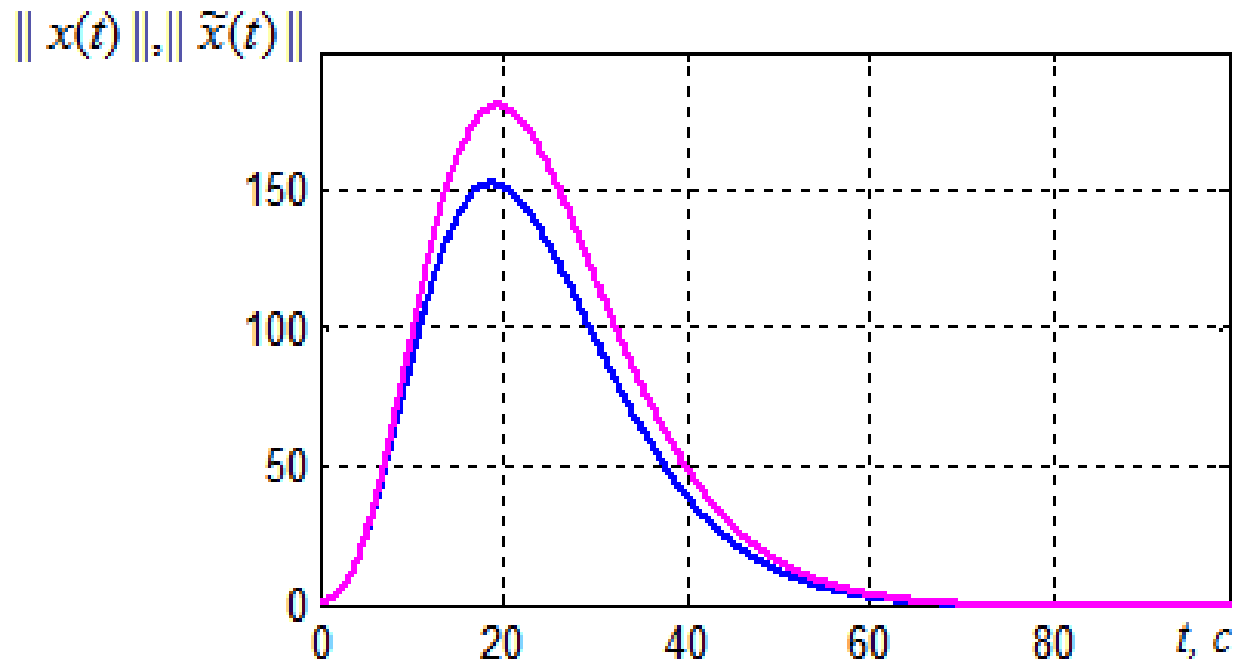


Рис. 5. Кривые процессов $\|x(t)\|$ (верхняя) и $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0.2$; и $\mu = n = 5$

Если спектр собственных чисел матрицы F имеет несколько кратных чисел

$$\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_i = \alpha_j : i = \overline{1, \mu_j}; j = \overline{1, q}; \sum_{j=1}^q \mu_j = n \right\},$$

то каноническое представление F в жордановой форме будет содержать q жордановых клеток размерности $(\mu_j \times \mu_j)$ каждая. Тогда для такого случая соотношение (9) принимает вид

$$\|\tilde{x}(t)\| = \left\| \text{diag} \left\{ \exp \{ J(\alpha_j) t \}; j = \overline{1, q} \right\} \tilde{x}(0) \right\| \leq e^{\bar{\alpha} t} \left\| \exp \{ J_{(\bar{\mu} \times \bar{\mu})} (0) t \} \right\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|,$$

где

$$\bar{\alpha} = \max_j \left\{ \alpha_j : \alpha_j < 0 \ \& \ |\alpha_j| < 1; j = \overline{1, q} \right\}, \quad \bar{\mu} = \max_j \left\{ \mu_j; j = \overline{1, q} \right\}.$$

Случай комплексно-сопряженных собственных чисел

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Fx(t), x(t)|_{t=0} = x(0),$$

Алгебраический спектр $\sigma\{F\}$ собственных чисел

$$(2) \quad \sigma\{F\} = \{\lambda_{2i-1;2i} = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_{2i-1;2i} = \alpha \pm j\beta; i = \overline{1, n/2}\}.$$

Каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F будет представлять собой $(n \times n)$ -«квазижорданову» клетку $\tilde{J}(\alpha, \beta)$.

При конструировании клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ потребуем выполнения условия

$$(3) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \{\tilde{J}(\alpha, \beta)\} = J(\alpha).$$

Для конструирования «квазижордановой» клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ воспользуемся структурным представлением системы

$$(4) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = J(\alpha)\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0),$$

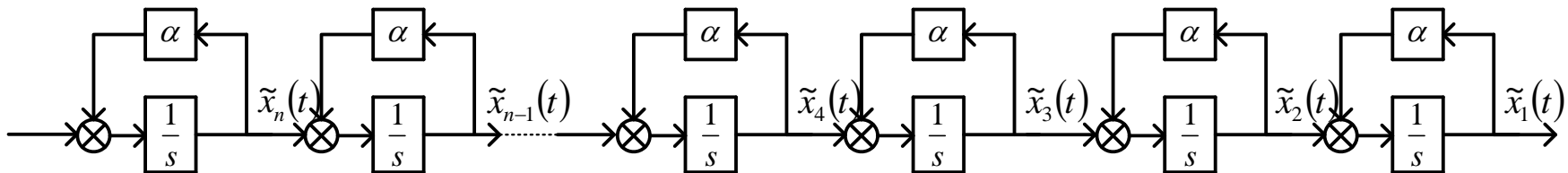


Рис. 1. Структурная реализация жордановой клетки $J(\alpha)$

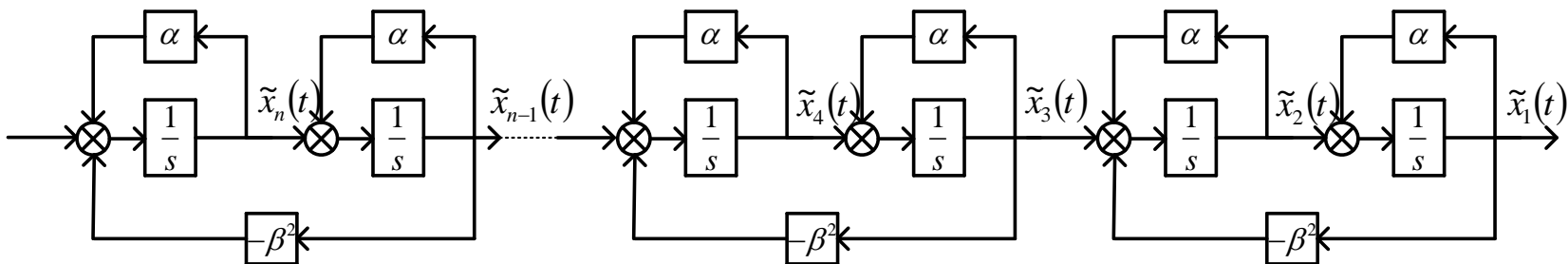


Рис. 2. Структурная реализация «квазижордановой» клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$.

$$(5) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{J}(\alpha, \beta)\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \text{ где}$$

$$(6) \quad \tilde{J}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

«Квазижордановая» матрица $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ допускает аддитивную декомпозицию в виде

$$(7) \quad \tilde{J}(\alpha, \beta) = \text{diag} \{ \lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n} \} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha I + \tilde{J}(0, \beta).$$

Решение системы (5)

$$(8) \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta) t\} \tilde{x}(0) = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\} \tilde{x}(0).$$

Скаляризация векторного процесса (8)

$$(9) \quad \|\tilde{x}(t)\| = \left\| e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\} \tilde{x}(0) \right\| = e^{\alpha t} \left\| \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\} \tilde{x}(0) \right\| \leq e^{\alpha t} \left\| \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\} \right\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|.$$

Матричную экспоненту $\exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\}$ вычислим для достаточно репрезентативной системной ситуации, характеризующейся $n = 6$. $\mu = n/2 = 3$

$$(10) \quad \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\} = L^{-1} \left\{ sI - \tilde{J}(0, \beta) \right\}^{-1} =$$

$\cos \beta t$	$\frac{1}{\beta} [\sin \beta t]$	$\frac{1}{2\beta} [t \sin \beta t]$	$\frac{1}{2\beta^3} [\sin \beta t - \beta t \cos \beta t]$	$\frac{t}{8\beta^3} [\sin \beta t - \beta t \cos \beta t]$	$\frac{1}{8\beta^5} [(3 - \beta^2 t^2) \sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t]$
$-\beta [\sin \beta t]$	$\cos \beta t$	$\frac{1}{2\beta} [\sin \beta t + \beta t \cos \beta t]$	$\frac{1}{2\beta} [t \sin \beta t]$	$\frac{1}{8\beta^3} [(1 + \beta^2 t^2) \sin \beta t - \beta t \cos \beta t]$	$\frac{t}{8\beta^3} [\sin \beta t - \beta t \cos \beta t]$
0	0	$\cos \beta t$	$\frac{1}{\beta} [\sin \beta t]$	$\frac{1}{2\beta} [t \sin \beta t]$	$\frac{1}{2\beta^3} [\sin \beta t - \beta t \cos \beta t]$
0	0	$-\beta [\sin \beta t]$	$\cos \beta t$	$\frac{1}{2\beta} [\sin \beta t + \beta t \cos \beta t]$	$\frac{1}{2\beta} [t \sin \beta t]$
0	0	0	0	$\cos \beta t$	$\frac{1}{\beta} [\sin \beta t]$
0	0	0	0	$-\beta [\sin \beta t]$	$\cos \beta t$

Из (10) видно, что

$\|\exp\{\tilde{J}(0,\beta)t\}\| = \|\exp\{\tilde{J}(0,\beta)t\}\|_{\infty} = \|\exp\{J(0)t\}\|_2$ и вычисляются как норма вектора

$$v(\alpha,\beta,t) = \left[\frac{(3-(\beta t)^2)\sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t}{8\beta^5}, \frac{t(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3}, \frac{\sin \beta t - \beta t \cos \beta t}{2\beta^3}, \frac{t \sin \beta t}{2\beta}, \frac{\sin \beta t}{\beta}, \cos \beta t \right]^T$$

Следует заметить, что при $\beta \rightarrow 0$ оказываются справедливыми предельные переходы

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \|\exp(\tilde{J}(0,\beta))t\|_p = \|\exp(J(0)t)\|_p, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \|\exp(\tilde{J}(\alpha,\beta))t\|_p = \|\exp(J(\alpha)t)\|_p.$$

Поставим задачу оценки влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ при сохранении условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ на величину выбросов в траекториях системы (5) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$.

	$\lambda = \alpha \pm j\beta; n = 6; \mu = 3$						
α	$\alpha = -0.2$						
β	0.01	0.1	0.25	0.5	1	1.25	1.375
$\max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ _{\ \tilde{x}(0)\ =1}$	150	110	42	10.6	3.9	9.2	16.8
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $	20	17	10.5	7	7.5	9.2	9.25
β	1.5	1.75	2	3	3.5	5	10
$\max_t \ x(t, x(0))\ _{\ x(0)\ =1}$	30	86	220	3700	11000	$13 \cdot 10^4$	$17 \cdot 10^6$
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $	9.3	9.35	9.4	9.56	9.6	9.72	9.93

Таблица 1. Значения выбросов $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\|$ кривой $\|\tilde{x}(t)\|$

Далее поставим задачу оценки *возможности появления выбросов* при условии $\alpha = \arg \{ \alpha < 0 \vee |\alpha| \geq 1 \}$ и влияния значения β на величину этих выбросов.

Рассмотрим i – ю ($i = \overline{1, n/2}$) двумерную ячейку, которая задается моделью

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = [\dot{\tilde{x}}_{2i-1}(t), \dot{\tilde{x}}_{2i}(t)]^T = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta^2 & \alpha \end{bmatrix} [\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T, \quad \tilde{x}_i(0) = [\tilde{x}_{2i-1}(0), \tilde{x}_{2i}(0)]^T.$$

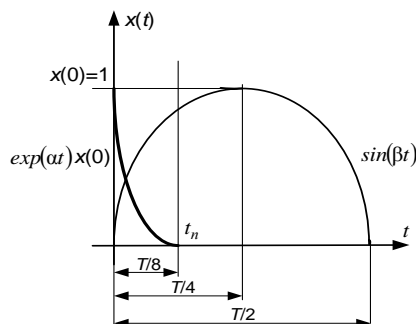


Рис. 3. Графическая иллюстрация свободных движений, порождаемых вещественным α и мнимым β компонентами собственного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$

$t_n = \gamma T/2 = \gamma \pi / \beta = 3/\alpha$. Получаем, что при $\beta \leq \gamma(\pi/3)\alpha$ будут отсутствовать перерегулирования, если γ составит величину, удовлетворяющую условию $\gamma < 0.25$, в противном случае перерегулирование, а следовательно и выброс в кривой процессов по норме вектора свободного движения будет иметь место.

Движение в ячейке описывается выражением

$$\tilde{x}_i(t) = \exp(\alpha t) \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & (1/\beta)\sin(\beta t) \\ (-\beta)\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \tilde{x}_i(0),$$

для которого по норме $\|\tilde{x}_i(t)\|$ при $\|\tilde{x}_i(0)\| = 1$ оказывается справедливым покрытие

$$\sup \{\|\tilde{x}_i(t)\|\} = \exp(\alpha t) \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1/\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \right\|.$$

При $\beta > |\gamma(\pi/3)\alpha|$ оказывается справедливым непрерывное мажорирующее покрытие процессов ($n = 6, \mu = n/2 = 3$) в виде нормы вектора

$$\hat{v}(\alpha, \beta, t) = \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right), \left(\frac{t(1 - \beta t)}{8\beta^3} \right), \left(\frac{1 - \beta t}{2\beta^3} \right), \left(\frac{t}{2\beta} \right), \left(\frac{1}{\beta} \right), 1 \right]^T.$$

Исследования нормы вектора $\hat{v}(\alpha, \beta, t)$ как функции времени обнаруживает доминирование в ее значении первого члена этого вектора. Это позволяет построить аналитическое представление покрытия (roof) процесса $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|$ в форме эвклидовой нормы вектора $\tilde{v}(\alpha, \beta, t) = \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right), 0, 0, 0, 0, 0 \right]$, которое принимает вид

$$\text{roof} \left\{ \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\| \right\} = \left\{ \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

$$(11) \text{ roof} \left\{ \|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\| \right\} = e^{\alpha t} \left\{ \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Форма (11) не содержит разрывно дифференцируемых функций типа модульных в случае использования абсолютной векторной нормы, что позволяет применять ее для исследования на экстремумы нормы матричной экспоненты $\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta) t\} = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta) t\}$. Действительно, вычисление

$t_M = \arg \max_t \|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta) t\}\|$ из условия $\frac{d}{dt} \{\|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta) t\}\|\} = 0$ порождает

алгебраическое уравнение для вычисления t_M

$$(12) \quad t_M^4 + \frac{6\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} t_M^3 + \frac{3\alpha + 9\beta}{\alpha\beta^2} t_M^2 + \frac{3\beta - 18\alpha}{\alpha\beta^3} t_M + \frac{9(\alpha - \beta)}{\alpha\beta^4} = 0.$$

Результаты вычислений t_M с помощью (12) приведены в таблице 2.

	β				
α	2	3	5	10	20
-0.2	9.4	9.56	9.72	9.86	9.93
-2		0.913	0.88	0.9	0.938
-8				0.236	0.22
	t_M				

Таблица 2. Значения моментов t_M выброса в кривой $\|\tilde{x}(t)\|$

Компьютерное исследование

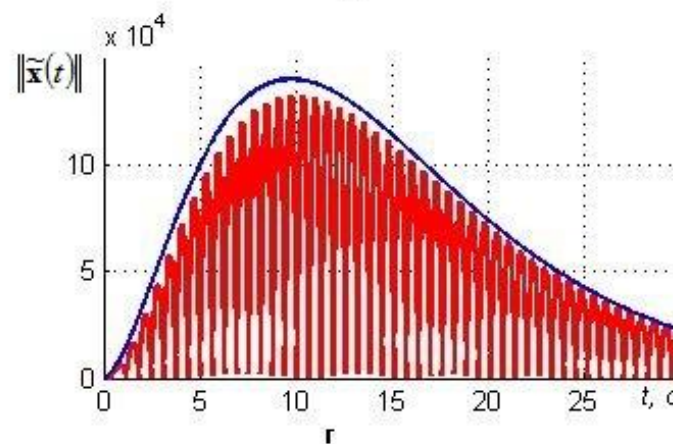
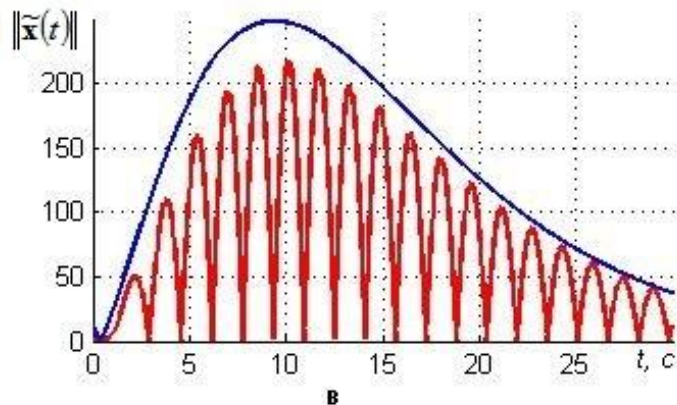
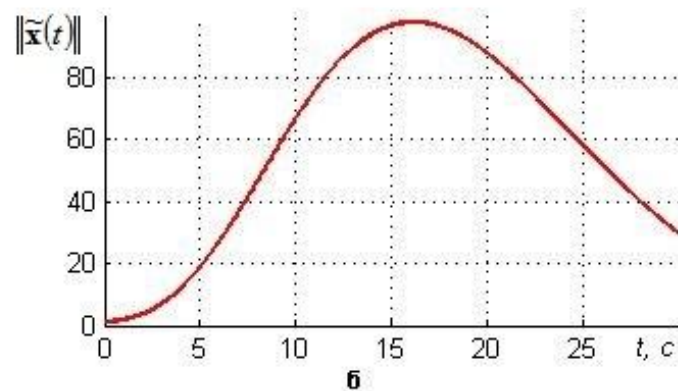
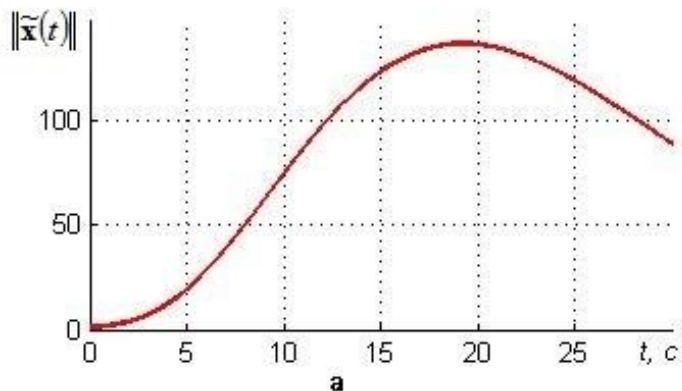


Рис.4. Кривые $\|\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$ и их покрытий при $\alpha = -0.2$ при $\beta = 0.01$ (рис.а), $\beta = 1$ (рис.б), $\beta = 2$ (рис.в), $\beta = 5$ (рис.г)

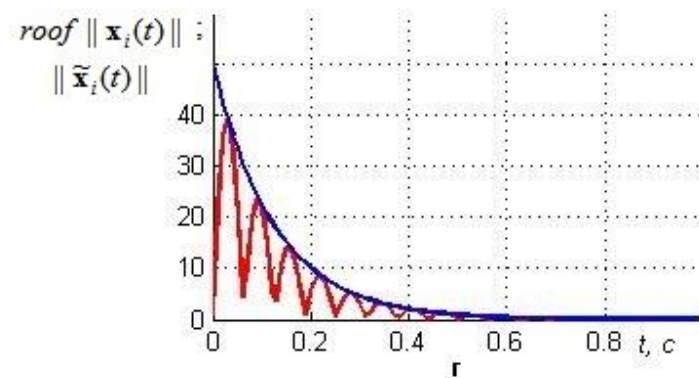
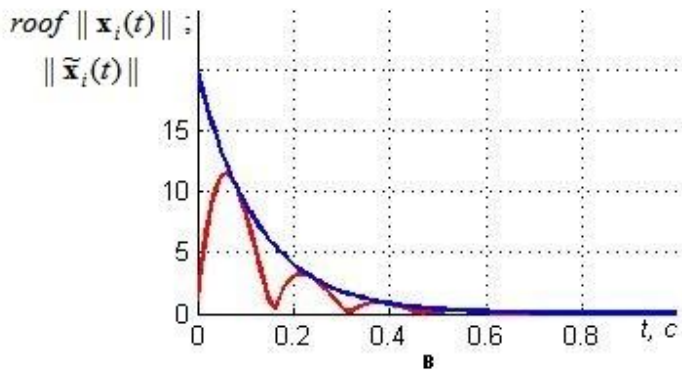
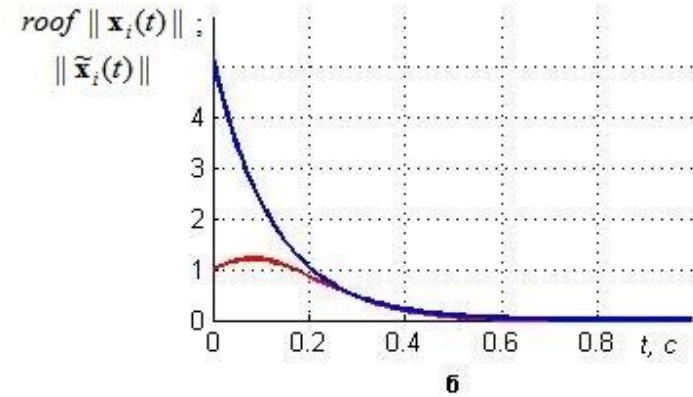
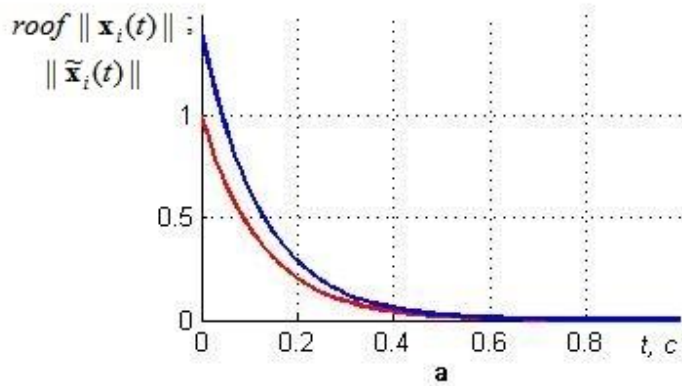


Рис.5. Кривые $\|\tilde{\mathbf{x}}_i(t, \tilde{\mathbf{x}}_i(0))\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}_i(0)\|=1}$ и их покрывий i -ой ($i = 1, n/2$) двумерной ячейки при $\alpha = -8$ и $\beta = 1$ (рис.а), $\beta = 5$ (рис.б), $\beta = 20$ (рис.в), $\beta = 50$ (рис.г)

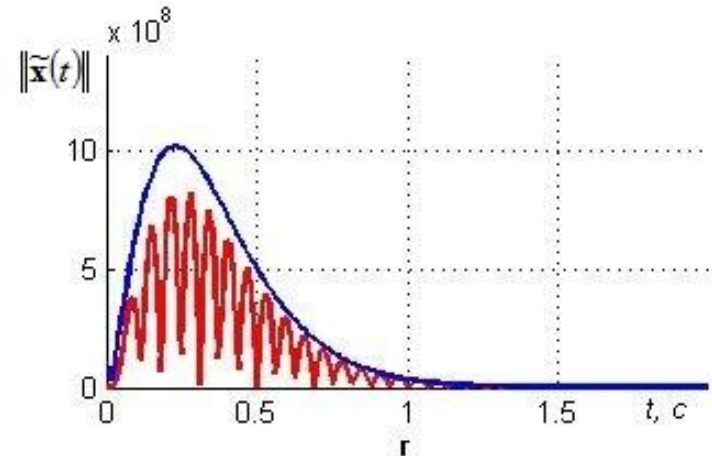
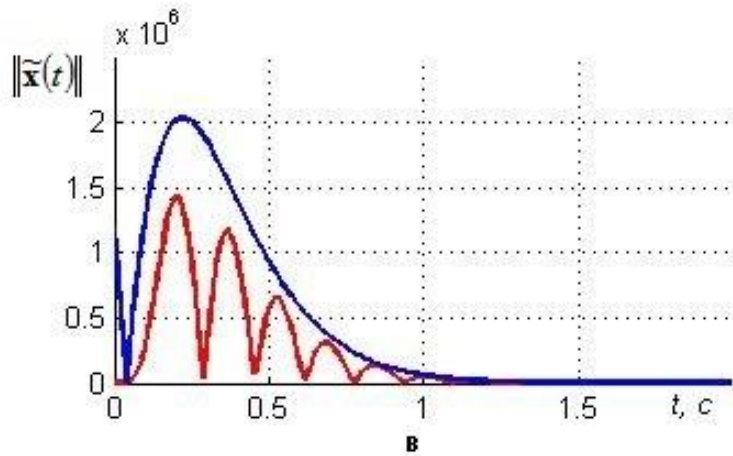
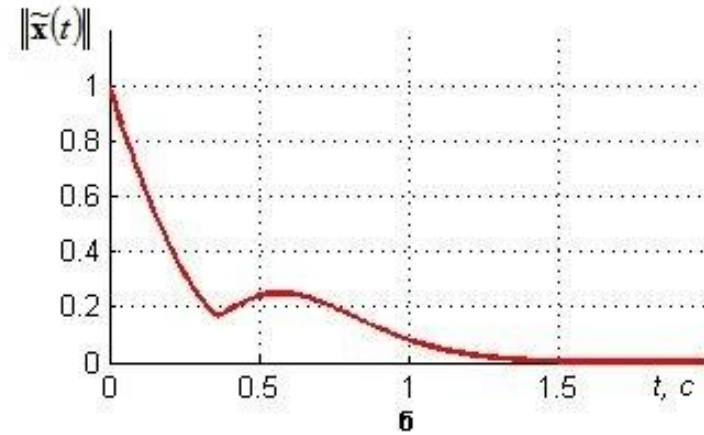
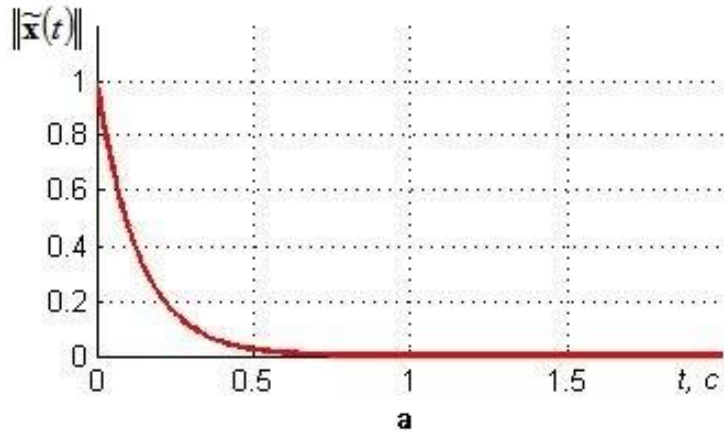


Рис.6.Кривые $\|\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$ и их покрытий системы порядка $n = 6$ при $\alpha = -8$ при $\beta = 1$ (рис.а), $\beta = 3$ (рис.б), $\beta = 20$ (рис.в), $\beta = 50$ (рис.г)

Список публикаций

1. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование колебательности процессов в апериодических непрерывных системах, порождаемой фактором кратности собственных чисел // Научно – технический вестник ИТМО. 2013. №3(85). С.55–61
2. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование процессов в непрерывных системах с кратными комплексно–сопряженными собственными числами их матриц состояния // Научно – технический вестник ИТМО. ISSN 2226–1494. 2013. №4(86). С.25–33
3. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Степень близости простой и кратной структур собственных чисел: минимизация выброса траекторий свободного движения апериодической системы // Научно – технический вестник ИТМО. ISSN 2226–1494. 2014. №2(90). С.39–46
4. Полинова Н. А., Акунов Т. А., Ушаков А.В. Колебательность апериодических систем и смежные проблемы динамики.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.–160с.
5. Taalaybek Akunov, Natalya Dudarenko, Nina Polinova, Anatoly Ushakov FACTOR MULTIPLICITY of the STATE MATRIX in the SYSTEM DYNAMICS. Recent Advances in Applied Mathematics and Theoretical Mathematics // Proceedings of the 18th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (AMATH 13), Budapest, Hungary, December 10-12, 2013. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series.20.
6. Taalaybek Akunov, Natalya Dudarenko, Nina Polinova, Anatoly Ushakov. Research of processes in continuous systems with multiple eigenvalues of state matrix// International journal of systems applications, engineering & development. 2014. Vol. 8. С 230 – 237.
7. Н. А. Полинова, научный руководитель А.В.Ушаков Анализ колебательности апериодических систем и апериодичности колебательных // Аннотированный сборник научно-исследовательских выпускных квалификационных работ бакалавров НИУ ИТМО / Главный редактор проректор по НР д.т.н., профессор В.О.Никифоров.– СПб.: НИУ ИТМО, 2013.–с.22–26